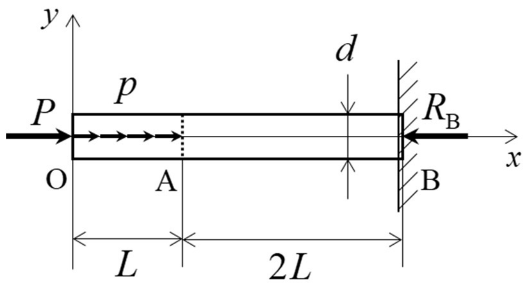
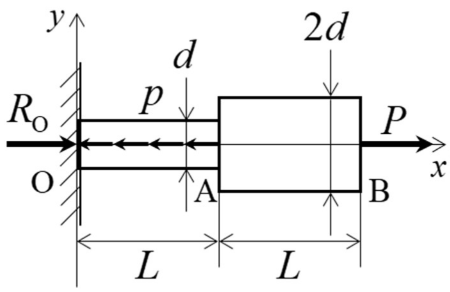
材料の力学 1　第 2 回演習問題（2025/4/21 実施）

[1]

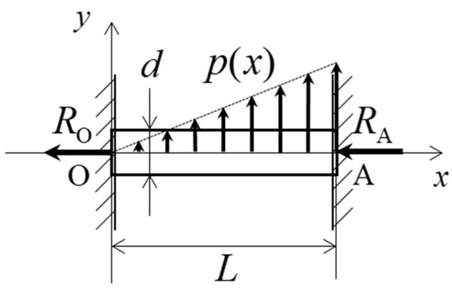
図 1 に示すような，一端が壁に固定された一様断面の丸棒(a)，段付き丸棒(b)と両端が壁に固定された丸棒(c)がある．ただし，図 1(c)中の分布荷重はx軸正方向に作用しており，その大きさは式(1. 1)で表される．点 O，A および B での壁からの反力をR_{O}，R_{A}およびR_{B}，丸棒のヤング率をEとして，以下の問いに答えよ．反力の向きは値が正となるように適切に設定せよ．



(a) 一様断面



(b) 段付き



(c) 両端固定

Fig.1 様々な丸棒

$$p(x) = \left(\frac{x}{L}\right)p \tag{1. 1}$$

(1) 一端が壁に固定された一様断面の丸棒(a)について，

(i)　FBD を描き，力のつり合い式を立式して反力R_{B}を求めよ．

(ii)　座標xにおける軸力$N(x)$を，xの関数として求め，そのグラフを示せ．

(iii)　応力ーひずみの関係から，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ．

(iv)　点 O におけるx方向変位δ_{O}を求めよ．(*)

(2) 一端が壁に固定された段付き丸棒(b)について，

(i) FBD を描き，力のつり合い式を立式して反力R_{O}を求めよ．ただし，$P < pL$とする．

(ii) 座標xにおける軸力$N(x)$を，xの関数として求め，そのグラフを示せ．

(iii) 応力ーひずみの関係から，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ．

(iv) 点 B におけるx方向変位δ_{B}を求めよ．(*)

(3) 両端が壁に固定された一様断面の丸棒(c)について，

(i) FBD を描き，壁からの反力R_{O}およびR_{B}を用いて力のつり合い式を立式せよ．

(ii) 座標xにおける軸力$N(x)$を求めよ．

(iii) 応力ーひずみの関係から，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ．

(iv) 点 B におけるx方向変位が 0 となることを利用し，壁からの反力R_{O}およびR_{B}を求めよ．(*)

(*) 微小長さdxの部分の伸びをdl，ひずみをεとすると，式(1.2)が成り立つ．

$$dl = \varepsilon \cdot dx \tag{1.2}$$

(1) 一端が壁に固定された一様断面の丸棒**(a)**について，

(i) **FBD** を描き，力のつり合い式を立式して反力$\boldsymbol{R}_{\mathbf{B}}$を求めよ．

Fig 1.1 FBD

図 1.1 より，力のつり合い式は,

$$
\begin{aligned}
&P + pL - R_{\mathrm{B}} = 0 \\
&\therefore R_{\mathrm{B}} = P + pL
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

