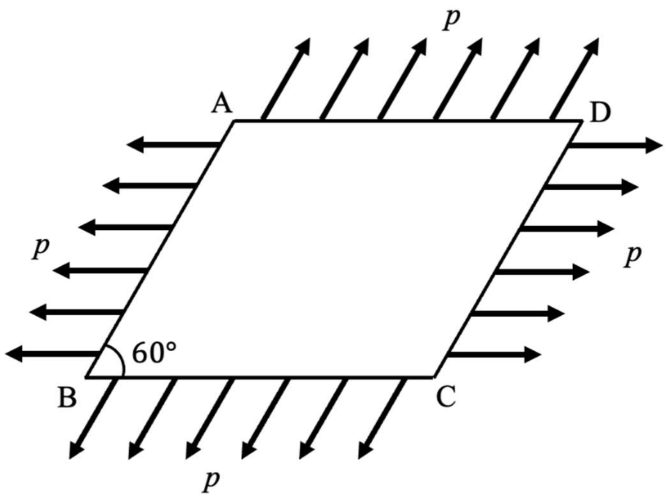
材料の力学 1　第 5 回演習問題（2025/5/19 実施）

[1]　図 1 に示すような平行四辺形の弾性体 ABCD に，$p = 10\sqrt{3}$ [MPa]の引張応力が x 方向および t 方向に一様に作用している．ただし，弾性体の板厚は十分薄いものとする．



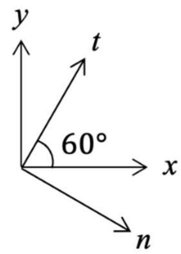


Fig. 1 弾性体 ABCD の応力状態

(1) x-y 座標系からみた AD 面の垂直応力σ_y，せん断応力τ_{xy}を求めよ．同様に，n-t 座標系からみた CD 面の垂直応力σ_n，せん断応力τ_{nt}を求めよ．

(2) 応力の座標変換を行い，σ_xを求めよ． ただし，座標変換の式は以下に示す通りである．

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta\cos\theta$$

(3) x-y 座標における応力テンソルを求めよ．さらに，それをもとにモールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．なお，主応力σ_1, σ_2，およびそれぞれの主方向θ_1, θ_2を図中に明記すること．ただし，$\sigma_1 > \sigma_2$．主方向については x-y 座標を基準，反時計回りを正とし，$-90° \leq \theta_1, \theta_2 \leq 90°$とする．

(4) 主応力σ_1, σ_2，およびそれぞれの主方向θ_1, θ_2を求めよ．

(5) 主応力σ_3を用いて三次元のモールの応力円を描き，最大せん断応力τ_{max}を求めよ．（ただし，板厚方向の主応力に注意すること.）

(1) *x-y* 座標系からみた AD 面の垂直応力$\boldsymbol{\sigma_y}$，せん断応力$\boldsymbol{\tau_{xy}}$を求めよ．同様に，*n-t* 座標系からみた CD 面の垂直応力$\boldsymbol{\sigma_n}$，せん断応力$\boldsymbol{\tau_{nt}}$を求めよ．

まず，AD 平面に作用する応力ベクトル p を図 1.1 のように分解する．$p = 10\sqrt{3}$より，垂直応力σ_y，せん断応力τ_{xy}は以下のように求まる．

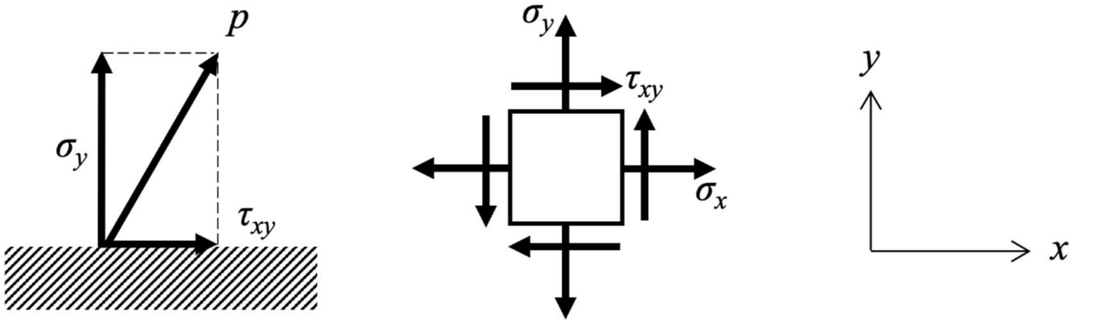


Fig. 1.1 AD 面の応力ベクトル

$$\begin{cases} \sigma_y = 10\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 15 \\ \tau_{xy} = 10\sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} = 5\sqrt{3} \end{cases} \quad [\mathrm{MPa}] \tag{1.1}$$

x-y 座標系から時計回りに30°回転した座標系を *n-t* 座標系とすると，応力ベクトル p は図 1.2 のように分解できる．よって，垂直応力σ_n，せん断応力τ_{nt}は以下のように求まる．

