材料の力学１　第９回演習問題（2025/6/16 実施）

[1] 図 1. 1～図 1. 2 のような断面を持つはりがある時，以下の設問に答えよ.

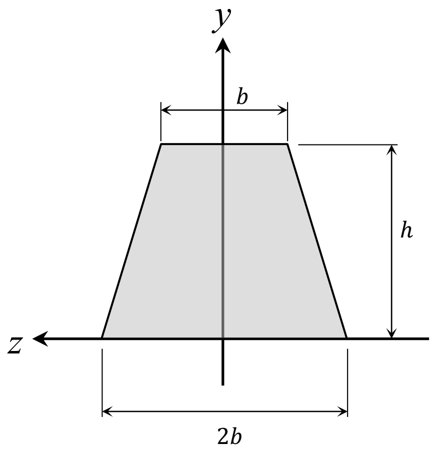
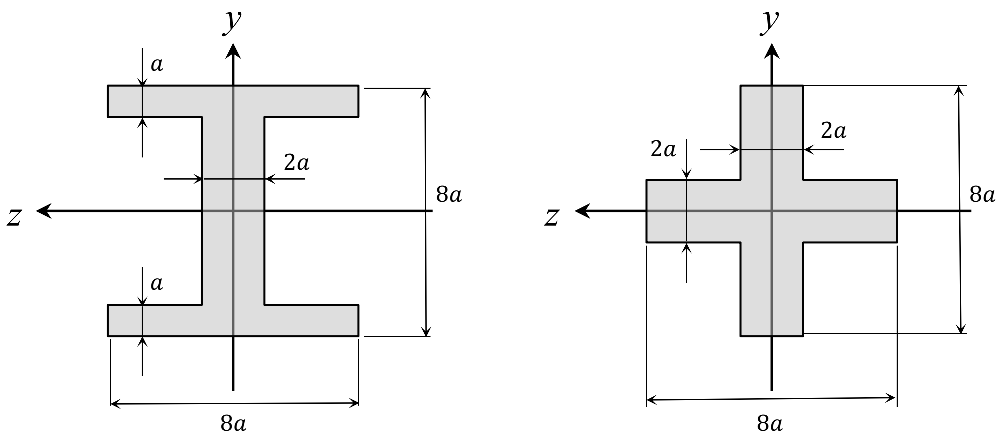


Fig. 1.1 台形断面



(a) I 型断面　　(b) 十字型断面

Fig. 1.2 同じ断面積を持つ 2 種類の断面

(1) 図 1.1 について，z 軸に関する断面一次モーメント S_z を求めよ.

(2) 図 1.1 について，図心の y 座標である y_c を求めよ.

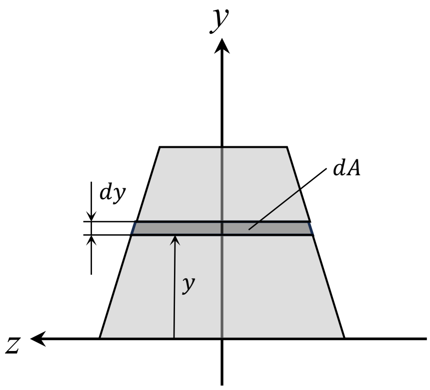
(3) 図 1.2 (a) について，z 軸に関する断面二次モーメント I_z を求めよ.

(4) 図 1.2 (b) について，z 軸に関する断面二次モーメント I_z を求めよ.

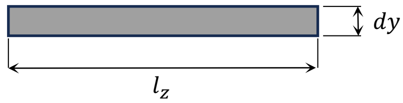
(5) 図 1.2 (a), (b) の断面を持つ部材 A, B に対し y 軸方向の力が作用した場合，(3), (4) の結果からどちらの方が曲げに強い設計であると言えるか答えよ．また，その理由を「曲げ剛性」という言葉を用いて説明せよ．ただし，両者の縦弾性係数 E は等しいものとする.