(ii) 座標$\boldsymbol{x}$における軸力$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$を，$\boldsymbol{x}$の関数として求め，そのグラフを示せ．

まず，座標xにおける FBD を考える．点 A において荷重が変化するので，$x = L$の前後で場合分けを行う．

$0 \le x \le L$のとき，FBD は図 1.2 のようになる．

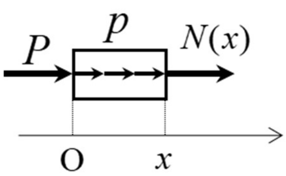


Fig 1.2 FBD

図 1.2 より，力のつり合い式は,

$$
\begin{aligned}
&P + px + N(x) = 0 \\
&\therefore N(x) = -px - P
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$L \le x \le 3L$のとき，FBD は図 1.3 のようになる．

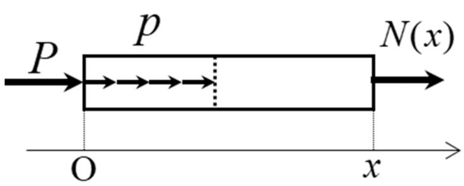


Fig 1.3 FBD

図 1.3 より，力のつり合い式は,

$$P + pL + N(x) = 0$$
$$\therefore N(x) = -pL - P \tag{1.5}$$

以上より，グラフは図 1.4 のようになる.

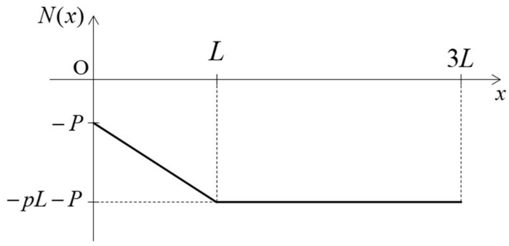


Fig 1.4 軸力－変位線図

(iii) 応力－ひずみの関係から，垂直ひずみ$\boldsymbol{\varepsilon(x)}$を求めよ.

(ii)より，座標xにおける軸力$N(x)$は,

$$N(x) = \begin{cases} -px - P & (0 \le x \le L) \\ -pL - P & (L \le x \le 3L) \end{cases} \tag{1.6}$$

丸棒の断面積$A(x)$を用いて，座標xにおける応力$\sigma(x)$は式(1.5)のように表される.

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \tag{1.7}$$

ここで，丸棒の断面積$A(x)$は,

$$A(x) = \frac{\pi d^2}{4} \tag{1.8}$$

である.

応力―ひずみの関係

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.9}$$

より，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$は,

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= \frac{N(x)}{EA} \\ &= \begin{cases} -\dfrac{4(px+P)}{\pi E d^2} & (0 \le x \le L) \\ -\dfrac{4(pL+P)}{\pi E d^2} & (L \le x \le 3L) \end{cases}\end{aligned} \tag{1.10}$$

(iv)　点 **O** における$\boldsymbol{x}$方向変位$\boldsymbol{\delta_O}$を求めよ.

丸棒は点 B で壁に固定されているので，δ_Oは点 B から点 O の微小変位を積分することで求めることができる.

$$\begin{aligned}\delta_O &= \int_{3L}^{0} \varepsilon(x)dx \\ &= \int_0^L \frac{4(px+P)}{\pi E d^2}dx + \int_L^{3L} \frac{4(pL+P)}{\pi E d^2}dx \\ &= \frac{2}{\pi E d^2}(5pL^2 + 6PL)\end{aligned} \tag{1.11}$$

(2) 一端が壁に固定された段付き丸棒**(b)**について，

(i) **FBD** を描き，力のつり合い式を立式して反力$\boldsymbol{R_0}$を求めよ．ただし，$P < pL$とする．

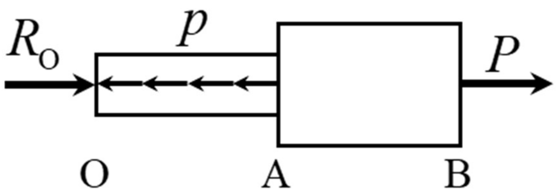


Fig 1.5 FBD

図 1.5 より，力のつり合い式は,

$$
\begin{aligned}
&R_O - pL + P = 0 \\
&\therefore R_O = pL - P
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

(ii) 座標$\boldsymbol{x}$における軸力$\boldsymbol{N(x)}$を，$\boldsymbol{x}$の関数として求め，そのグラフを示せ.