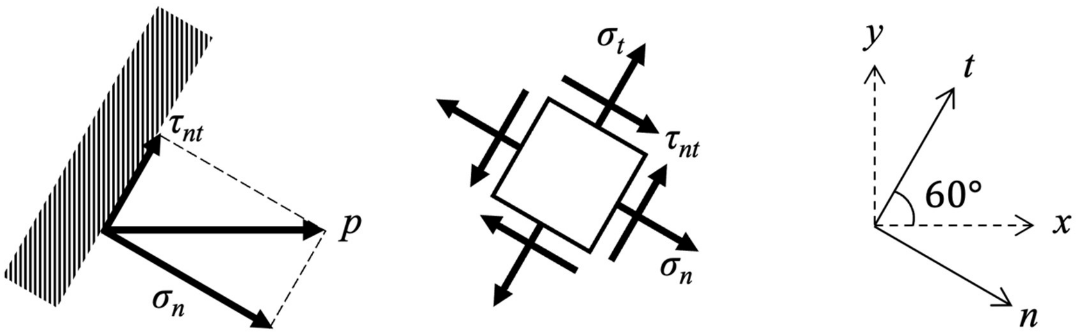


Fig. 1.2 CD 面の応力ベクトル

$$\begin{cases} \sigma_n = 10\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 15 \\ \tau_{nt} = 10\sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} = 5\sqrt{3} \end{cases} \quad [\mathrm{MPa}] \tag{1.2}$$

(2) 応力の座標変換を行い，$\boldsymbol{\sigma_x}$を求めよ． ただし，座標変換の式は以下に示す通りである．

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta\cos\theta \tag{1.3}$$

式(1.3)に式(1.1)および式(1.2)を代入し，$\theta = -30°$を代入すると，以下のようにσ_xが求まる．

$$\sigma_x = 25 \quad \text{[MPa]} \tag{1.4}$$

(3) ***x-y*** 座標における応力テンソルを求めよ．さらに，それをもとにモールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．なお，主応力$\boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}$，およびそれぞれの主方向$\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{\theta_2}$を図中に明記すること．ただし，$\boldsymbol{\sigma_1 > \sigma_2}$．主方向については ***x-y*** 座標を基準，反時計回りを正とし，$\boldsymbol{-90° \le \theta_1, \theta_2 \le 90°}$とする．

式(1.1)および式(1.4)より，*x-y* 座標系における応力テンソルは以下のようになる．

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 15 \end{bmatrix} \quad \text{[MPa]} \tag{1.5}$$

したがって，モールの応力円を図示すると以下のようになる．

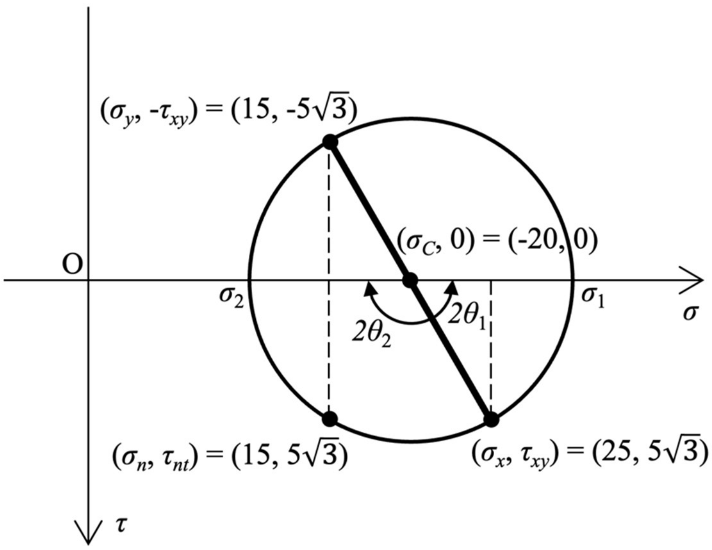


Fig. 1.3 モールの応力円

モールの応力円の中心σ_Cおよび半径rは以下のように求められる．

$$\sigma_C = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 20 \quad \text{[MPa]} \tag{1.6}$$

$$\left(\sigma_C, 0\right) = \left(20, 0\right) \quad \text{[MPa]} \tag{1.7}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}{}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 4 \cdot 75} = 10 \quad \text{[MPa]} \tag{1.8}$$

