材料の力学 第 4 回演習問題（2025/5/12）

[1]　微小弾性体のある一点の応力を図 1 の微小三角形 OAB に示す．このとき以下の問いに答えよ．ただしこの三角形は平面応力状態にあり，$0° \leq \theta \leq 90°$とする．AB の長さを L，z 軸方向厚さを単位長さとする．

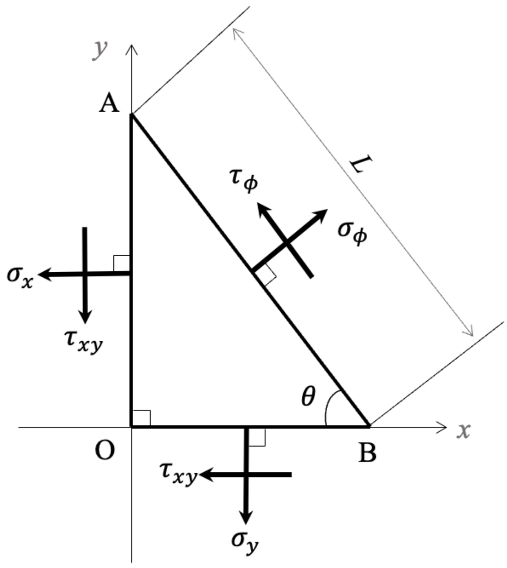


Fig. 1　微小弾性体の応力状態

(1)　微小三角形の斜辺 AB に垂直な方向と平行な方向についてそれぞれ力のつり合い式を立てることにより，σ_ϕ，τ_ϕ をそれぞれ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, 2\theta$ を用いて表せ．

(2) (1)で求めたσ_ϕ，τ_ϕ を表す 2 式より θ を消去して，モールの応力円を表す以下の式を導出せよ．

$$\frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}{}^2$$

(3) $\sigma_x = 7\sigma$，$\sigma_y = \sigma$，$\tau_{xy} = 4\sigma$ のとき，応力テンソル $[\sigma]$ を求め，図 1 におけるモールの応力円をσ-τ平面上に描け．

(4) (3)で描いたモールの応力円を用いて，主応力(σ_1，σ_2)，主方向(ϕ_1，ϕ_2)を求めよ．ただし，$\sigma_1 > \sigma_2$，$\phi_1 < \phi_2$ とし，主方向は度数法で表記せよ．

※ϕ は微小三角形 OAB の角 OAB の大きさを表す．

(1) 微小三角形の斜辺 AB に垂直な方向と平行な方向についてそれぞれ力のつり合い式を立てることにより，σ_ϕ，τ_ϕ をそれぞれ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, 2\theta$ を用いて表せ.

各方向の力の向きに注意して立式すると，斜辺に垂直な方向の力のつり合い式および平行な方向の力のつり合い式は以下のようになる.

(垂直方向)

$$\begin{aligned} &\sigma_\phi L-\left(\sigma_x \sin\theta\right)(L\sin\theta)-\left(\tau_{xy}\cos\theta\right)(L\sin\theta) \\ &-\left(\sigma_y \cos\theta\right)(L\cos\theta)-\left(\tau_{xy}\sin\theta\right)(L\cos\theta)=0 \\ \Leftrightarrow\ &\sigma_\phi-\sigma_x\sin^2\theta-\sigma_y\cos^2\theta-2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta=0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

(平行方向)

$$\begin{aligned} &\tau_\phi L+\left(\sigma_x \cos\theta\right)(L\sin\theta)-\left(\tau_{xy}\sin\theta\right)(L\sin\theta) \\ &-\left(\sigma_y \sin\theta\right)(L\cos\theta)+\left(\tau_{xy}\cos\theta\right)(L\cos\theta)=0 \\ \Leftrightarrow\ &\tau_\phi+\sigma_x\sin\theta\cos\theta-\tau_{xy}\sin^2\theta-\sigma_y\sin\theta\cos\theta+\tau_{xy}\cos^2\theta=0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

上式をそれぞれ倍角の公式を用いて整理すると，σ_ϕ，τ_ϕ はそれぞれ

$$\sigma_\phi=\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\cos2\theta+\tau_{xy}\sin2\theta \tag{1.3}$$

$$\tau_\phi=-\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sin2\theta-\tau_{xy}\cos2\theta \tag{1.4}$$

と表される.

