[1] 平面応力状態にある弾性体において，x 方向と y 方向に引張応力$\sigma = 52$[MPa]，せん断応力 $\tau = 28$ [MPa]が図 1 のように作用している．その結果，弾性体の表面に描かれた正方形 OABC（一辺の長さ $a = 50$[mm]）が n 軸に関して対称である平行四辺形 OA’B’C’に変形した．ただし，A,C 点の x,y 方向の変位はいずれも $b=5\times10^{-3}$[mm]であり，正方形の一辺の長さに対し十分小さいものである．n-t 座標系は x-y 座標系を反時計回りに 45°回転した座標系である．弾性体の材料定数を縦弾性係数 E，横弾性係数 G，ポアソン比 $\nu=0.3$ とし，以下の設問に答えよ．

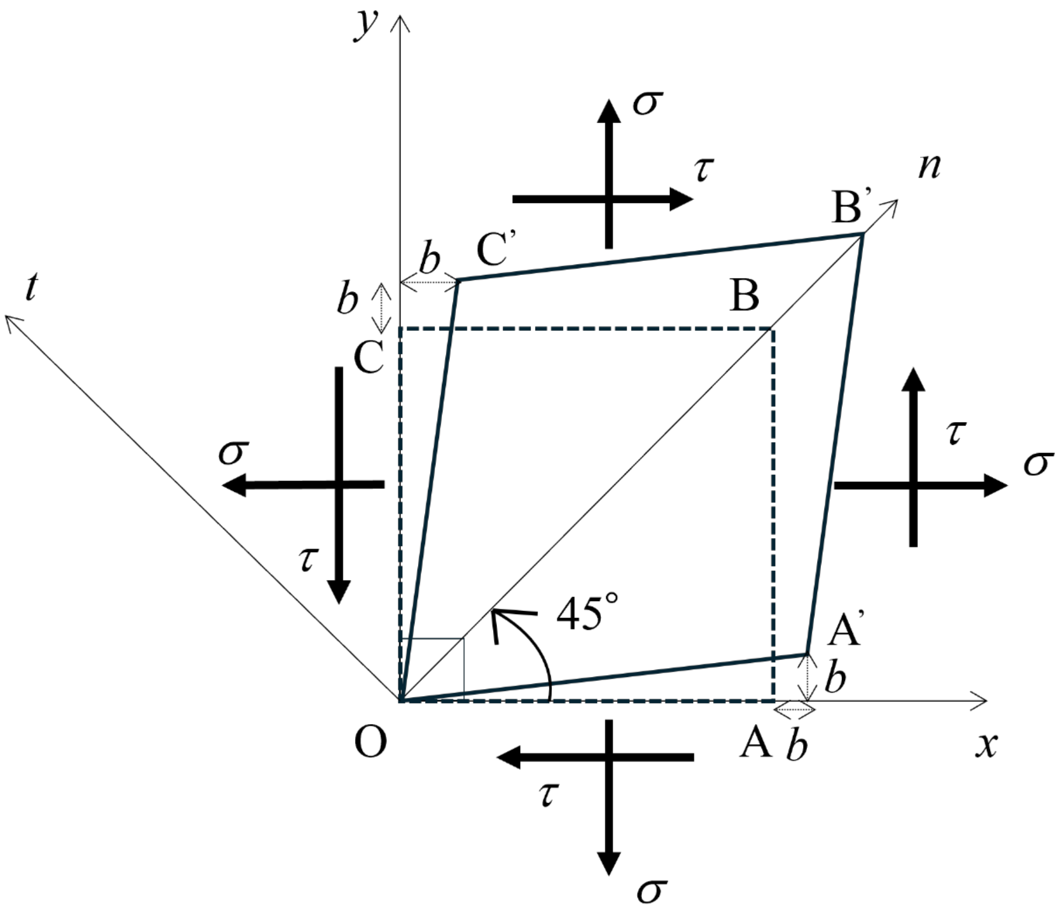

Fig.1 平面応力状態にある弾性体

(1) x 方向の垂直ひずみ ε_x，y 方向の垂直ひずみ ε_y，せん断ひずみ γ_{xy} を求め，μ を含む形式で表せ．ただし，μ は 10^{-6} を表す．