(4) 主応力$\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2}$，およびそれぞれの主方向$\boldsymbol{\theta_1, \theta_2}$を求めよ．

モールの応力円より，主応力σ_1, σ_2は以下のように求められる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_C + r \\ \sigma_C - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{[MPa]} \tag{1.9}$$

また，主方向の角度条件に注意して，主方向θ_1, θ_2は以下のように求められる．

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) \tag{1.10}$$

$$\theta_1 = 30°, \quad \theta_2 = -60° \tag{1.11}$$

ここで，式(1.10)で先に$\theta_1 = 30°$と求めてから，2 つの主方向が直行することを利用してθ_1を求めることもできる．

$$\theta_2 = \theta_1 - 90 = -60° \tag{1.12}$$

(5) 主応力$\boldsymbol{\sigma_3}$を用いて三次元のモールの応力円を描き，最大せん断応力$\boldsymbol{\tau_{max}}$を求めよ．（ただし，板厚方向の主応力に注意すること．）

弾性体 ABCD の板厚は十分薄いため，*x-y* 平面の平面応力状態とみなすことができ，板厚方向の主応力は$\sigma_3 = 0$となる．

主応力$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$を三次元のモールの応力円として描くと以下のようになる．

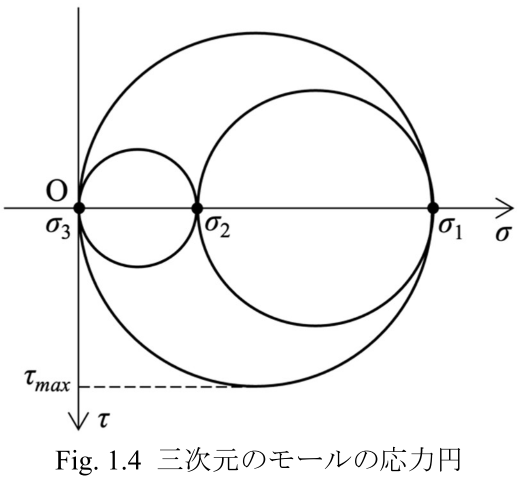


Fig. 1.4 三次元のモールの応力円

以上より，σ_1が最大主応力となり，*z* 方向の主応力σ_3が最小主応力となることがわかる．よって，最大せん断応力τ_{max}は以下のように求められる．

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right| = 15 \quad \text{[MPa]} \tag{1.13}$$

[2]図 2 のように両端が固定されたテーパー付きの丸棒について考える．丸棒の長さは $2L$ で，$x=L$ に軸方向荷重 P が作用している．丸棒の半径は左端で $2r$，右端で r であり，断面積は軸方向に線形に変化しているものとする．丸棒のヤング率を E として，以下の問いに答えよ．ただし，解答に用いる記号は特に指示がない限り，問題文中に与えられたもの（E, L, P, r）に限る．

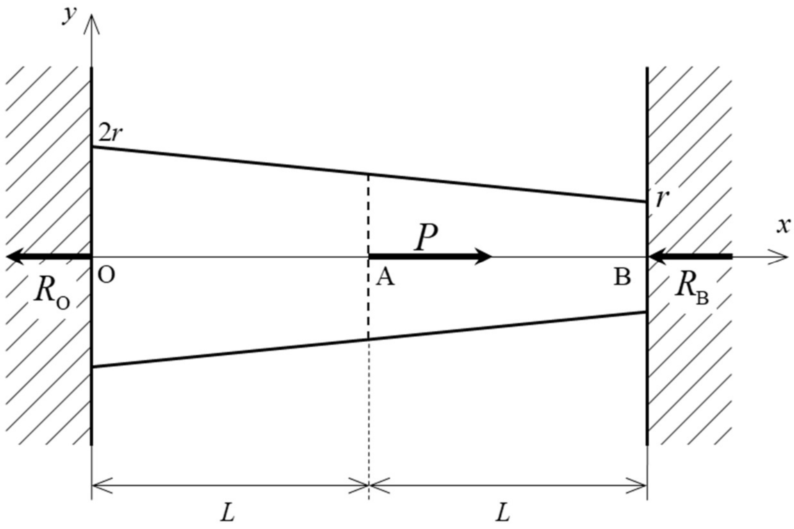


Fig.2

(1) 位置 x における断面積 $A(x)$ を求めよ．

(2) R_O を用いて，位置 x における軸力 $N(x)$ を求めよ．

(3) R_O を用いて，位置 x における垂直応力 $\sigma(x)$ を求めよ．

(4) 壁からの反力 R_O および R_B を求めよ．

(5) 以上を踏まえ，x と $\sigma(x)$ の関係をグラフで示せ．
図中には，$x=0, L, 2L$ を代入した $\sigma(x)$ の値を明記すること．