(2) (1)で求めたσ_ϕ，τ_ϕを表す 2 式より θ を消去して，モールの応力円を表す以下の式を導出せよ.

$$\frac{1}{4}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\tau_{xy}^{\ 2}$$

以下の式にσ_ϕ，τ_ϕ を代入することにより，(1.3)式および(1.4)式からθ を消去する.

$$\left(\sigma_\phi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_\phi \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_\phi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_\phi \\
&= \left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right\}^2 \\
&\quad + \left\{-\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta\right\}^2 \\
&= \left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right\}^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2\cos^2 2\theta - \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\tau_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta + \tau_{xy}{}^2\sin^2 2\theta \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2\sin^2 2\theta + \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\tau_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta + \tau_{xy}{}^2\cos^2 2\theta \\
&= \frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}{}^2
\end{aligned} \tag{1.6}$$

(3) $\sigma_x = 7\sigma$，$\sigma_y = \sigma$，$\tau_{xy} = 4\sigma$ のとき，応力テンソル［σ］を求め，図 1 におけるモールの応力円をσ-τ平面上に描け．

本問は平面応力状態であるから，板厚方向の荷重は 0 である．従って応力テンソルに各値を代入することにより，応力テンソルは以下のようになる．

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\sigma & 4\sigma \\ 4\sigma & \sigma \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

また，モールの応力円は以下のようになる．

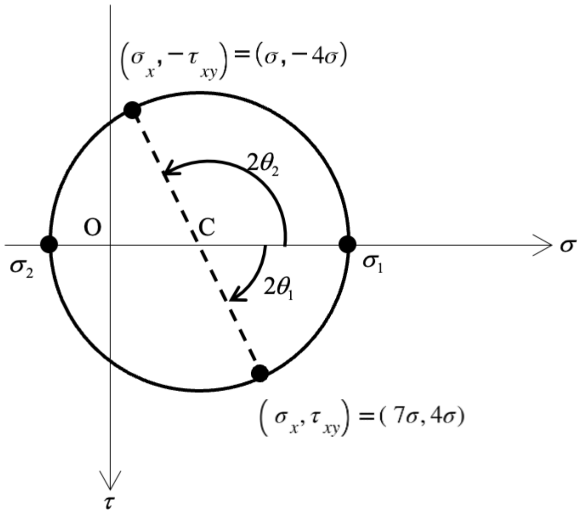


Fig.1.1 モールの応力円

(4) (3)で描いたモールの応力円を用いて，主応力(σ_1，σ_2)，主方向(ϕ_1，ϕ_2)を求めよ．ただし，$\sigma_1>\sigma_2$，$\theta_1<\theta_2$とする．

主応力は，モールの応力円と軸との交点であるから，モールの応力円の中心の σ 座標及び半径を求めることで，2 つの主応力が得られる．

図 1.1 に描いたモールの応力円において，中心の σ 座標は

$$\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 4\sigma \tag{1.8}$$

また，半径 r は

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^{\ 2}} = 5\sigma \tag{1.9}$$

以上より，主応力 σ_1，σ_2 は

$$\sigma_1 = \sigma_c + r = 9\sigma \tag{1.10}$$

$$\sigma_2 = \sigma_c - r = -\sigma \tag{1.11}$$

と導かれる．

主方向(ϕ_1，ϕ_2)については，図 1.1 のモールの応力円より

$$\tan 2\phi_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{4}{3} \tag{1.12}$$