(2) x-y 座標系のひずみテンソルを求め，モールのひずみ円を描き，中心と半径を μ を含む形式で明記せよ．

(3) 点 B(a,a)が変形後に点 B’($a+2b,a+2b$)になったとして，n 方向の垂直ひずみ ε_n を求め，μ を含む形式で表せ．

(4) n-t 座標系におけるひずみテンソルを求め，μ を含む形式で表せ．

(5) x-y 座標系における応力テンソルからモールの応力円を描き，中心と半径を明記せよ．さらに，n-t 座標系における応力テンソルを求めよ．ただし，M を含む形式で表すこと．M は 10^6 を表す．

(6) 平面応力状態下の応力-ひずみの関係式に対して，求めたひずみと，で求めた応力を適用することで，弾性体の縦弾性係数 E,横弾性係数 G を求めよ．ただし，G を含む形式で表すこと．G は 10^9 を表す．

(1)　x 方向の垂直ひずみ ε_x，y 方向の垂直ひずみ ε_y，せん断ひずみ γ_{xy} を求め，μ を含む形式で表せ．ただし，μ は 10^{-6} を表す．

x,y 方向それぞれの垂直ひずみについてはひずみの定義を用いることで，それぞれ求めることができる．以下に式を示す．

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{OA}' - \mathrm{OA}}{\mathrm{OA}} = \frac{5\times10^{-3}}{50} = 100\mu$$

$$\varepsilon_y = \frac{\mathrm{OC}' - \mathrm{OC}}{\mathrm{OC}} = \frac{5\times10^{-3}}{50} = 100\mu$$

またせん断ひずみについても変位が正方形の一辺の長さに比べ十分に小さいことから，点 A の *y* 方向の変位と点 B の *x* 方向の変位をそれぞれ正方形 OABC の一辺の長さで割った値を足せばよい．以下に式を示す．

$$\gamma_{xy} = \frac{b}{a} + \frac{b}{a} = \frac{5\times10^{-3}}{50} + \frac{5\times10^{-3}}{50} = 200\mu$$