(1) 図 1.1 について，z 軸に関する断面一次モーメント S_z を求めよ．

計算に必要になる微小面積 dA は以下のように考える．



(a) 断面内の幾何学的関係



(b) 微小面積 dA

Fig. 1.3 台形断面の微小面積

微小面積 dA は，図 1.3 (b) のように近似できるため

$$dA = l_z \cdot dy = \left(2b - \frac{b}{h}y\right)dy \tag{1.1}$$

と表される，よって，断面一次モーメント S_z は

$$S_z = \int ydA = \int_0^h \left(2by - \frac{b}{h}y^2\right)dy = \left[by^2 - \frac{b}{3h}y^3\right]_0^h = \frac{2}{3}bh^2 \tag{1.2}$$

となる．

(2) 図 1.1 について，図心の y 座標である y_c を求めよ．

図心の y 座標である y_c は，前問で求めた断面一次モーメントを用いて，

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\frac{2}{3}bh^2}{\frac{3}{2}bh} = \frac{4}{9}h \tag{1.3}$$

と求められる．ここで A は，台形の面積である．

(3) 図 1.2 (a) について，z 軸に関する断面二次モーメント I_z を求めよ．

図 1.2 (a) の断面二次モーメントは，図 1.4 のように①の長方形の断面二次モーメント I_{z1} から，②の長方形の断面二次モーメント I_{z2} を２つ分引くことで求められる．

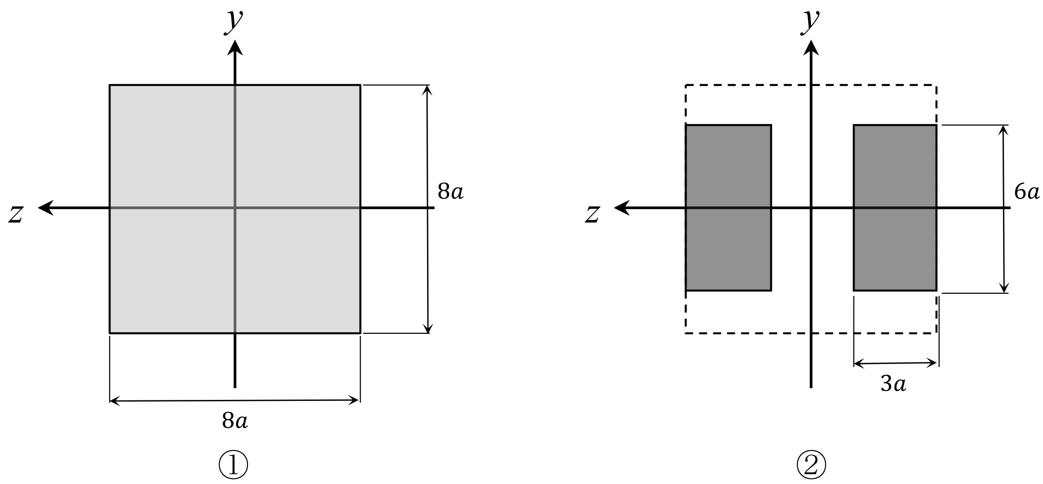


Fig. 1.4 断面の分割（(a) I 型断面）

それぞれ z 軸に対称であるため長方形形状の断面二次モーメントの式を用いて，以下のように求められる．

$$I_{z1} = \frac{1}{12} \cdot 8a \cdot (8a)^3 = \frac{1024}{3} a^4 \tag{1.4}$$

$$I_{z2} = \frac{1}{12} \cdot 3a \cdot (6a)^3 = 54a^4 \tag{1.5}$$

従って，求める値は

$$I_z = I_{z1} - 2I_{z2} = \frac{1024}{3} a^4 - 2 \cdot 54a^4 = \frac{700}{3} a^4 \tag{1.6}$$

(4) 図 1.2 (b) について，z 軸に関する断面二次モーメント I_z を求めよ．

図 1.2 (b) の断面二次モーメントは，図 1.5 のように①の長方形の断面二次モーメント I_{z2} と②の長方形の断面二次モーメント I_{z2} ２つ分の和で求められる．

