材料の力学　　第 3 回演習問題（2025/4/28）

[1]　図 1 のように段付き丸棒が点 O で端を壁で固定され，B’B 間に長さ δ の隙間がある．また，AB 間に分布荷重pがx軸正方向に一様に作用している．壁からの反力 R_O を図のように仮定し，以下の問いに答えよ．ただし部材 OA の断面積を $2A$，部材 AB‘の断面積を A，部材のヤング率を E とする．

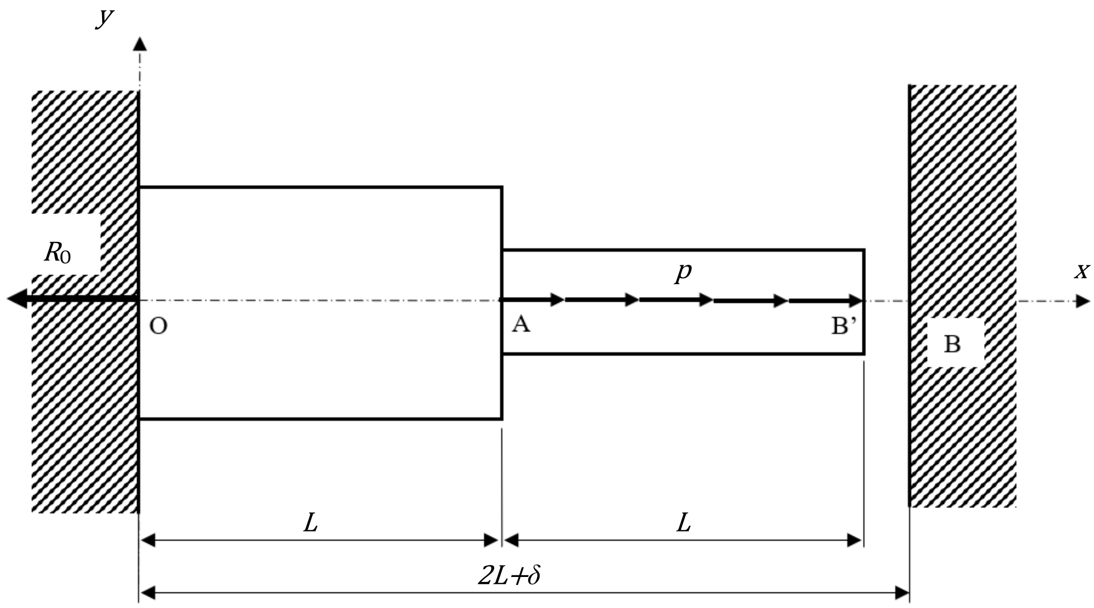


Fig.1　棒状部材.

(1) FBD を描き，つり合い式を求めよ．

(2) 点 B における壁からの反力が 0 となるように点 B と B’が一致している．このときの p を δを用いて求めよ．

(3) (2)の後，点 A から x 軸正方向に一点荷重 P を加えた．その時に棒状部材が右側の壁から受ける反力 R_B をP, p, Lの中から必要なものを用いて求めよ．

(1) FBD を描き，つり合い式を求めよ．

丸棒の FBD を描くと，図 1.1 のようになる．

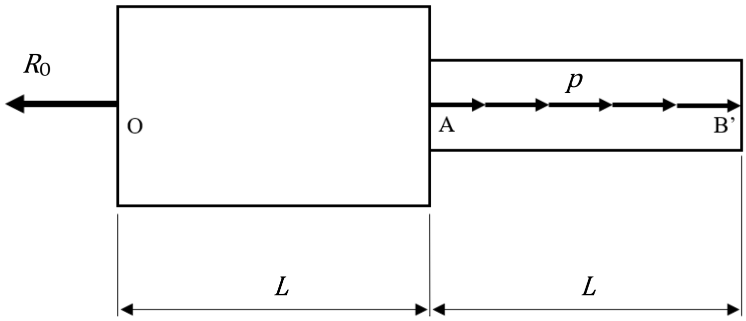


Fig. 1.1　FBD.

力のつり合い式は,

$$-R_O + pL = 0 \tag{1.1}$$

となる．

(2) 点 B における壁からの反力が 0 となるように点 B と B'が一致している．このときの p を δを用いて求めよ．

$0 \le x \le L, L \le x \le 2L$の 2 つの範囲に分けて軸力$N(x)$を求める．

(ｉ) $0 \le x \le L$のとき

FBD は,

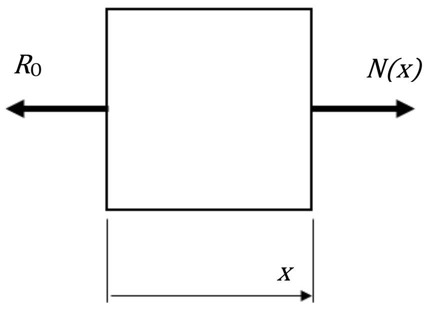


Fig. 1.2　FBD ($0 \le x \le L$).