(2)　(1)の結果を用いて，*x-y* 座標系のひずみテンソルを求め，モールのひずみ円を描き，中心と半径を明記せよ．

(1)の結果から，ひずみテンソルは以下のように求めることができる．

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix}\mu$$

したがって *x-y* 座標系におけるモールのひずみ円は以下のように描くことができる．

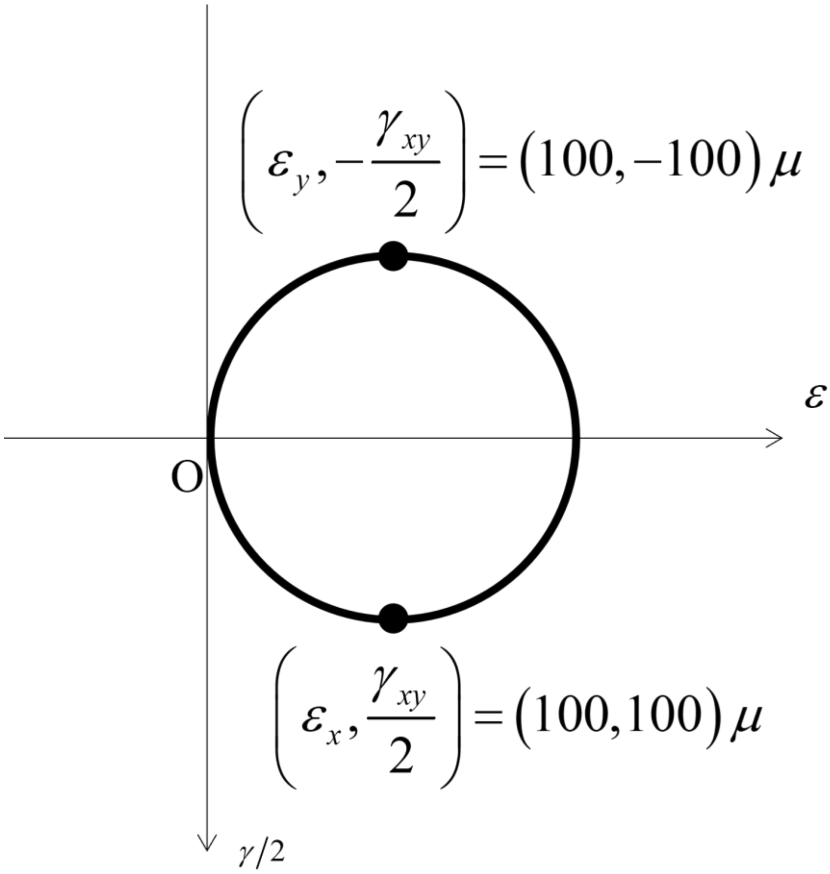

Fig.1.1 *x-y* 座標におけるモールのひずみ円

このモールのひずみ円の中心$\left(\varepsilon_c, 0\right)$と半径 r は以下のように求められる．

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) = 100\mu$$

$$\left(\varepsilon_c, 0\right) = \left(100\mu, 0\right)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}{}^2} = 100\mu$$

(3)　点 B(a,a)が変形後に点 B'(a+2b,a+2b)になったとして，n 方向の垂直ひずみ ε_n を求め，μ を含む形式で表せ．

n 方向の垂直ひずみ ε_n は三平方の定理から線分 OB' と OB の長さをそれぞれ求まるのでひずみの定義を用いればよい．以下に式を示す．

$$\varepsilon_n = \frac{\mathrm{OB}' - \mathrm{OB}}{\mathrm{OB}} = \frac{\sqrt{2}(a+2b) - \sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{2b}{a} = 200\mu$$

(4)　(2)で描いたモールのひずみ円から n-t 座標系におけるひずみテンソルを求め，μ を含む形式で表せ．

今回の問題では n-t 座標系は x-y 座標系を反時計回りに 45°回転したものである．つまり n-t 座標系におけるモールのひずみ円はさきほど求めた x-y 座標系におけるモールのひずみ円を反時計回りに 90°回転させたものとなる．したがって以下の図の通りになる．