(1) 位置 x における断面積 $A(x)$ を求めよ．

位置 x における丸棒の半径 $r(x)$ は，

$$r(x) = \left(2 - \frac{x}{2L}\right) r \tag{2.1}$$

よって，位置 x における断面積 $A(x)$ は，

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi r(x)^2 \\ &= \pi \left(2 - \frac{x}{2L}\right)^2 r^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2) R_{O} を用いて，位置 x における軸力 $N(x)$ を求めよ．

$0 \le x \le L$ のとき，位置 x における仮想断面を考え，力のつり合いから軸力を求める．

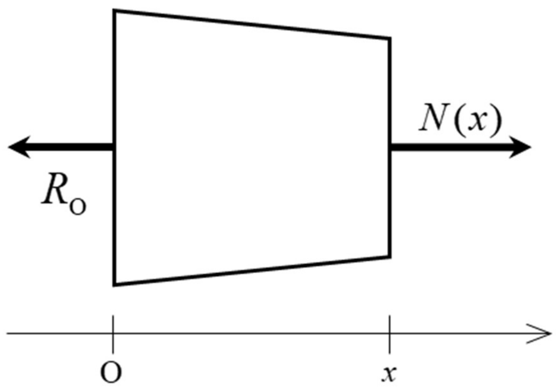


Fig 2.1 FBD

図 2.1 より，力のつり合い式は次式のようになる．

$$-R_{\mathrm{O}} + N(x) = 0 \tag{2.3}$$

$$N(x) = R_{\mathrm{O}} \tag{2.4}$$

つぎに，$L \le x \le 2L$ のときも同様に考える．

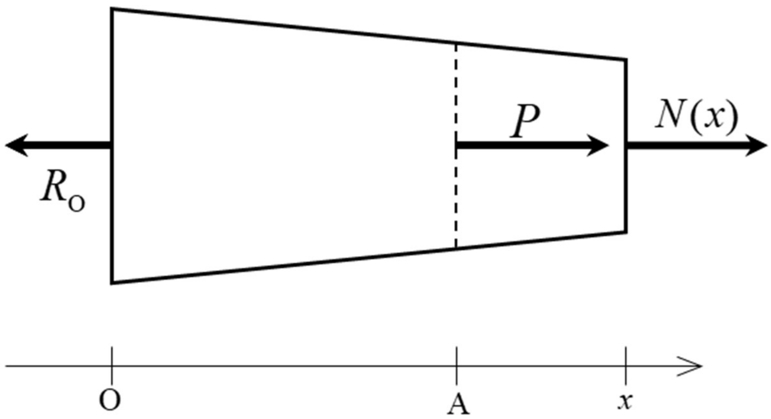


Fig 2.2 FBD

図 2.2 より，力のつり合いは次式のようになる．

$$-R_{\mathrm{O}} + P + N(x) = 0 \tag{2.5}$$

$$N(x) = R_{\mathrm{O}} - P \tag{2.6}$$

以上をまとめると，

$$N(x) = \begin{cases} R_{\mathrm{O}} & (0 \le x \le L) \\ R_{\mathrm{O}} - P & (L \le x \le 2L) \end{cases} \tag{2.7}$$

(3) R_{O} を用いて，位置 x における垂直応力 $\sigma(x)$ を求めよ．

垂直応力 $\sigma(x)$ は，軸力 $N(x)$ を断面積 $A(x)$ で割ったものなので，

$$\sigma(x)=\frac{N(x)}{A(x)} = \begin{cases} \dfrac{R_{\mathrm{O}}}{\pi\left(2-\dfrac{x}{2L}\right)^2 r^2} & (0\le x\le L) \\ \dfrac{R_{\mathrm{O}}-P}{\pi\left(2-\dfrac{x}{2L}\right)^2 r^2} & (L\le x\le 2L) \end{cases} \tag{2.8}$$

