材料の力学 1　第 7 回演習問題

[1]平面応力状態にある十分に薄い弾性体において, 図 1 のように x-y 座標系から反時計回りに 30° 傾いた n-t 座標系に沿う正方形微小要素を考える．薄い弾性体に対して x 方向に引張応力 8σ，y 方向に引張応力 4σ，せん断応力 $2\sqrt{3}\sigma$ が作用している．弾性体の縦弾性係数を E, 横弾性係数を G, ポアソン比を ν として，以下の設問に答えよ．なお，指示が無ければ解答には σ，E, G, ν のうち必要なものを用いよ．

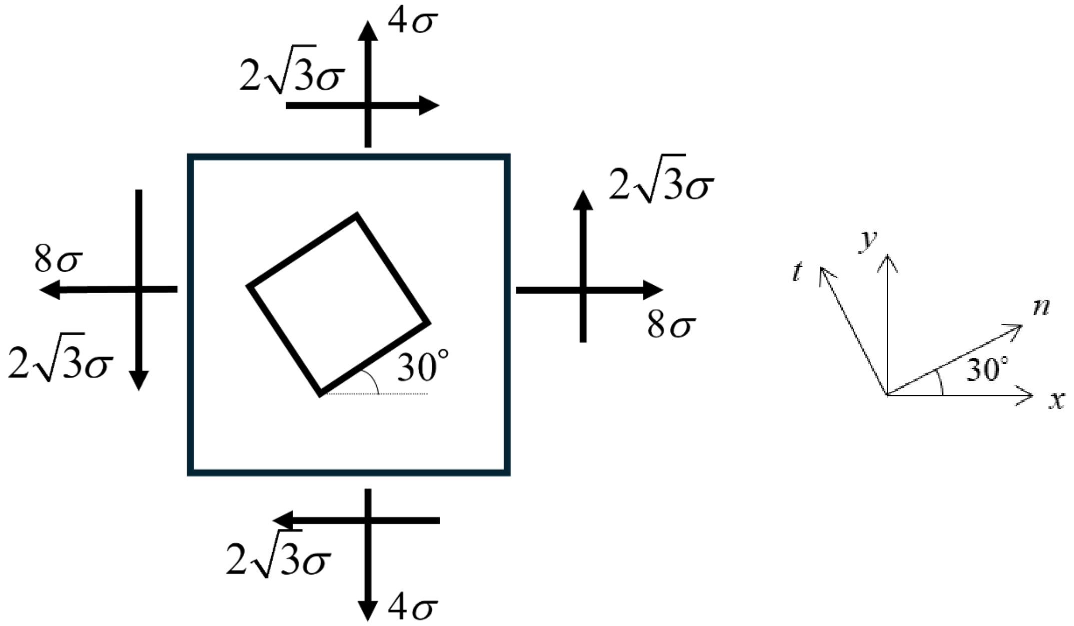

Fig.1 平面応力状態にある弾性体

(1)x-y 座標系における応力テンソルを求めよ．

(2)x-y 座標系におけるひずみテンソルを求めよ．(E と G を<u>必ず</u>用いること)

(3) n-t 座標系における応力テンソルを求めよ．

(4)n-t 座標系におけるひずみテンソルを求めよ．

(5)(4)で得られた n-t 座標系におけるひずみテンソルから x-y 座標系におけるひずみテンソルを <u>***G* を用いずに表せ**</u>.