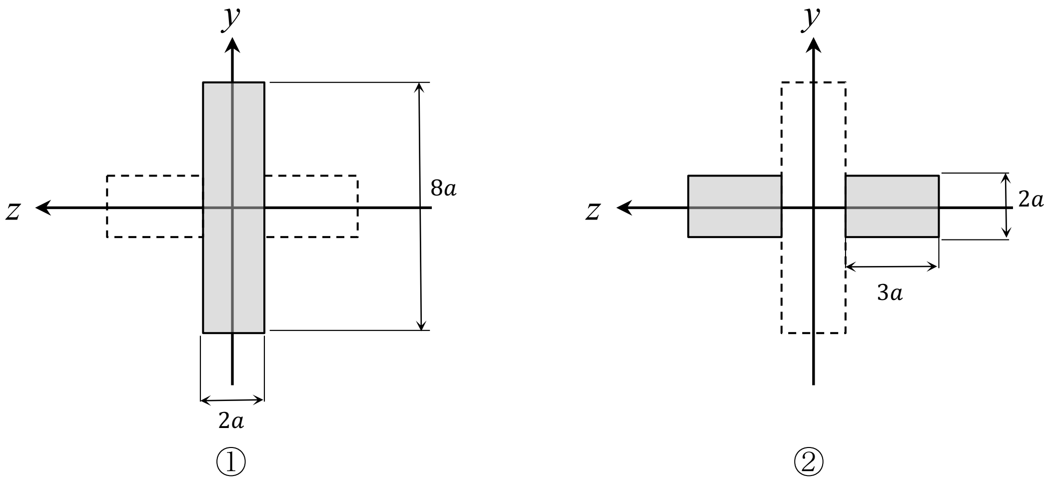


Fig. 1.5 断面の分割（(b) 十字型断面）

それぞれ z 軸に対称であるため，長方形形状の断面二次モーメントの式を用いて，

$$I_{z1} = \frac{1}{12} \cdot 2a \cdot (8a)^3 = \frac{256}{3} a^4 \tag{1.7}$$

$$I_{z2} = \frac{1}{12} \cdot 3a \cdot (2a)^3 = 2a^4 \tag{1.8}$$

従って，求める値は

$$I_z = I_{z1} + 2I_{z2} = \frac{256}{3} a^4 + 2 \cdot 2a^4 = \frac{268}{3} a^4 \tag{1.9}$$

(5) 図 1.2 (a), (b) の断面を持つ部材 A, B に対し y 軸方向の力が作用した場合，(3), (4) の結果からどちらの方が曲げに強い設計であると言えるか答えよ．また，その理由を「曲げ剛性」という言葉を用いて説明せよ．ただし，両者の縦弾性係数 E は等しいものとする．

縦弾性係数 E と断面二次モーメント I_z の積 EI_z は曲げ剛性と呼ばれ，部材の曲がりにくさを表す．本問において，E は 2 つの部材で等しいので，曲げ剛性の大小は断面二次モーメントに依存する．このとき断面二次モーメントは，A の方が大きいので，B より曲がりにくいといえる（(3), (4)の結果から，図心を通る軸（本文での z 軸）から遠い場所に断面積を多く配置することが断面二次モーメントを上げるのに効果的であることがわかる．）以下に模範解答を示す．

$$EI_{za} = \frac{700}{3} a^4 E > \frac{268}{3} a^4 E = EI_{zb} \tag{1.10}$$

解答：A

理由：部材 A の断面二次モーメントは B の部材よりも大きいため，曲げ剛性が大きくなるから．

[2] 同一平面状で直角に折れ曲がっている片持ちはりがある．壁と棒の接着部分を O 点，棒が折れ曲がっている箇所を A 点，棒の先端を B 点とし，O 点および A 点で局所座標系を図 2.1 に示すように定義する．$\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1$はそれぞれ OA 間，AB 間における仮想断面であり，それぞれx_0軸，x_1軸に垂直である．棒には図 2.2 に示すように，棒の先端にモーメント M と，棒全体に下向きに一様な分布荷重 p が作用している．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，次のことに留意すること．