(4) 壁からの反力 R_{A} および R_{C} を求めよ．

両端固定であることから全体の伸びは 0 である．

全体の伸びを計算すると

$$\int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)}dx+\int_L^{2L}\frac{N(x)}{EA(x)}dx=0 \tag{2.9}$$

$$\int_0^L \frac{R_{\mathrm{O}}}{\pi\left(2-\dfrac{x}{2L}\right)^2 r^2}dx+\int_L^{2L}\frac{R_{\mathrm{O}}-P}{\pi\left(2-\dfrac{x}{2L}\right)^2 r^2}dx=0 \tag{2.10}$$

ここで，以下のように変数変換をする．

$$u=2-\frac{x}{2L} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered} du=-\frac{1}{2L}dx \\ dx=-2L\,du \end{gathered} \tag{2.12}$$

Table 2.1　x と u の対応

x	0	L	$2L$
u	2	$\dfrac{3}{2}$	1

式(2.10)は次のように書き換えることができる.

$$-\int_{2}^{3/2} \frac{R_{\mathrm{O}}}{\pi r^2 u^2} 2L du - \int_{3/2}^{1} \frac{R_{\mathrm{O}} - P}{\pi r^2 u^2} 2L du = 0 \tag{2.13}$$

式(2.13)を整理すると,

$$\begin{gathered} \frac{1}{6} R_{\mathrm{O}} - \frac{1}{2}\left(R_{\mathrm{O}} - P\right) = 0 \\ \therefore R_{\mathrm{O}} = \frac{2}{3} P \end{gathered} \tag{2.14}$$

丸棒全体のつり合い式の式より,

$$\begin{aligned} & -R_{\mathrm{O}} + P - R_{\mathrm{B}} = 0 \\ & \therefore R_{\mathrm{B}} = \frac{1}{3} P \end{aligned} \tag{2.15}$$

(5) 以上を踏まえ，x と $\sigma(x)$ の関係をグラフで示せ.

図中には，$x=0, L, 2L$ を代入した $\sigma(x)$ の値を明記すること.

(3)および(4)より，垂直応力 $\sigma(x)$ は式(2.16)で表される.

$$\sigma(x)=\begin{cases} \dfrac{2P}{3\pi\left(2-\dfrac{x}{2L}\right)^2 r^2} & (0 \le x \le L) \\ -\dfrac{P}{3\pi\left(2-\dfrac{x}{2L}\right)^2 r^2} & (L \le x \le 2L) \end{cases} \tag{2.16}$$

これを図示すると図 2.3 のようになる.

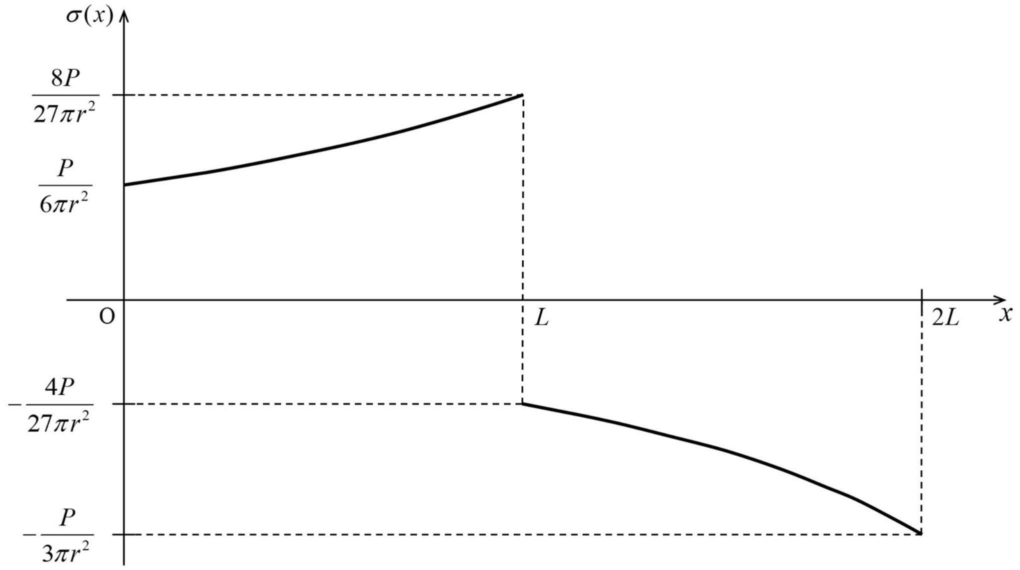


Fig 2.3 垂直応力の軸方向変化（概略図）