図 1.2 より，力のつり合い式は,

$$\begin{aligned} -R_O + N(x) &= 0 \\ N(x) &= R_O \end{aligned} \tag{1.2}$$

(ⅱ) $L \leq x \leq 2L$のとき，

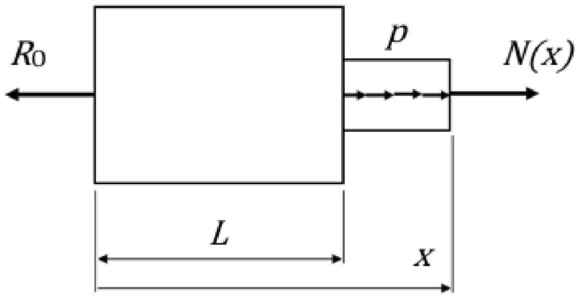


Fig. 1.3　FBD ($L \leq x \leq 2L$).

図 1.3 より，力のつり合い式は,

$$\begin{aligned} -R_O + p(x-L) + N(x) &= 0 \\ N(x) &= R_O - p(x-L) \end{aligned} \tag{1.3}$$

となる．

以上の結果を用いて，点 B’の変位$\delta_{B'}$を求める．

$$\begin{aligned} \delta_{B'} &= \int \varepsilon(x) \\ &= \int_0^L \frac{N(x)}{2EA} dx + \int_L^{2L} \frac{N(x)}{EA} dx \\ &= \frac{1}{2EA} \left\{ R_O L + 2\left(R_O L - \frac{1}{2} pL^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2EA} \left(3R_O L - pL^2 \right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで，$\delta_{B'} = \delta$より，

$$\frac{1}{2EA}\left(3R_O L - pL^2\right) = \delta$$
$$p = \frac{EA\delta}{L^2} \tag{1.5}$$

となる．

(3) (2)の後，点 A から x 軸正方向に一点荷重 $\boldsymbol{P}$ を加えた．その時に棒状部材が右側の壁から受ける反力 $\boldsymbol{R_B}$ を$\boldsymbol{P, p, L}$のうち必要なものをを用いて求めよ．

全体の FBD は，

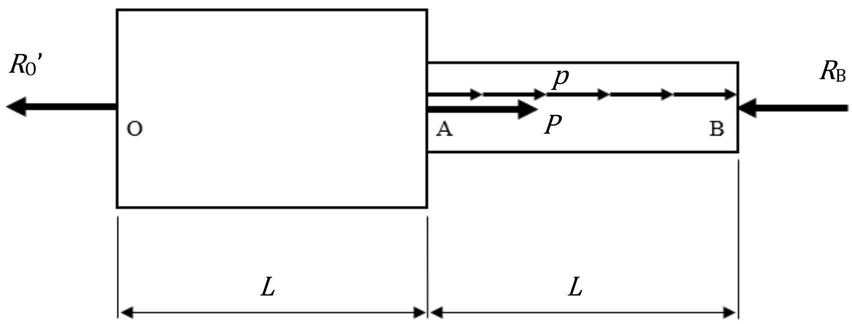


Fig. 1.4　FBD.

図 1.4 より，力のつり合い式は，

$$-R_O{}' + pL + P - R_B = 0$$
$$R_O{}' + R_B = P + pL \tag{1.6}$$

次に，(2)と同様に，$0 \le x \le L, L \le x \le 2L$に分けて軸力 $N(x)$を考える．

(ｉ) $0 \le x \le L$のとき

FBD は(2)と同様なので，省略．

力のつり合い式は，

$$N(x) = R_O{}' \tag{1.7}$$

(ⅱ) $L \leq x \leq 2L$のとき

FBD は,

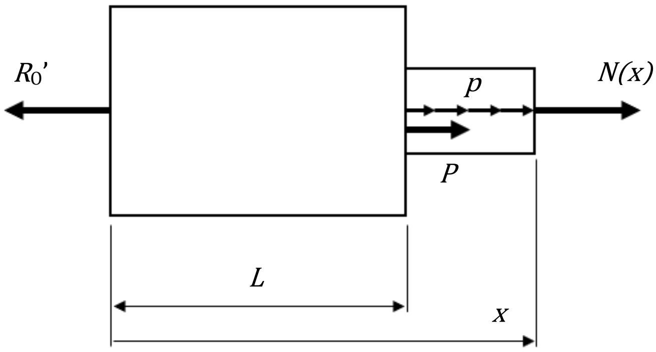


Fig. 1.5　FBD ($L \leq x \leq 2L$).