であることから，これを計算して

$$\phi_1 \approx 26.6^\circ \tag{1.13}$$

また,

$$\phi_2 = 90^\circ - \phi_1 \approx 63.4^\circ \tag{1.14}$$

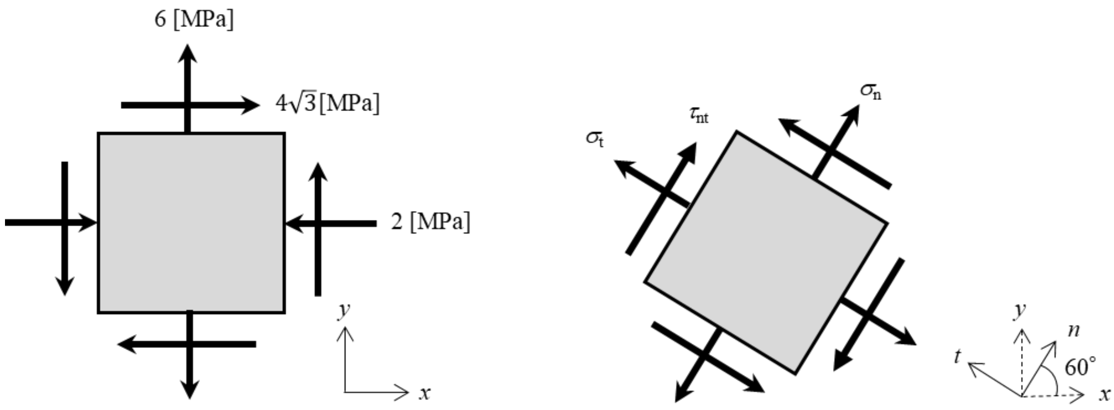
より, θ_1, θ_2 は,

$$\phi_1 \approx 26.6^\circ \quad (\text{反時計回り}) \tag{1.15}$$

$$\phi_2 \approx 63.4^\circ \quad (\text{時計回り}) \tag{1.16}$$

と求められる,

[2] 図 2 は板厚が十分に薄い弾性体のある点における応力状態を示したものである．図 2(b)は，図 2(a)を反時計回りに 60°回転した状態を図示したものである．このとき，以下の設問に答えよ．**解答には単位を明記すること．**



(a) (b)

Fig. 2 弾性体のある点における応力状態

(1) 図 2(a)のような応力状態における *x*-*y* 座標系の応力テンソルを求めよ．

図 2(b)の *n*-*t* 座標系における応力テンソルを求める．

<モールの応力円を用いた解法>

(2) 図 2(a)の状態におけるモールの応力円を描き，中心と半径を求めよ．モールの応力円には *x*-*y* 座標系における応力テンソルの座標も明記すること．

(3) 回転後の図 2(b)のモールの応力円を描き，*n*-*t* 座標系における応力テンソルを求めよ．作図の際は図 2(a)の状態から回転させたことがわかるように描くこと．

<座標変換マトリックスを用いた解法>

(4) 図 2(a)について以下に示す座標変換マトリックスを用いて座標変換を行うことで，図 2(b)の *n*-*t* 座標系における応力テンソルを求めよ．ただし途中計算も書くこと．

※座標変換マトリックス： $[L] = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ， $[\sigma'] = [L][\sigma][L^{-1}]$

(1) 図 2(a)のような応力状態における *x-y* 座標系の応力テンソルを求めよ．

図 2(a) における応力テンソルは以下の式(2.1)のように表すことができる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}] \tag{2.1}$$