(6)(2)と(5)の結果を踏まえ，横弾性係数 G を E, ν を用いて表せ．

(1)*x-y* 座標系における応力テンソルを求めよ．

x 方向に引張応力 8 σ，*y* 方向に引張応力 4 σ，せん断応力 $2\sqrt{3}\sigma$ が作用しているため x-y 座標系における応力テンソルは以下のとおりである．

$$\begin{pmatrix} 8\sigma & 2\sqrt{3}\sigma \\ 2\sqrt{3}\sigma & 4\sigma \end{pmatrix}$$

(2)*x-y* 座標系におけるひずみテンソルを求めよ．(*E* と *G* を必ず用いること)

平面応力状態($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$)における応力-ひずみの関係式を用いてひずみを求めればよい．

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) = \frac{\left(8-4\nu\right)\sigma}{E}$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) = \frac{(4-8\nu)\sigma}{E}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2\sqrt{3}\sigma}{G}$$

よって x-y 座標系におけるひずみテンソルは

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\left(8-4\nu\right)\sigma}{E} & \frac{\sqrt{3}\sigma}{G} \\ \frac{\sqrt{3}\sigma}{G} & \frac{(4-8\nu)\sigma}{E} \end{pmatrix}$$

となる．

(3) *n-t* 座標系における応力テンソルを求めよ．

n-t 座標系は *x-y* 座標系を反時計回りに 30° 回転させたものである．モールの応力円ではその２倍である 60° 回転させればよい．

まず *x-y* 座標系におけるモールの応力円は(1)の応力テンソルから以下のとおりである．

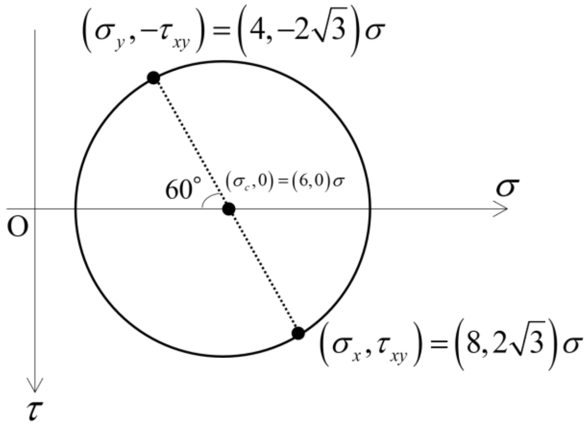

Fig.1.1*x-y* 座標系におけるモールの応力円

このモールの応力円の中心(σ_c,0)半径 r は以下のように求められる.

$$\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 6\sigma$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4{\tau_{xy}}^2} = 4\sigma$$

$$\left(\sigma_c, 0\right) = \left(6\sigma, 0\right)$$

これを利用すれば ***n*-*t*** 座標系のモールの応力円から応力テンソルを求めることができる.

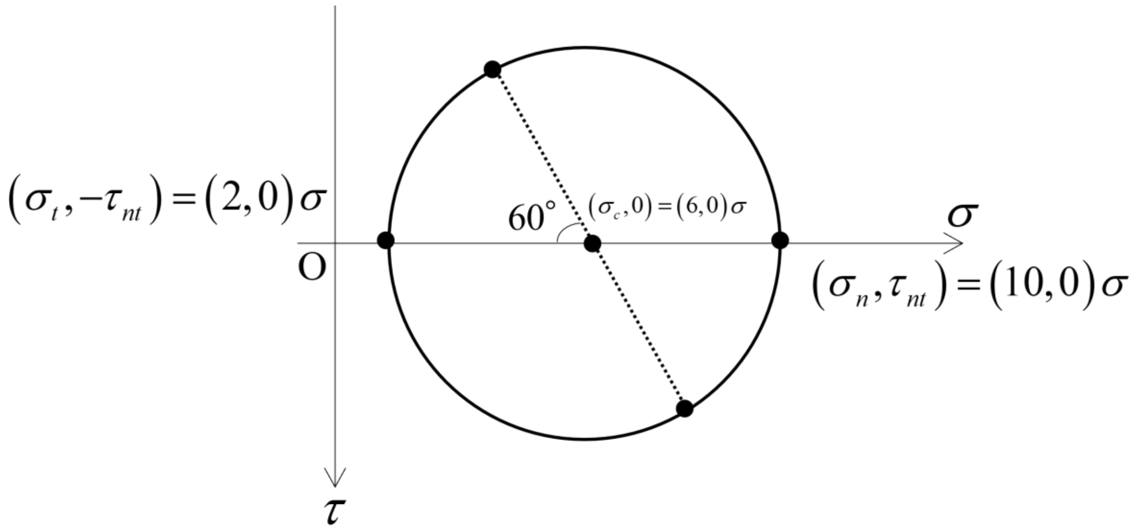

Fig.1.2 ***n*-*t*** 座標系におけるモールの応力円

n*-*t 座標系における応力テンソルは以下のとおりである.