力のつり合い式は,

$$
\begin{aligned}
&-R_O' + P + p(x-L) + N(x) = 0 \\
&N(x) = R_O' - P - p(x-L)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

以上より，点 B での変位δ_Bは,

$$
\begin{aligned}
\delta_B &= \int \varepsilon(x) \\
&= \int_0^L \frac{N(x)}{2EA}dx + \int_L^{2L} \frac{N(x)}{EA}dx \\
&= \frac{1}{2EA}\left\{R_O'L + 2\left(R_O' - P\right)L - pL^2\right\} \\
&= \frac{1}{2EA}\left(3R_O'L - 2PL - pL^2\right)
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

ここで，点 B の変位$\delta_B = \delta$ より，R_O'は,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2EA}\left(3R_O'L - 2PL - pL^2\right) = \delta \\
&R_O' = \frac{2}{3}P + pL
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

式(1.6)より，反力 R_B は,

$$
\begin{aligned}
R_B &= P + pL - R_\mathrm{O}{}' \\
&= P + pL - \frac{2}{3}P - pL \\
&= \frac{P}{3}
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

[2] 図 2 に示すように，丸棒 1 と 2 本の丸棒 2 が剛体を介して荷重 P を受けている．丸棒は x 軸に並行に配列されており，剛体は x 軸方向にのみ移動可能とする．丸棒 1 と 2 のヤング率を E としたとき，以下の問いに答えよ．

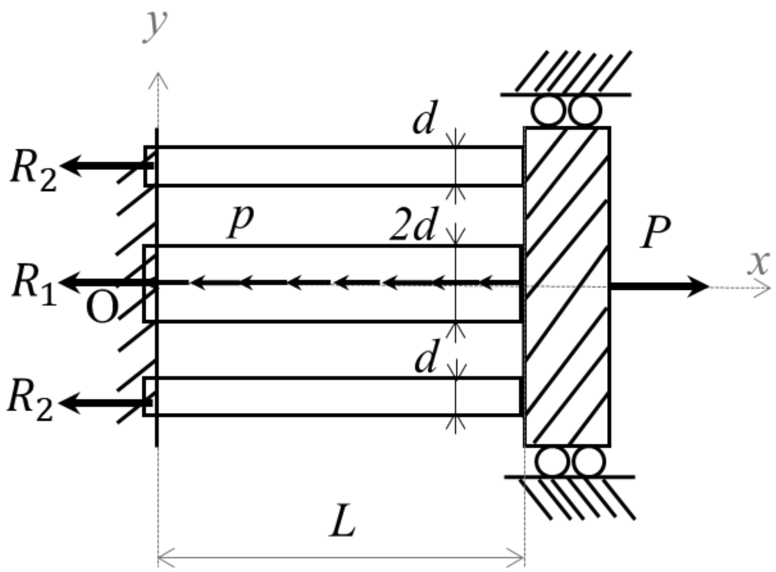


Fig.2 剛体を介して荷重を受ける丸棒 1，2

(1) 外力 P，分布荷重 p，反力 R_1，R_2 のつり合いの式を示せ．ただし，それぞれの力は図 2 に示した矢印の向きに応じて正負を決定すること．

(2) 丸棒 1，2 に作用する任意の位置 x における軸力 $N_1(x)$，$N_2(x)$を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ．

(3) 丸棒 1，2 に作用する任意の位置 x における垂直応力 $\sigma_1(x)$，$\sigma_2(x)$を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ．

(4) 丸棒 1，2 の右端における変位 δ_1，δ_2 を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ．

(5) 右端の剛体による拘束条件(δ_1=δ_2)を用いて，反力 R_1，R_2 をそれぞれ求めよ．

(1) 外力 P，分布荷重 p，反力 R_1，R_2 のつり合いの式を示せ．ただし，それぞれの力は図 2 に示した矢印の向きに応じて正負を決定すること．

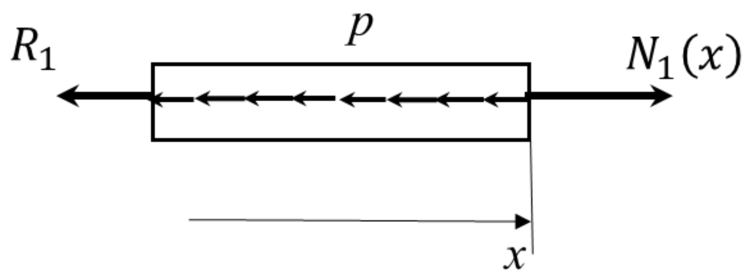
図 2 より，力のつり合い式は以下のようになる．

$$-R_1 - 2R_2 - pL + P = 0 \tag{2.1}$$

(2) 丸棒 1，2 に作用する任意の位置 x における軸力 $N_1(x)$，$N_2(x)$を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ.