座標xにおける FBD を描き，力のつり合い式から軸力$N(x)$を求める．$x = L$において断面積および分布荷重が変化するので，$x = L$の前後で場合分けする．

$0 \leq x \leq L$のとき，FBD は図 1.6 のようになる．

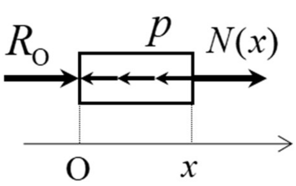


Fig 1.6 FBD

図 1.6 より，力のつり合い式は,

$$
R_O - px + N(x) = 0 \tag{1.13}
$$

よって，軸力は

$$
\begin{aligned}
N(x) &= -R_{\mathrm{O}} + px \\
&= p(x-L) + P
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

$L \leq x \leq 2L$のとき，FBD は図 1.7 のようになる．

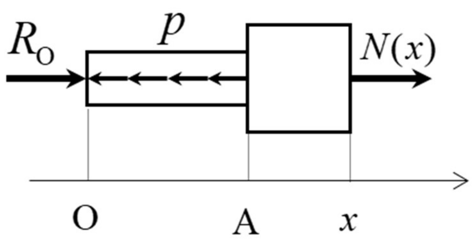


Fig 1.7 FBD

図 1.7 より，力のつり合い式は,

$$
R_{\mathrm{O}} - pL + N(x) = 0 \tag{1.15}
$$

式(1.10)より,

$$
N(x) = P \tag{1.16}
$$

以上より，軸力$N(x)$は,

$$
N(x) = \begin{cases} p(x-L)+P & (0 \leq x \leq L) \\ 0 & (L \leq x \leq 2L) \end{cases} \tag{1.17}
$$

グラフは図 1.8 のようになる．

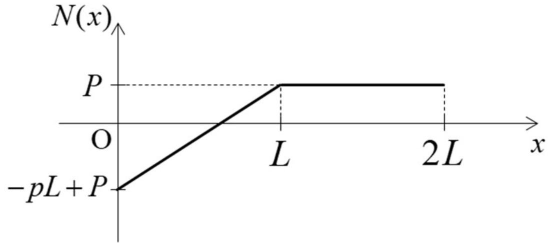


Fig 1.8 軸力－変位線図

(iii)　応力－ひずみの関係から，垂直ひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$を求めよ．

式(1.7)より，ひずみ$\varepsilon(x)$は，

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA} = \begin{cases} \dfrac{4(p(x-L)+P)}{\pi E d^2} & (0 \le x \le L) \\ \dfrac{P}{\pi E d^2} & (L \le x \le 2L) \end{cases} \tag{1.18}$$

(iv)　点 **B** における$\boldsymbol{x}$方向変位$\boldsymbol{\delta_{\mathrm{B}}}$を求めよ．

δ_{B}は点 O から点 B の微小変位を積分することで求められる．

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{B}} &= \int_0^{2L} \varepsilon(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi E d^2}\left\{ \int_0^L 4(p(x-L)+P)dx + \int_L^{2L} Pdx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi E d^2}(-2pL^2 + 5PL) \end{aligned} \tag{1.19}$$

(3) 両端が壁に固定された一様断面の丸棒**(c)**について，

(i) **FBD** を描き，壁からの反力$\boldsymbol{R_O}$および$\boldsymbol{R_A}$を用いて力のつり合い式を立式せよ．

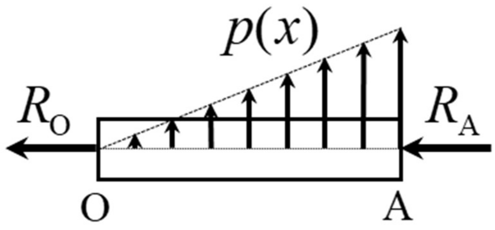


Fig 1.9 FBD

$$
\begin{aligned}
&-R_{\mathrm{O}}+\int_0^L \frac{x}{L}\, p dx - R_{\mathrm{A}} = 0 \\
&\therefore R_{\mathrm{O}}+R_{\mathrm{A}}-\frac{pL}{2}=0
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