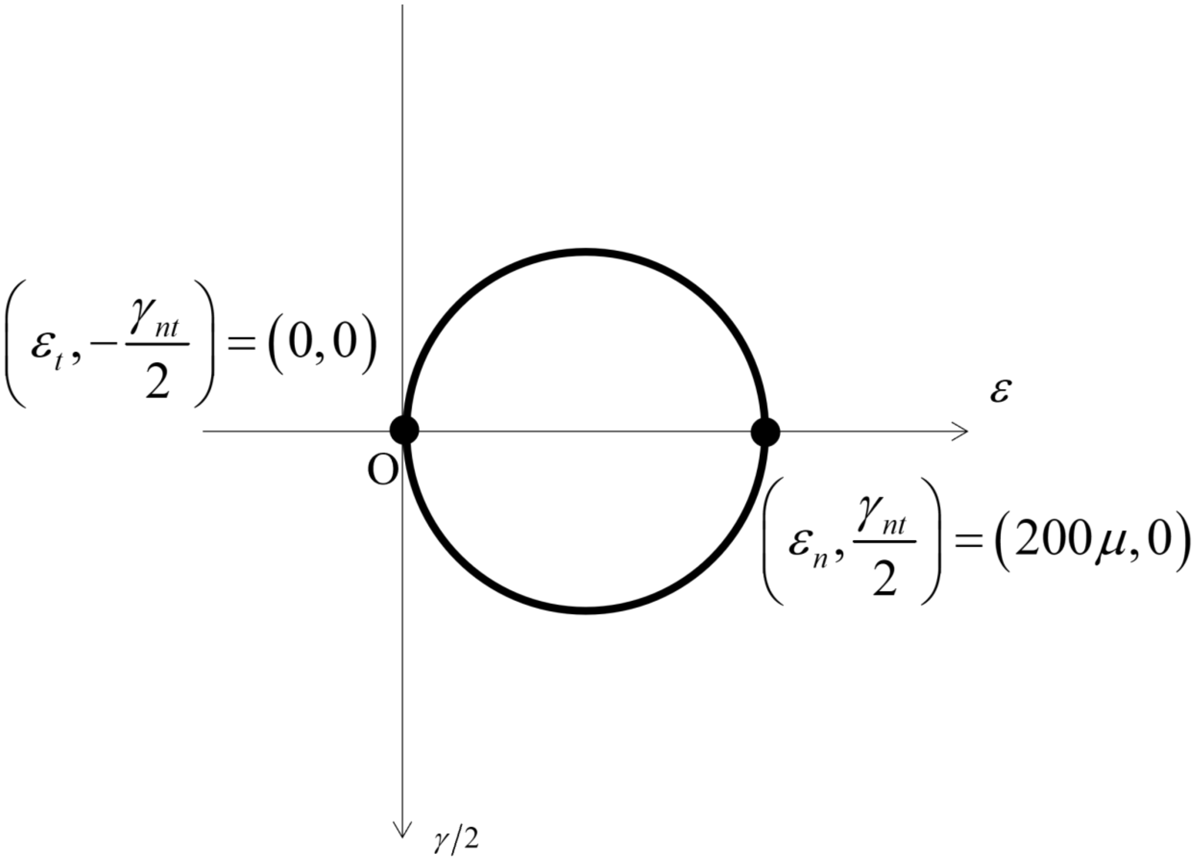

Fig.1.2 n-t 座標系におけるモールのひずみ円

このモールのひずみ円から n-t 座標系におけるひずみテンソルは以下のように求まる．

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_n & \frac{1}{2}\gamma_{nt} \\ \frac{1}{2}\gamma_{nt} & \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この結果は先ほど(3)にて求めた n 方向の垂直ひずみ ε_n の結果と一致している.

(5)　*x-y* 座標系における応力テンソルからモールの応力円を描き，中心と半径を明記せよ．さらに，*n-t* 座標系における応力テンソルを求めよ.

x-y 座標における応力テンソルは問題文の設定から以下のように表すことが可能.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 28 \\ 28 & 52 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

したがってモールの応力円は以下のように描くことができる.

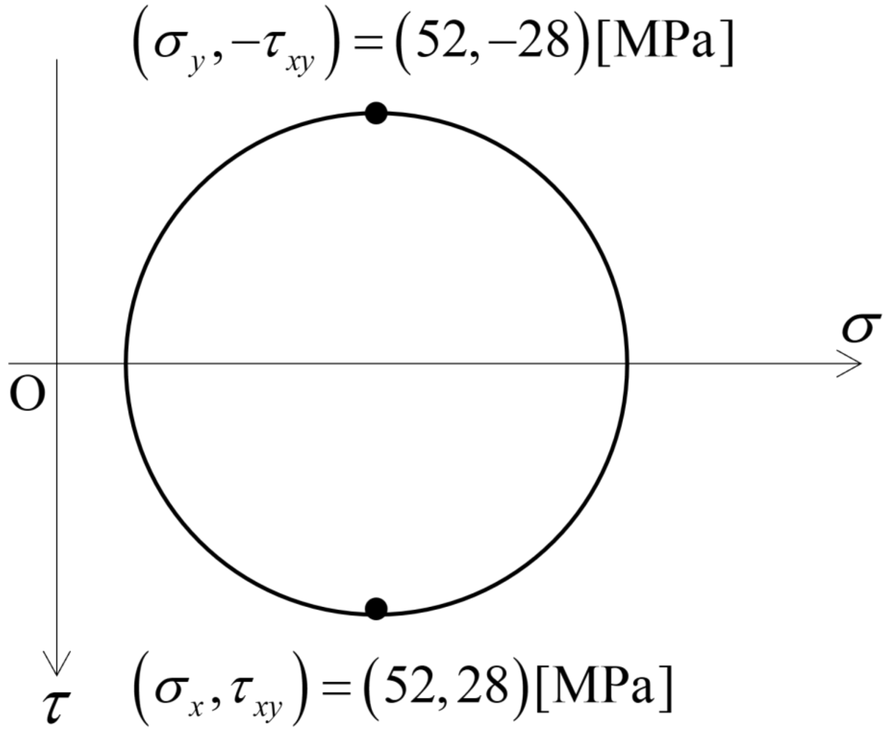

Fig. 1.3 *x-y* 座標におけるモールの応力円

このモールの応力円の中心と半径 r は以下のように求められる.