※断面力の基準となる軸は，添え字の番号と一致する軸に従うこと．FBD には断面力を書き入れること（ただし，断面力が 0 である場合は，書き入れる必要はない）．

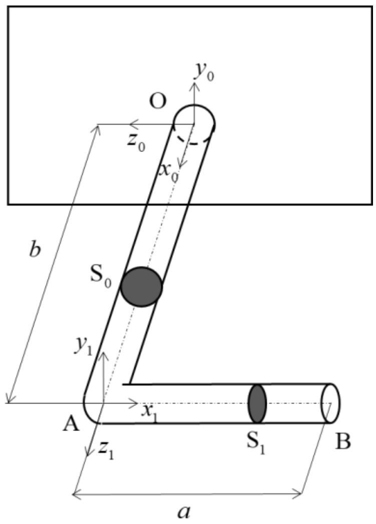


Fig. 2.1 中実丸棒

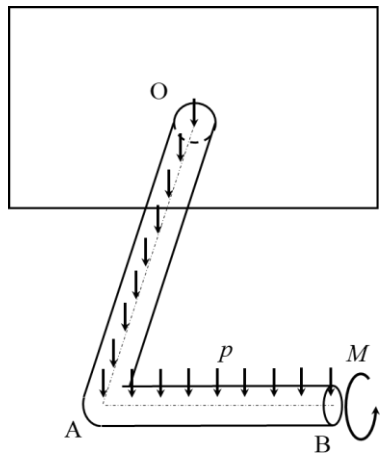


Fig. 2.2 中実丸棒にかかる荷重とモーメント

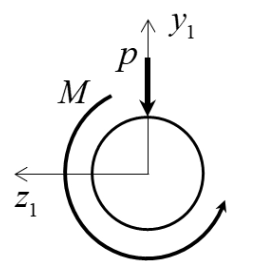


Fig. 2.3 棒の先端から見た図

(1) モーメント M のみ作用している場合を考える．

(a) 仮想断面S_1に作用する断面力$(F_x^1, F_y^1, F_z^1, M_x^1, M_y^1, M_z^1)$を位置$x_1$の関数として表せ．

(b) 仮想断面S_0に作用する断面力$(F_x^0, F_y^0, F_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0)$を位置$x_0$の関数として表せ．

(2) 分布荷重 p のみ作用している場合を考える．

(a) 仮想断面S_1に作用する断面力$(F_x^1, F_y^1, F_z^1, M_x^1, M_y^1, M_z^1)$を位置$x_1$の関数として表せ．

(b) 仮想断面S_0より B 点側にある部材の，z_0軸方向およびz_1軸方向から見たときの FBD をそれぞれ書け．

(c) 仮想断面S_0に作用する断面力$(F_x^0, F_y^0, F_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0)$を位置$x_0$の関数として表せ．（モーメントの正負に注意せよ．）

(3) モーメント M と分布荷重 p の両方が作用しているとき，仮想断面S_1に作用する断面力$(F_x^1, F_y^1, F_z^1, M_x^1, M_y^1, M_z^1)$，仮想断面$\mathrm{S}_0$に作用する断面力$(F_x^0, F_y^0, F_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0)$をそれぞれ求めよ．

(1) モーメント M のみ作用している場合を考える．

(a) 仮想断面$\mathbf{S_1}$に作用する断面力$(\boldsymbol{F_x^1, F_y^1, F_z^1, M_x^1, M_y^1, M_z^1})$を位置$\boldsymbol{x_1}$の関数として表せ．

断面力は図 2.4 および図 2.5 に示す向きを正とする．負の面では断面力の正負が反転することに注意する．また，モーメントの向き（M_z）は，はりの曲げを考えるときとは異なることに注意する．