(ii) 座標$\boldsymbol{x}$における軸力$\boldsymbol{N(x)}$を求めよ．

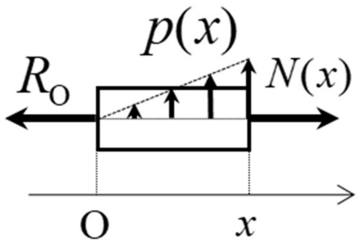


Fig 1.10 FBD

$$
\begin{aligned}
&-R_{\mathrm{O}}+\int_0^x \frac{x}{L}\, p dx + N(x) = 0 \\
&\therefore N(x)=-\frac{p}{2L}x^2+R_{\mathrm{O}}
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

(iii) 応力－ひずみの関係から，垂直ひずみ$\boldsymbol{\varepsilon(x)}$を求めよ．

丸棒の断面積を A とすると，$\varepsilon(x)$は

$$
\varepsilon(x)=\frac{N(x)}{EA}=-\frac{1}{EA}\left(\frac{p}{2L}x^2-R_{\mathrm{O}}\right)
\tag{1.22}
$$

ここで

$$A(x)=\frac{\pi d^2}{4} \tag{1.23}$$

である．よって，

$$\varepsilon(x)=-\frac{4}{\pi E d^2}\left(\frac{p}{2L}x^2-R_{\mathrm{O}}\right) \tag{1.24}$$

(iv) 点 **A** における$\boldsymbol{x}$方向変位が **0** となることを利用し，壁からの反力$\boldsymbol{R_{\mathrm{O}}}$および$\boldsymbol{R_{\mathrm{A}}}$を求めよ．

点 A におけるx方向変位δ_{A}は，点 O から点 A までの微小変位を積分することで求められる．

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{A}}&=\int_0^L \varepsilon(x)dx\\&=-\frac{4}{\pi E d^2}\int_0^L\left(\frac{p}{2L}x^2-R_{\mathrm{O}}\right)\end{aligned} \tag{1.25}$$

ここで，$\delta_{\mathrm{B}}=0$より，

$$\int_0^L\left(\frac{p}{2L}x^2-R_{\mathrm{O}}\right)=0 \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}\int_0^L\left(\frac{p}{2L}x^2-R_{\mathrm{O}}\right)&=\left[\frac{p}{6L}x^3-R_{\mathrm{O}}x\right]_0^L\\&=\frac{p}{6}L^2-R_{\mathrm{O}}L\end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}&\frac{p}{6}L^2-R_{\mathrm{O}}L=0\\&\therefore R_{\mathrm{O}}=\frac{pL}{6}\end{aligned} \tag{1.28}$$