(2) 図 2(a)の状態におけるモールの応力円を描き，中心と半径を求めよ．モールの応力円には *x-y* 座標系における応力テンソルの座標も明記すること．

式(2.1)より，モールの応力円は以下の図 2.1(a)のように描くことができる．

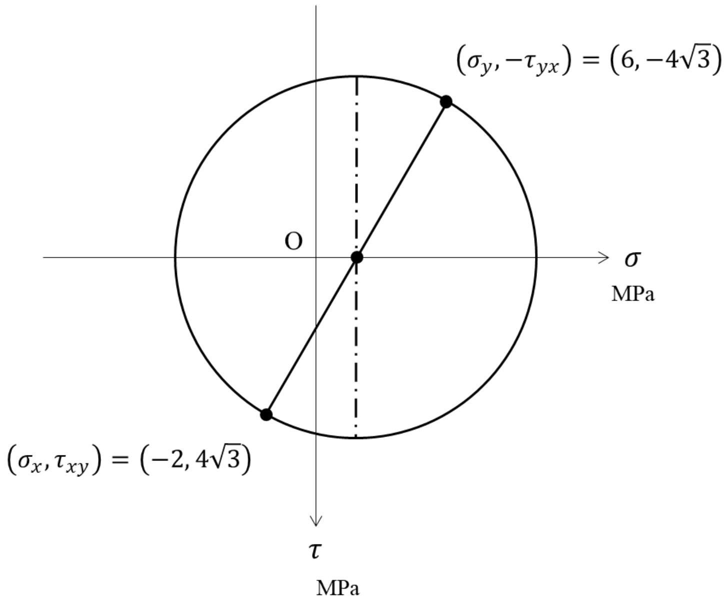


Fig. 2.1 (a)のモールの応力円

中心と半径は以下の式(2.2)，式(2.3)のように求めることができる．

中心

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(-2+6) = 2 \tag{2.2}$$

$$\therefore (\sigma_c, 0) = (2,0)[\mathrm{MPa}]$$

半径

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2 + 4 \times (4\sqrt{3})^2} \\ &= 8 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\therefore r = 8[\mathrm{MPa}]$$

(3) 回転後の図 2(b)のモールの応力円を描き，*n-t* 座標系における応力テンソルを求めよ．作図の際は図 2(a)の状態から回転させたことがわかるように描くこと．

図 2(b)を見ると，*n-t* 座標系は *x-y* 座標系を 60°回転させたものだとわかるため，モールの応力円上では 120°回転させればよい．

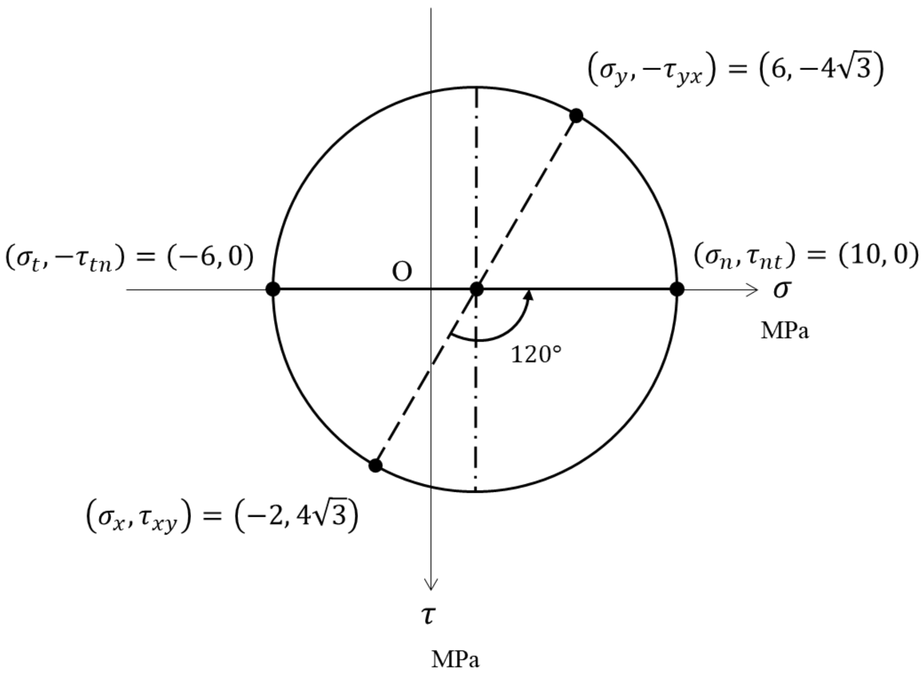


Fig. 2.1 (b)のモールの応力円

よって，図 2(b)における応力テンソルは以下の式(2.4)のように表すことができる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}] \tag{2.4}$$

(4) 図 2(a)について以下に示す座標変換マトリックスを用いて座標変換を行うことで，図 2(b)の *n-t* 座標系における応力テンソルを求めよ．ただし途中計算も書くこと．

図 2(b)を見ると，*n-t* 座標系は *x-y* 座標系を 60°回転させたものだとわかる．そのため，座標変換マトリックスでθ = 60°とすればよい．よって，図 2(b)における応力テンソルは以下の式(2.5)のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
[\sigma'] &= [L][\sigma][L^{-1}] \\
&= \begin{pmatrix} \cos 60° & \sin 60° \\ -\sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \ [\mathrm{MPa}]
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

これより，座標変換によって得られた応力テンソルは，モールの応力円から得られた結果と一致することが分かる．