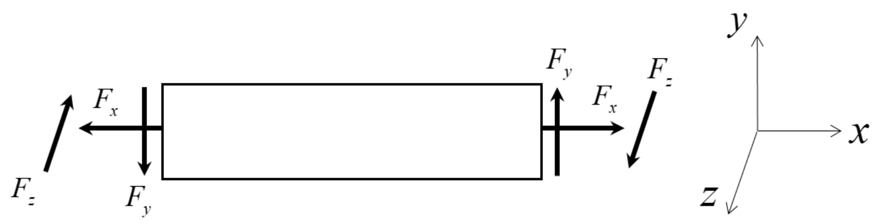


Fig. 2.5 断面力の正負（軸力，せん断力）

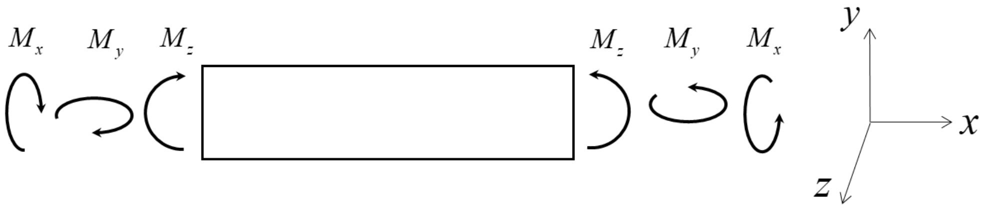


Fig. 2.5 断面力の正負（モーメント）

仮想断面$\mathrm{S_1}$より B 点側の部材（部材①とする）について FBD を書くと，図 2.6 のようになる．

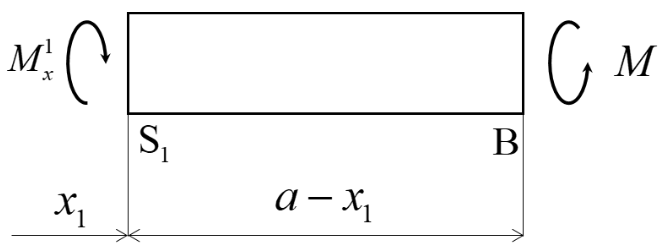


Fig. 2.6 モーメントのみ作用下の，z_1軸方向から見た部材①の FBD

よって，仮想断面$\mathrm{S_1}$に作用する断面力は,

$$\left(F_x^1, F_y^1, F_z^1, M_x^1, M_y^1, M_z^1\right) = \left(0, 0, 0, M, 0, 0\right) \tag{2.1}$$

となる．

(b) 仮想断面S_0に作用する断面力($F_x^0, F_y^0, F_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0$)を位置$x_0$の関数として表せ.

仮想断面S_0より B 点側の部材（部材②とする）について FBD を書くと，図 2.7 のようになる．

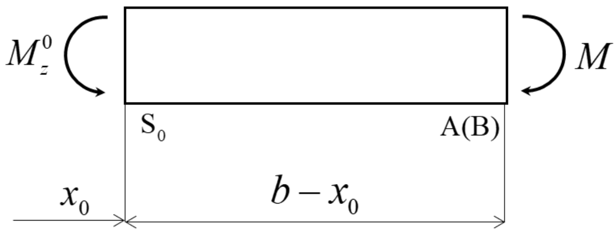


Fig. 2.7 モーメントのみ作用下の，z_0軸方向から見た部材②の FBD

よって，仮想断面S_0に作用する断面力は，

$$\left(F_x^0, F_y^0, F_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0\right) = \left(0,0,0,0,0,-M\right) \tag{2.2}$$

となる．

(2) 分布荷重pのみ作用している場合を考える.

(a) 仮想断面S_1に作用する断面力($F_x^1, F_y^1, F_z^1, M_x^1, M_y^1, M_z^1$)を位置$x_1$の関数として表せ.

仮想断面S_1より B 点側の部材（部材①）について FBD を書くと，図 2.8 のようになる．

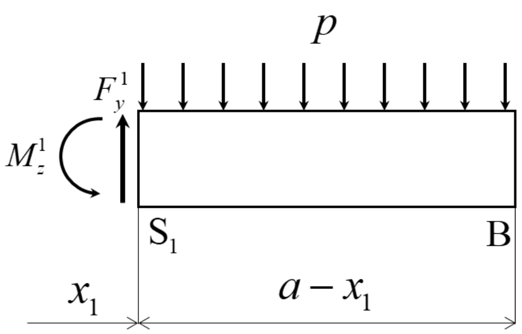


Fig. 2.8 分布荷重のみ作用下の，z_1軸方向から見た部材①の FBD

図 2.8 より，断面力の正負を考慮しながら力とモーメントのつり合いを考えると，

$$F_y^1 = -p\left(a-x_1\right) \tag{2.3}$$

$$M_z^1 = -\int_0^{a-x_1} px\,dx = -\frac{1}{2}p\left(a-x_1\right)^2 \tag{2.4}$$

となる．よって，仮想断面S_1に作用する断面力は，

$$\left(F_x^1, F_y^1, F_z^1, M_x^1, M_y^1, M_z^1\right) = \left(0, -p\left(a - x_1\right), 0, 0, 0, -\frac{1}{2}p\left(a - x_1\right)^2\right) \tag{2.5}$$

となる．

(b) 仮想断面$\boldsymbol{S_0}$より B 点側にある部材の，$\boldsymbol{z_0}$軸方向および$\boldsymbol{z_1}$軸方向から見たときの FBD をそれぞれ書け．

仮想断面S_0より B 点側の部材（部材②）について FBD を書くと，図 2.9，図 2.10 のようになる．

図 2.9 において pa は，AB 間に作用する分布荷重を集中荷重に見立てたものである．同様に，図 2.10 において$p(b - x_0)$は，S_0A 間に作用する分布荷重を集中荷重に見立てたものである．