また，式(1.18)より点 A における壁からの反力R_{A}は，

$$R_{\mathrm{A}}=-R_{\mathrm{O}}+\frac{pL}{2}=\frac{pL}{3} \tag{1.29}$$

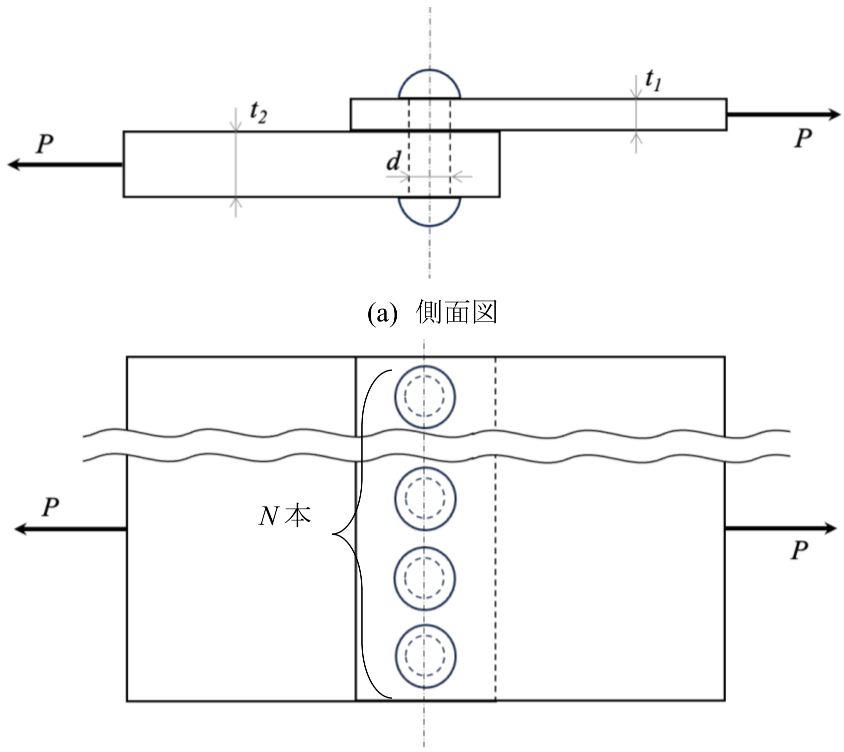
最後に

反力どちらの向きに設定しても計算が可能であるが，本講義では計算結果が正となるように反力の向きを設定している．例えば，(2)において$P > pL$という設定ならば，壁からの反力は左向きに設定すべきである．今回は問題図中に反力を示したが，反力の向きを適切に判断し，設定できるようにしておくとよい．

第 2 回演習

西　耕平

[2] 図 2.1 に示すように厚さ t_1, t_2 の 2 枚の鋼板が, N 本の直径 d のリベットで接合され, 外力として引張荷重 P が作用している．2 枚の板材は十分強度のある剛体として以下の問題に答えよ．なお，板材間の摩擦力，リベットと板材間の摩擦力，リベットのたわみは無視してよい．



(a) 側面図

(b) 上から見た図

Fig.2 リベットで接合された鋼板

(1)リベットが 1 本の時を考える．

(i) リベットに働く力について FBD を描き，リベットに作用するせん断力 Q を求めよ．なお荷重 P は鋼板を介しても，リベットに集中荷重として作用するものとする．

(ii) リベットに生じるせん断応力 τ を求めよ．

(iii) リベットの許容せん断応力が $\tau_a = 50$ [MPa]のとき，外力 P はいくらまで耐えられるか，有効数字 3 桁で求めよ．ただし，リベットの直径は d =10[mm]とする．

(2) N 本のリベットで鋼板を接合することを考える．この鋼板に外力 P が 50 [kN]作用しても安全に利用できるよう設計する時，少なくともリベットは何本必要か．整数値で答えよ．但し，リベットの直径及び許容せん断応力は(1),(iii)の問いと同条件であり，各リベットに働く応力分布は一定であるとする．

(i)リベットに働く力について FBD を描き，リベットに作用するせん断力 *Q* を求めよ．なお荷重 *P* は鋼板を介しても，リベットに集中荷重として作用するものとする．