任意の位置 x における仮想断面を考え，それぞれの丸棒に作用する軸力を考える.

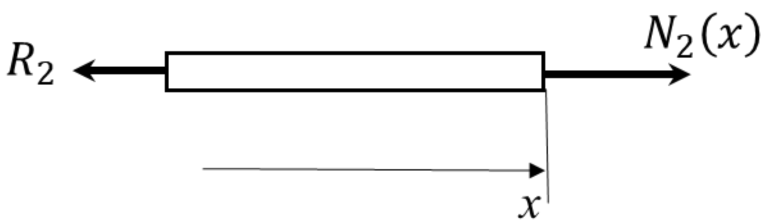
(i)丸棒 1 について



力のつり合いより，以下のようになる.

$$\begin{aligned} &-R_1 - px + N_1(x) = 0 \\ &\therefore N_1(x) = px + R_1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

(ii)丸棒 2 について



力のつり合いより，以下のようになる.

$$\begin{aligned} &-R_2 + N_2(x) = 0 \\ &\therefore N_2(x) = R_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

(3) 丸棒 1，2 に作用する任意の位置 x における垂直応力 $\sigma_1(x)$，$\sigma_2(x)$を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ.

(i)丸棒 1 について

丸棒は直径 $2d$ であるから，断面積 A_1 は,

$$A_1 = \pi \left(\frac{2d}{2} \right)^2 = \pi d^2 \tag{2.4}$$

と表されるため，垂直応力 σ_1 は以下のようになる．

$$\sigma_1 = \frac{N_1(x)}{A_1} = \frac{px + R_1}{\pi d^2} \tag{2.5}$$

(ii)丸棒 2 について

丸棒 2 は直径 d であるから，断面積 A_2 は

$$A_2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4} \tag{2.6}$$

と表されるため，垂直応力 σ_2 は以下のようになる．

$$\sigma_2 = \frac{N_2(x)}{A_2} = \frac{4R_2}{\pi d^2} \tag{2.7}$$

(4) 丸棒 1，2 の右端における変位 $\boldsymbol{\delta_1}$，$\boldsymbol{\delta_2}$ を反力 $\boldsymbol{R_1}$，$\boldsymbol{R_2}$ を用いてそれぞれ示せ．

丸棒のヤング率はともに E であり，変位は $\delta = \int \varepsilon dx$ の式で求められる．

(i)丸棒 1 について

$$\delta_1 = \int_0^L \varepsilon_1 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L \frac{\sigma_1}{E} dx \\
&= \int_0^L \frac{R_1 + px}{\pi d^2 E} dx \\
&= \frac{1}{\pi d^2 E}\left[R_1 x + \frac{1}{2}px^2\right]_0^L \\
&= \frac{L}{\pi d^2 E}\left(R_1 + \frac{1}{2}pL\right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

(ii)丸棒 2 について

$$
\begin{aligned}
\delta_2 &= \int_0^L \varepsilon_2 dx \\
&= \int_0^L \frac{\sigma_2}{E} dx \\
&= \int_0^L \frac{4R_2}{\pi d^2 E} dx \\
&= \frac{4R_2}{\pi d^2 E} \left[x \right]_0^L \\
&= \frac{4R_2 L}{\pi d^2 E}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

(5) 右端の剛体による拘束条件($\boldsymbol{\delta_1=\delta_2}$)を用いて，反力 $\boldsymbol{R_1}$，$\boldsymbol{R_2}$ をそれぞれ求めよ．

拘束条件 $\delta_1=\delta_2$ より，

$$
\frac{L}{\pi d^2 E}\left(R_1 + \frac{1}{2} pL \right) = \frac{4R_2 L}{\pi d^2 E} \tag{2.10}
$$

式(2.10)を整理すると

$$
R_1 = 4R_2 - \frac{1}{2} pL \tag{2.11}
$$

となる．式(2.11)を式(2.1)に代入して整理すると，R_2 が次のように求められる．

$$
R_2 = \frac{2P - pL}{12} \tag{2.12}
$$

式(2.12)を式(2.11)に代入して整理すると，R_1 が求められる．

$$
R_1 = \frac{4P - 5pL}{6} \tag{2.13}
$$