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = 52[\mathrm{MPa}]$$

$$(\sigma_c, 0) = (52, 0)[\mathrm{MPa}]$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}{}^2} = 26[\mathrm{MPa}]$$

さらに,n-t 座標におけるモールの応力円は反時計回りに 90° 回転させればよいから,以下のように描くことができる.

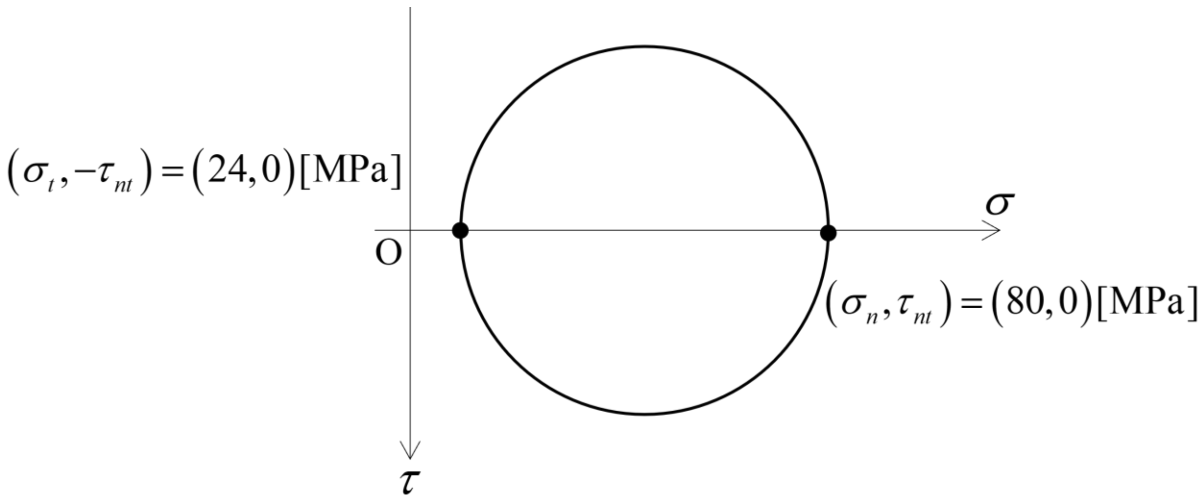

Fig.1.4 *n*-*t* 座標系におけるモールの応力円

よって *n*-*t* 座標系における応力テンソルは以下のように求められる.

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

(6)　平面応力状態下の応力-ひずみの関係式に対して，求めたひずみと，で求めた応力を適用することで，弾性体の縦弾性係数 *E*,横弾性係数 *G* を求めよ.

平面応力状態下の応力-ひずみの関係式は以下の式.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$E = \frac{\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)}{\varepsilon_x} = \frac{\left(52 - 0.3\times 52\right)\times 10^6}{100\times 10^{-6}} = 364[\mathrm{GPa}]$$

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{28\times 10^6}{200\times 10^{-6}} = 140[\mathrm{GPa}]$$

(*y* 方向,*n* 方向のいずれの応力-ひずみの関係式を利用しても同様の結果を得られる．)

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$

$$E = \frac{\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)}{\varepsilon_x} = \frac{\left(52 - 0.3\times 52\right)\times 10^6}{100\times 10^{-6}} = 364[\mathrm{GPa}]$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}\left(\sigma_n - \nu\sigma_t\right)$$

$$E = \frac{\left(\sigma_n - \nu\sigma_t\right)}{\varepsilon_n} = \frac{\left(80 - 0.3\times 24\right)\times 10^6}{200} = 364[\mathrm{GPa}]$$

[2] 以下のように3方向に貼られたひずみゲージがある．各ひずみゲージによる測定値が $(\varepsilon_0,\ \varepsilon_{45},\ \varepsilon_{90}) = (1000\mu,\ 300\mu,\ 200\mu)$，ひずみゲージが張られた板材のヤング率が $E = 182$ [GPa]，ポアソン比が $\nu = 0.3$ であるとき以下の問いに答えよ．なお必要なもの関しては単位を明記すること．

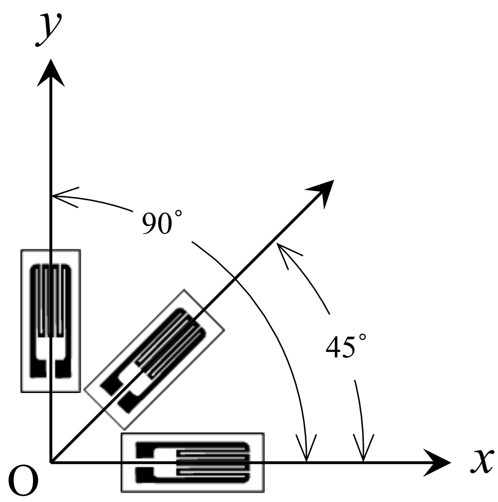

Fig.2 ひずみゲージ

(1) 座標軸の回転を用いて図2の状態のせん断ひずみを求めよ．

(2) モールのひずみ円を描き，中心と半径を求めよ．

(3) 主ひずみ $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ と主ひずみ方向 $(\theta_1,\ \theta_2)$ を求めよ．ただし $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，$\theta_1 < \theta_2$ とし，主ひずみ方向は $-90° \leq \theta_1, \theta_2 \leq 90°$ の範囲で小数第1位まで答えよ．

(4) 主応力 $(\sigma_1,\ \sigma_2)$ を求めよ．ただし $\sigma_1 > \sigma_2$ とする．

(5) この時のモールの応力円を描き，最大せん断応力 τ_{max} を求めよ．

(1) 座標軸の回転を用いて図 2 の状態のせん断ひずみを求めよ.

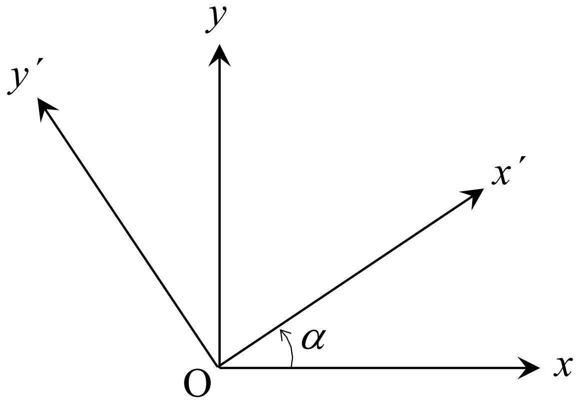

Fig. 2.1 座標系の回転

角度 α だけ回転させた座標系を考えると，回転後の座標系におけるひずみは

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha \tag{2.1}$$

となる．今，$\alpha = 45°$，$\varepsilon_x' = \varepsilon_{45}$，$\varepsilon_x = \varepsilon_0$，$\varepsilon_y = \varepsilon_{90}$なので，

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{45} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}) \\ &= -600\mu\end{aligned} \tag{2.2}$$

(2) モールのひずみ円を描き，中心と半径を求めよ

(1)よりひずみテンソルは

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 & -300 \\ -300 & 200 \end{pmatrix}\mu \tag{2.3}$$

となるので，モールのひずみ円は以下のようになる.

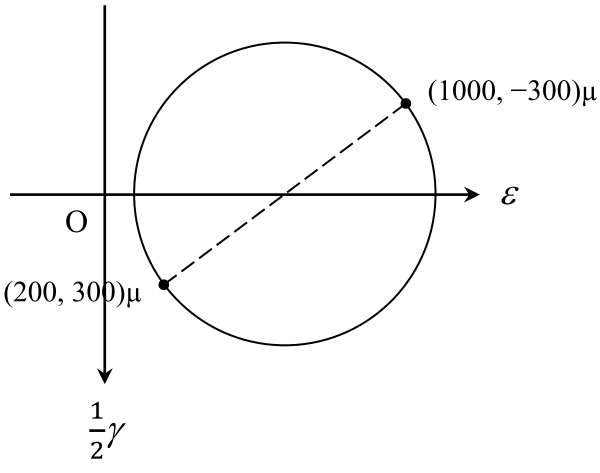

Fig. 2.2 モールのひずみ円

中心の座標と半径について

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) = \frac{1}{2}(1000 + 200)\mu = 600\mu \tag{2.4}$$

$$r = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_c)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} = \sqrt{(400\mu)^2 + (-300\mu)^2} = 500\mu \tag{2.5}$$

よって中心の座標は $(600\mu,\ 0)$ 、半径は 500μ である。

(3) **主ひずみ $(\boldsymbol{\varepsilon_1},\ \boldsymbol{\varepsilon_2})$ と主ひずみ方向 $(\boldsymbol{\theta_1},\ \boldsymbol{\theta_2})$ を求めよ．ただし $\boldsymbol{\varepsilon_1 > \varepsilon_2}$，$\boldsymbol{\theta_1 < \theta_2}$ とし，主ひずみ方向は $\boldsymbol{-90° \leq \theta_1, \theta_2 \leq 90°}$ の範囲で小数第 1 位まで答えよ．**

前問で求めたモールのひずみ円において、中心の座標と半径から主ひずみは

$$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) = (1100,\ 100)\mu \tag{2.6}$$

主ひずみ方向はモールのひずみ円から以下のように求められる．

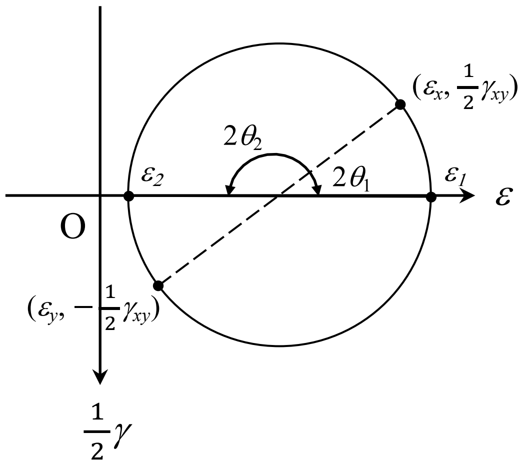

Fig. 2.3 主ひずみ方向

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{1}{2}\tan^{-1} - \frac{3}{4} = -18.4° \tag{2.7}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 90° = 71.6° \tag{2.8}$$

(4) **主応力 $(\boldsymbol{\sigma_1},\ \boldsymbol{\sigma_2})$ を求めよ．ただし $\boldsymbol{\sigma_1 > \sigma_2}$ とする．**

応力とひずみの関係式より，

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \tag{2.9}$$

$$= \frac{182}{1 - 0.3^2}(1100 + 0.3 \times 100)\mu$$

$$= 226\ [\mathrm{MPa}]$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \tag{2.10}$$

$$= \frac{182}{1-0.3^2}(100 + 0.3 \times 1100)\mu$$

$$= 86 \text{ [MPa]}$$

よって主応力は

$$(\sigma_1,\ \sigma_2) = (226,\ 86) \text{ [MPa]} \tag{2.11}$$

(5) この時のモールの応力円を描き，最大せん断応力 $\boldsymbol{\tau_{max}}$ を求めよ．

(4)で求めた主応力から，モールの応力円は Fig. 2.4 のようになる．

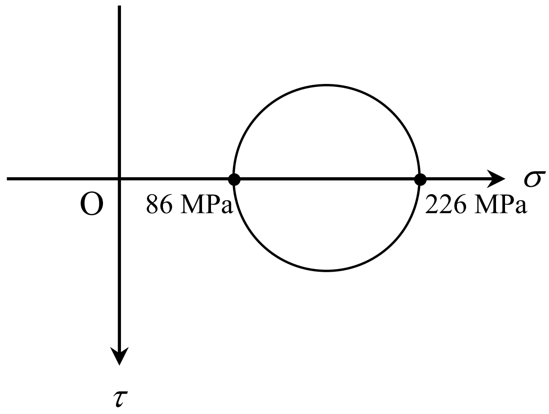

Fig. 2.4 モールの応力円

中心の座標と半径について

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{2.12}$$

$$= \frac{1}{2}(226 + 86)$$

$$= 156 \text{ [MPa]}$$

$$r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{2.13}$$

$$= \frac{1}{2}(226 - 86)$$

$$= 70 \text{ [MPa]}$$

以上より最大せん断応力はモールの応力円の半径と等しくなるので

$$\tau_{max} = 70 \text{ [MPa]}$$