図 2.1 にリベットの FBD を示す．

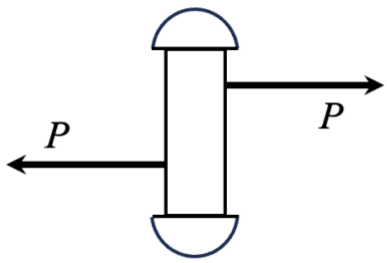


Fig. 2.1 FBD

また，各部位に作用する力は，下図のようになる．

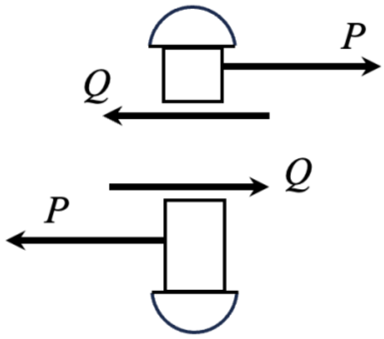


Fig. 2.2 各部位に作用する力

よって，リベットに作用するせん断力 Q は右方向を正とすると力のつりあいより

$$\begin{aligned} &P-Q=0 \\ &\therefore Q=P \end{aligned} \tag{2.1}$$

と求められる．

(ii)リベットに生じるせん断応力 τ を求めよ．

リベットに生じるせん断応力 τ は，リベットの断面に働くせん断力を断面積で割ることで求められる．リベットの断面積 S は

$$S=\frac{\pi d^2}{4} \tag{2.2}$$

であるから，リベットに生じるせん断応力 τ は

$$\tau = \frac{Q}{S} = \frac{4P}{\pi d^2} \tag{2.3}$$

と表される．

(iii)リベットの許容せん断応力が $\tau_a = 50$ [MPa]のとき，外力 P はいくらまで耐えられるか，有効数字 3 桁で求めよ．ただし，リベットの直径は d =10[mm]とする．

リベットがせん断破壊する時の条件は以下の通りである．

$$\tau \geq \tau_a \tag{2.4}$$

式(2.4)に式(2.3)と各値を代入することで，荷重 P の条件は次のように求められる．

$$\begin{aligned} &\frac{4P}{\pi d^2} \geq \tau_a \\ &\Leftrightarrow P \geq \frac{\tau_a \pi d^2}{4} \\ &\Leftrightarrow P \geq \frac{50 \times 10^6 \times 3.142 \times \left(10 \times 10^{-3}\right)^2}{4} \\ &\Leftrightarrow P \geq 3.927\ldots \times 10^3 \approx 3.93 \times 10^3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

以上より，この条件下では外力が **3.93×10^3[N]** まで耐えることができる．

(2) N 本のリベットで鋼板を接合することを考える．この鋼板に外力 P が 50 [kN]作用しても安全に利用できるよう設計する時，少なくともリベットは何本必要か．整数値で答えよ．但し，リベットの直径及び許容せん断応力は(1),(iii)の問いと同条件であり，各リベットに働く応力分布は一定であるとする．

図 2.1 にリベット 1 本あたりに働く力を表した FBD を示す．

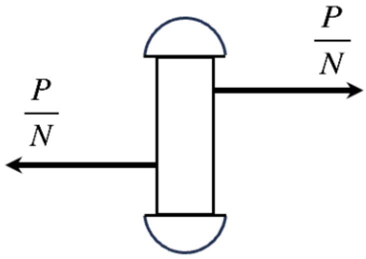


Fig. 2.3 リベット 1 本あたりの FBD

また，各部位に作用する力は，下図のようになる．

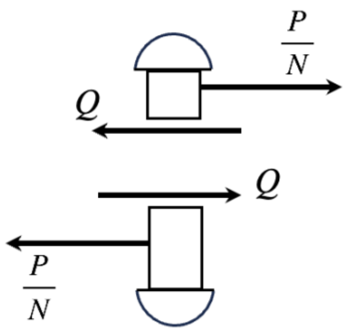


Fig. 2.4 各部位に作用する力

従ってリベット 1 本あたりに働くせん断応力は力のつり合いにより

$$\frac{P}{N} - Q = 0$$
$$\therefore Q = \frac{P}{N} \tag{2.6}$$

と表される．リベットがせん断破壊を起こさないための条件は

$$\tau \leq \tau_a \tag{2.7}$$

と表される．この条件はリベットの断面積 S を用いて

$$\tau = \frac{Q}{S} \leq \tau_a \tag{2.8}$$

と書き換えられる．この式に式(2.2)及び式(2.6)を代入する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{P}{NS} \leq \tau_a \\
&\Leftrightarrow \frac{4P}{N\pi d^2} \leq \tau_a \\
&\Leftrightarrow N \geq \frac{4P}{\pi d^2 \tau_a} \\
&\Leftrightarrow N \geq \frac{4 \times 50 \times 10^3}{3.142 \times \left(10 \times 10^{-3}\right)^2 \times 50 \times 10^6} \\
&\Leftrightarrow N \geq 12.73\ldots
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

より，リベットは少なくとも **13 本**必要となる．