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\sigma & 0 \\ 0 & 2\sigma \end{pmatrix}$$

この問題は座標変換の式を用いても解くことは可能.

(4)*n*-*t* 座標系におけるひずみテンソルを求めよ.

(3)で求めた ***n*-*t*** 座標系における応力テンソルと平面応力状態($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$)における応力-ひずみの関係式を用いてひずみを求めればよい.

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}\left(\sigma_n - \nu\sigma_t\right) = \frac{\left(10 - 2\nu\right)\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \nu\sigma_n\right) = \frac{(2 - 10\nu)\sigma}{E}$$

$$\gamma_{nt} = \frac{1}{G}\tau_{nt} = 0$$

よって求める *n-t* 座標系におけるひずみテンソルは以下のとおりである．

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_n & \dfrac{\gamma_{nt}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{nt}}{2} & \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(10-2\nu)\sigma}{E} & 0 \\ 0 & \dfrac{(2-10\nu)\sigma}{E} \end{pmatrix}$$

(5)(4)で得られた *n-t* 座標系におけるひずみテンソルから *x-y* 座標系におけるひずみテンソルを <u>*G* を用いずに表せ</u>.

(4)で得られたひずみテンソルからモールのひずみ円を作成し，それを時計回りに 60° 回転させ，*x-y* 座標系におけるモールのひずみ円より求められる．

(この問題の解説ではε_t を負の値であるとしてモールのひずみ円を書いているが，ポアソン比の値に応じて正の値を取ることがあり，必ずしも以下の図の通りにならないことに注意すべきである．)

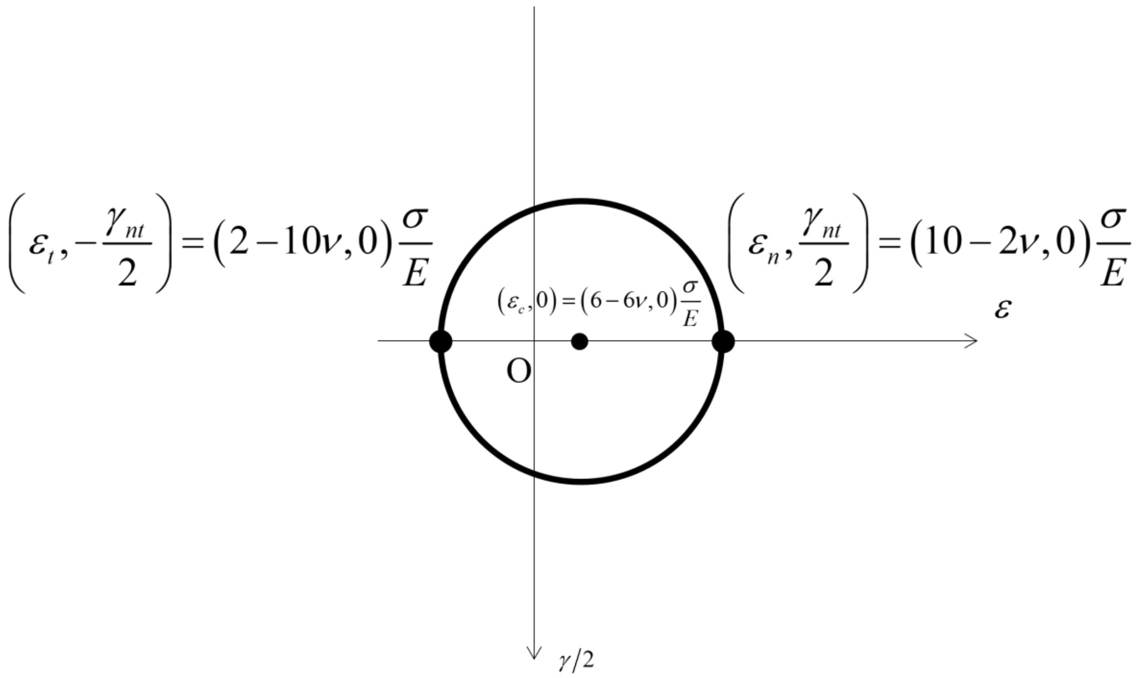

Fig.1.3 *n-t* 座標系におけるモールのひずみ円

このモールのひずみ円の中心$\left(\varepsilon_c, 0\right)$と半径 r は以下のように求められる．

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_n + \varepsilon_t\right) = \frac{6\left(1-\nu\right)\sigma}{E}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_n - \sigma_t\right)^2 + \gamma_{nt}{}^2} = \frac{4\left(1+\nu\right)\sigma}{E}$$

これを利用すれば *n-t* 座標系のモールのひずみ円からひずみテンソルを求めることができる．(必ずしもモールのひずみ円はこの通りにはならないのに注意する．)

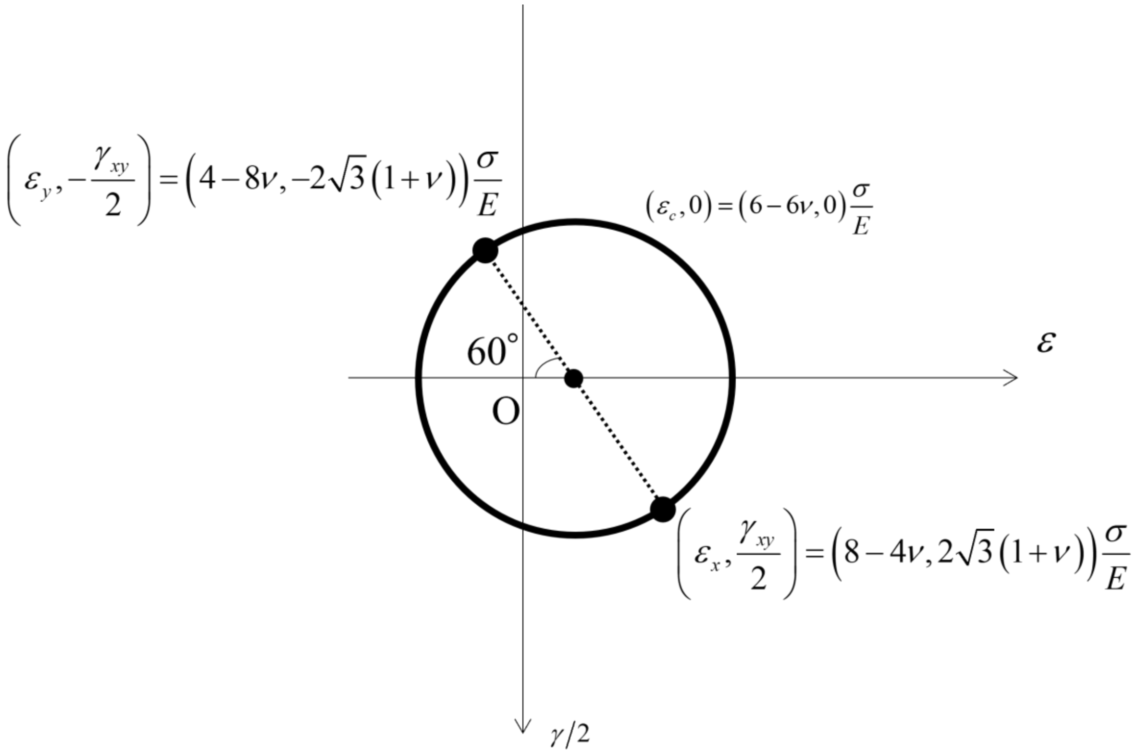

Fig.1.4 *x-y* 座標におけるモールのひずみ円

したがって *x-y* 座標系におけるひずみテンソルは以下のとおりである.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\left(8-4\nu\right)\sigma}{E} & \frac{2\sqrt{3}\left(1+\nu\right)\sigma}{E} \\ \frac{2\sqrt{3}\left(1+\nu\right)\sigma}{E} & \frac{(4-8\nu)\sigma}{E} \end{pmatrix}$$

(6)(2)と(5)の結果を踏まえ，横弾性係数 *G* を *E*, ν を用いて表せ

(2)と(5)の結果より以下の式が成り立つことがわかる.

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{G} = \frac{2\sqrt{3}\left(1+\nu\right)\sigma}{E}$$

この式を変形すれば,

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$$

が得られる.

[2] 板厚が十分に薄い弾性体表面のある点での応力状態を求めるため，図 2 に示すように（a: 0°, b: 120°, c: 240°方向に）三軸ひずみゲージを貼り付けた．このとき，それぞれのひずみゲージから測定された値は, $\varepsilon_a = 500\sqrt{3}\mu$, $\varepsilon_b = 200\sqrt{3}\mu$, $\varepsilon_c = -100\sqrt{3}\mu$であった．この弾性体のヤング率$E = 273$ GPa, ポアソン比$\nu = 0.3$とし, 以下の設問に答えよ．ただし，a 軸と x 軸は一致しており，回転方向は反時計回りを正とする．また，特に指定がない場合は根号を小数にせず，そのまま用いるものとする．

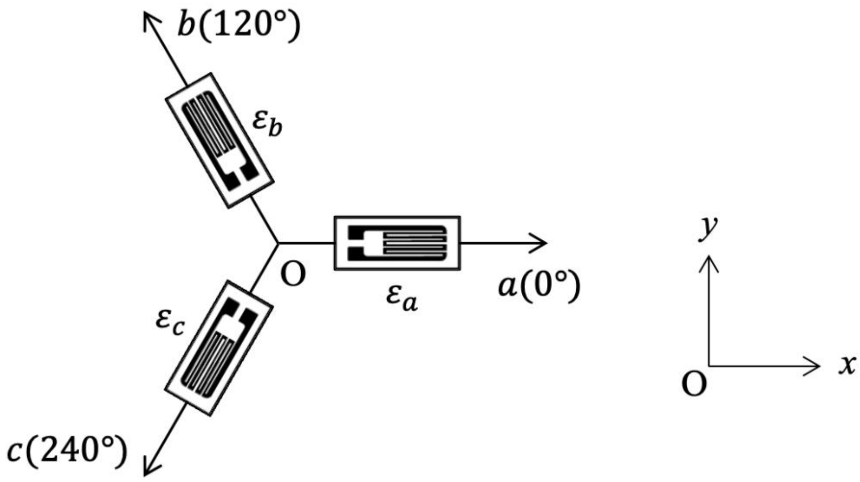

Fig. 2 三軸ひずみゲージ模式図

(1) 各ひずみゲージの値とひずみの座標変換式より, x-y 座標系におけるひずみテンソル$[\varepsilon_{ij}]$を求めよ．

(2) ひずみテンソルよりモールのひずみ円を描き，その中心と半径を示せ．

(3) 主ひずみ$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$)，およびそれぞれの主方向$\theta_1, \theta_2$ ($-90° \leq \theta_1, \theta_2 \leq 90°$)を求めよ．ただし，(2)で描いたモールのひずみ円に$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta_1, \theta_2$を明記すること．

(4) 平面応力状態における応力−ひずみの関係式より，主応力σ_1, σ_2を求めよ．ただし，根号を用いて解答した上で，この問題だけはさらに，$\sqrt{3} = 1.732$を用いて有効数字 3 桁でも解答せよ．

(5) 主応力よりモールの応力円を描き，その中心と半径，最大せん断応力τ_{max}を示せ．

(6) 応力とひずみの主方向が一致することを利用して, x-y 座標系における応力テンソル$[\sigma_{ij}]$を求めよ．なお，計算には根号を用いると良い．

(1) 各ひずみゲージの値とひずみの座標変換式より，*x-y* 座標系におけるひずみテンソル $[\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}]$を求めよ．

平面応力状態において，ある角度θにある方向のひずみε_θは，*x-y* 座標系におけるひずみテンソル$[\varepsilon_{ij}]$の主成分$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \tau_{xy})$を用いて，以下のように表せる．

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \tag{2.1}$$

このとき，

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{0^\circ} = \varepsilon_x \\ \varepsilon_b = \varepsilon_{120^\circ} = \varepsilon_x\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon_y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{240^\circ} = \varepsilon_x\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon_y\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \tag{2.2}$$

以上より，

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 500\sqrt{3}\ \mu \\ \varepsilon_y = -100\sqrt{3}\ \mu \\ \gamma_{xy} = -600\ \mu \end{cases} \tag{2.3}$$

よって，求める *x-y* 座標系におけるひずみテンソル$[\varepsilon_{ij}]$は，

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500\sqrt{3} & -300 \\ -300 & -100\sqrt{3} \end{bmatrix}\mu \tag{2.4}$$

(2) ひずみテンソルよりモールのひずみ円を描き，その中心と半径を示せ．

モールのひずみ円の中心$(\varepsilon_C, 0)$および半径r_εは以下のように求められる．

$$\left(\varepsilon_{\mathrm{C}}, 0\right) = \left(\frac{500\sqrt{3} - 100\sqrt{3}}{2},\ 0\right) = \left(200\sqrt{3}, 0\right)\mu \tag{2.5}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(600\sqrt{3}\right)^2 + 600^2} = 600\,\mu \tag{2.6}$$

したがって，モールのひずみ円を図示すると以下のようになる．

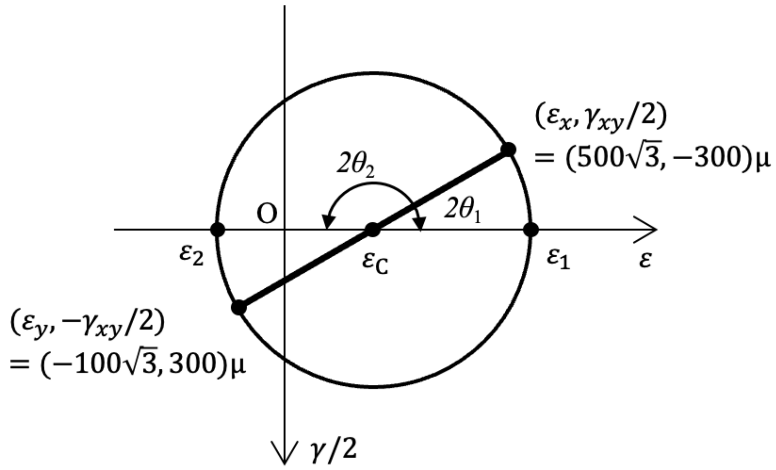

Fig. 2.1 モールのひずみ円

(3) 主ひずみ$\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{\varepsilon_2}$ $(\boldsymbol{\varepsilon_1} > \boldsymbol{\varepsilon_2})$，およびそれぞれの主方向$\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{\theta_2}$ $(-90° \leq \boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{\theta_2} \leq 90°)$を求めよ．ただし，(2)で描いたモールのひずみ円に$\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{\varepsilon_2}, \boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{\theta_2}$を明記すること．

モールの応力円より，主ひずみ$\varepsilon_1, \varepsilon_2$は以下のように求められる．

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_C + r \\ \varepsilon_C - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200\sqrt{3} + 600 \\ 200\sqrt{3} - 600 \end{pmatrix} \mu \tag{2.7}$$

また，主方向の角度条件に注意して，主方向θ_1, θ_2は以下のように求められる．

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -15° \tag{2.8}$$

$$\theta_2 = 90° + \theta_1 = 75° \tag{2.9}$$

(4) 平面応力状態における応力−ひずみの関係式より，主応力$\boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}$を求めよ．

弾性体の板厚は十分薄いため，*x*-*y* 平面の平面応力状態とみなすことができ，このとき応力−ひずみの関係式は以下の通り．

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 \right) \\ \sigma_2 = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 \right) \end{cases} \tag{2.10}$$

よって求める主応力σ_1, σ_2は，

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{273}{1-0.3^2}\left(200\sqrt{3}+600+60\sqrt{3}-180\right) = 78\sqrt{3}+126 \approx 261 \\ \sigma_2 = \dfrac{273}{1-0.3^2}\left(200\sqrt{3}-600+60\sqrt{3}+180\right) = 78\sqrt{3}-126 \approx 9.10 \end{cases} \text{[MPa]} \tag{2.11}$$

(5) 主応力よりモールの応力円を描き，その中心と半径，最大せん断応力$\boldsymbol{\tau_{max}}$を示せ.

モールのひずみ円の中心$(\sigma_C, 0)$および半径r_σは以下のように求められる.

$$\left(\sigma_{\mathrm{C}}, 0\right) = \left(78\sqrt{3}, 0\right) \approx 135.1\,\text{[MPa]} \tag{2.12}$$

$$r = 126\,\text{[MPa]} \tag{2.13}$$

したがって，モールの応力円を図示すると以下のようになる.

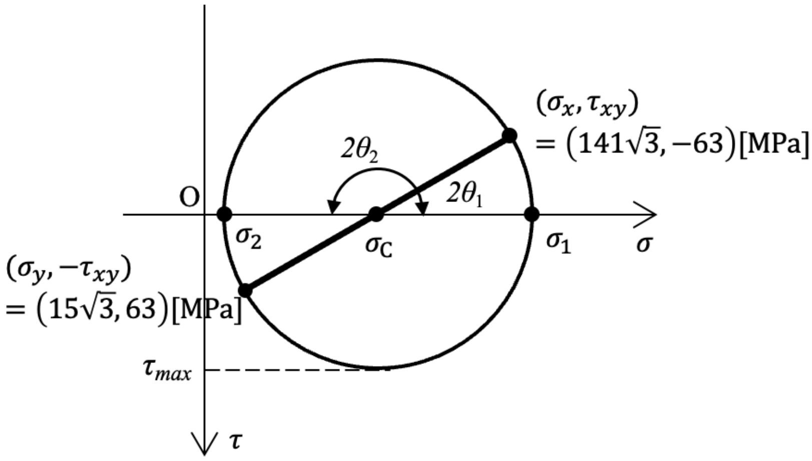

Fig. 2.2 モールの応力円

そして，せん断応力τ_{max}は

$$\tau_{\max} = 126\,\text{[MPa]} \tag{2.14}$$

(6) 応力とひずみの主方向が一致することを利用して，*x-y* 座標系における応力テンソル$[\boldsymbol{\sigma_{ij}}]$を求めよ.

(3)で求めた主方向より，

$$\begin{pmatrix} 2\theta_1 \\ 2\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30^\circ \\ 150^\circ \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

よって三角関数を用いることで，*x-y* 座標系における応力テンソル$[\sigma_{ij}]$を求められる.

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141\sqrt{3} & -63 \\ -63 & 15\sqrt{3} \end{bmatrix} \text{[MPa]} \tag{2.16}$$