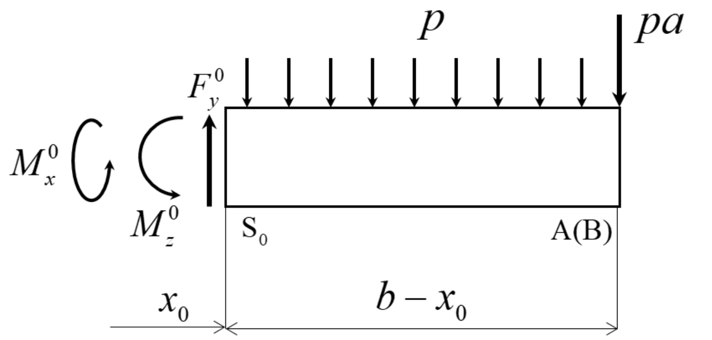


Fig. 2.9 分布荷重のみ作用下の，z_0軸方向から見た部材②の FBD

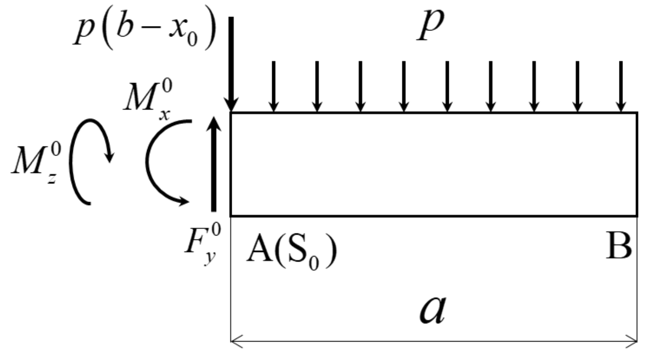


Fig. 2.10 分布荷重のみ作用下の，z_1軸方向から見た部材②の FBD

(c) 仮想断面$\boldsymbol{S_0}$に作用する断面力$(\boldsymbol{F_x^0}, \boldsymbol{F_y^0}, \boldsymbol{F_z^0}, \boldsymbol{M_x^0}, \boldsymbol{M_y^0}, \boldsymbol{M_z^0})$を位置$\boldsymbol{x_0}$の関数として表せ．（モーメントの正負に注意せよ．）

図 2.9，図 2.10 より力とモーメントのつり合いを考えると，以下の式(2.6)～式(2.8)のようになる．このとき，モーメントの正負は図 2.9 をもとに考える必要があることに注意する（図 2.5 と軸方向を一致させる必要がある）．

$$F_y^0 = -pa - p\left(b - x_0\right) = -p\left(a + b - x_0\right) \tag{2.6}$$

$$M_x^0 = -\int_0^a pxdx = -\frac{1}{2}pa^2 \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} M_z^0 &= -pa\left(b - x_0\right) - \int_0^{b-x_0} pxdx \\ &= -pa\left(b - x_0\right) - \frac{1}{2}p\left(b - x_0\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}p\left(b - x_0\right)\left(2a + b - x_0\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

よって，仮想断面$\mathrm{S_0}$に作用する断面力は,

$$\begin{aligned} &\left(F_x^0, F_y^0, F_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0\right) \\ &= \left(0, -p\left(a + b - x_0\right), 0, -\frac{1}{2}pa^2, 0, -\frac{1}{2}p\left(b - x_0\right)\left(2a + b - x_0\right)\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

となる．

(3) モーメント $\boldsymbol{M}$ と分布荷重 $\boldsymbol{p}$ の両方が作用しているとき，仮想断面$\mathbf{S_1}$に作用する断面力$(\boldsymbol{F_x^1}, \boldsymbol{F_y^1}, \boldsymbol{F_z^1}, \boldsymbol{M_x^1}, \boldsymbol{M_y^1}, \boldsymbol{M_z^1})$，仮想断面$\mathbf{S_0}$に作用する断面力$(\boldsymbol{F_x^0}, \boldsymbol{F_y^0}, \boldsymbol{F_z^0}, \boldsymbol{M_x^0}, \boldsymbol{M_y^0}, \boldsymbol{M_z^0})$をそれぞれ求めよ．

求める値は，(1)，(2)で個別に求めた断面力の値を合計すればよい．したがって，

$$\left(F_x^1, F_y^1, F_z^1, M_x^1, M_y^1, M_z^1\right) = \left(0, -p\left(a - x_1\right), 0, M, 0, -\frac{1}{2}p\left(a - x_1\right)^2\right) \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &\left(F_x^0, F_y^0, F_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0\right) \\ &= \left(0, -p\left(a + b - x_0\right), 0, -\frac{1}{2}pa^2, 0, -\frac{1}{2}p\left(b - x_0\right)\left(2a + b - x_0\right) - M\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる．