材料の力学 1　第 13 回演習問題（2024/7/15 実施）

[1] 図 1.1 に示すような長さ $4L$ のはりの両端が壁に固定されており，OA 間と CD 間に分布荷重 f_0 が下向きに作用している．はりの曲げ剛性を EI とし，以下の問いに答えよ．

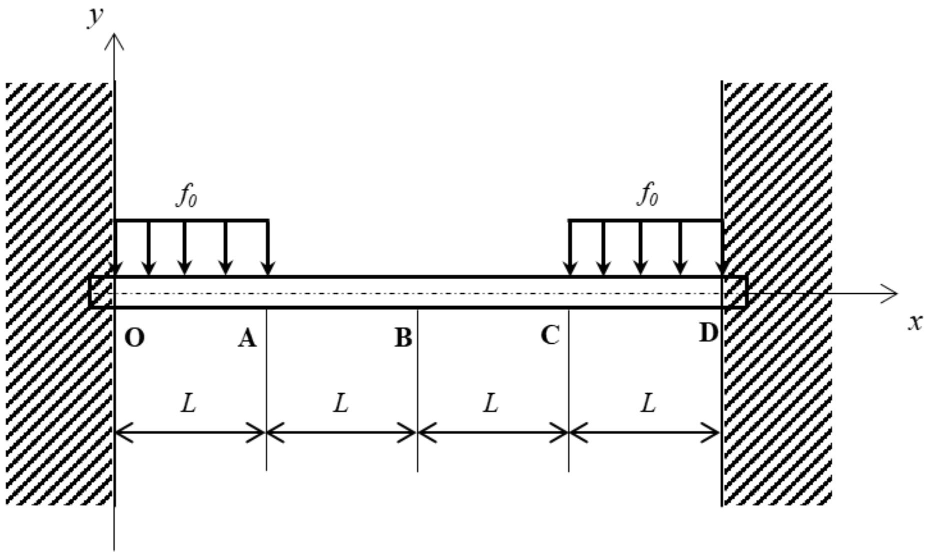

Fig. 1.1 分布荷重を受けるはり

(1) 点 O および点 D 点に作用する反力をそれぞれ R_O，R_D，反モーメントをそれぞれ M_O，M_D とする．このとき，はりに関する力のつり合い式をたて，R_O，R_D を求めよ．また，モーメントのつり合い式を求めよ．

(2) はりの OB 間に生じる曲げモーメント $M(x)$を R_O，M_O を用いて特異関数表示せよ．

(3) はりの OB 間のたわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$を表す式を求めよ．（R_O，M_O を用いずに答えよ）

(4) はりに生じる最大たわみの大きさ$|v_{max}|$を求めよ．

(1) 点 O および点 D 点に作用する反力をそれぞれ R_O，R_D，反モーメントをそれぞれ M_O，M_D とする．このとき，はりに関する力のつり合い式を立て，R_O，R_D を求めよ．また，モーメントのつり合い式を求めよ．

はり全体の FBD は以下のようになる．

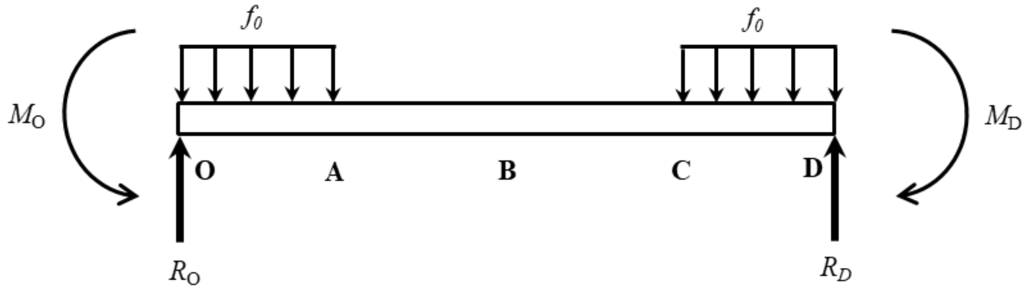

Fig. 1.2 はり全体の FBD

図 1.2 において力のつりあい式は以下のように示される．

$$R_{\mathrm{O}} + R_{\mathrm{D}} - f_0 L - f_0 L = 0 \tag{1.1}$$

$$R_{\mathrm{O}} + R_{\mathrm{D}} - 2 f_0 L = 0 \tag{1.2}$$

ここで，対称性を用いると，

$$R_{\mathrm{O}} = R_{\mathrm{D}} = f_0 L \tag{1.3}$$

また，同様に対称性より，モーメントのつり合い式は以下のように示される．

$$M_{\mathrm{O}} = M_{\mathrm{D}} \tag{1.4}$$

(2) はりの OB 間に生じる曲げモーメント $M(x)$を R_O，M_O を用いて特異関数表示せよ．

OB 間に生じる曲げモーメント $M(x)$を特異関数表示するにあたり，図 1.3 のように AB 間の上下に分布荷重 f_0 が作用しているとみなす．なお，この AB 間に作用する分布荷重 f_0 は上下で打ち消しあうことに注意する．

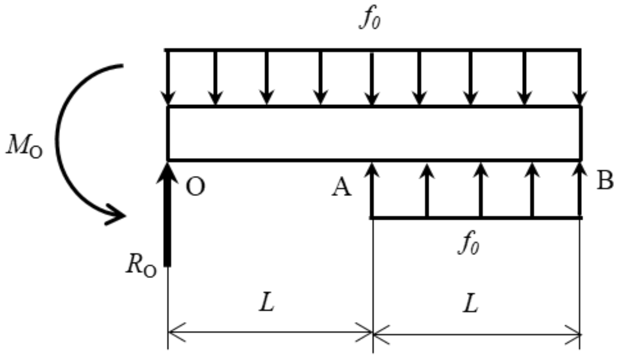

Fig.1.3 OB 間の FBD

図 1.3 より，特異関数表示は以下のようになる．

$$M(x)+\frac{1}{2}f_0\langle x-L\rangle^2-\frac{1}{2}f_0\langle x\rangle^2+R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1-M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^0=0 \tag{1.5}$$

$$M(x)=\frac{1}{2}f_0\langle x\rangle^2-\frac{1}{2}f_0\langle x-L\rangle^2-R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1+M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^0 \tag{1.6}$$

(3)　はりの OB 間のたわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$を表す式を求めよ．（R_{O}，M_{O}を用いずに答えよ）

たわみの基礎式と式(1.6)より、以下の式が成り立つ.

$$-EIv''=\frac{1}{2}f_0\langle x\rangle^2-\frac{1}{2}f_0\langle x-L\rangle^2-R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1+M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^0 \tag{1.7}$$

$$-EIv'=\frac{1}{6}f_0\langle x\rangle^3-\frac{1}{6}f_0\langle x-L\rangle^3-\frac{1}{2}R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^2+M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^1+C_1 \tag{1.8}$$

$$-EIv=\frac{1}{24}f_0\langle x\rangle^4-\frac{1}{24}f_0\langle x-L\rangle^4-\frac{1}{6}R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^3+\frac{1}{2}M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^2+C_1x+C_2 \tag{1.9}$$

ここで，C_1，C_2 は積分定数である．
境界条件は，$v'(0)=v(0)=0$　より，$C_1=C_2=0$
また，対称性より $v'(2L)=0$ なので，

$$M_{\mathrm{O}}=\frac{5}{12}f_{\mathrm{O}}L^2 \tag{1.10}$$

よってはりのたわみ角およびたわみはそれぞれ以下のようになる．

$$v' = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}f_0\langle x\rangle^3 - \frac{1}{6}f_0\langle x-L\rangle^3 - \frac{1}{2}f_0L\langle x\rangle^2 + \frac{5}{12}f_0L^2\langle x\rangle^1\right) \tag{1.11}$$

$$v = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}f_0\langle x\rangle^4 - \frac{1}{24}f_0\langle x-L\rangle^4 - \frac{1}{6}f_0L\langle x\rangle^3 + \frac{5}{24}f_0L^2\langle x\rangle^2\right) \tag{1.12}$$

(4）はりに生じる最大たわみの大きさ$|\mathbf{v}_{\mathbf{max}}|$を求めよ．

最大たわみ $v_{\max}$ は対称性より $x = 2L$ の位置で生じると考えられるので，式(1.12)より，

$$v_{\max} = |v(2L)| = \frac{f_0L^4}{8EI} \tag{1.13}$$

<別解>

特異関数を用いない解法

(i)$0 \le x \le L$

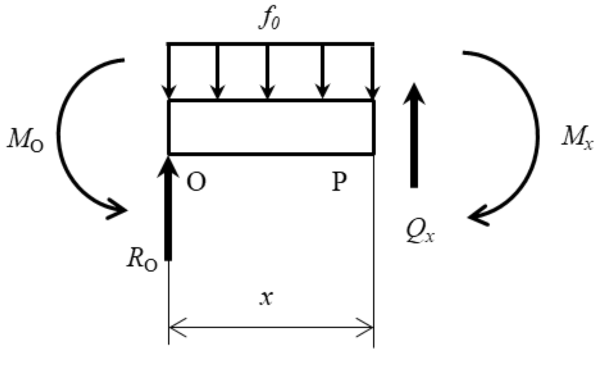

Fig.1.4 仮想断面の FBD

位置 x でのモーメントのつり合い

$$M(x) = M_O - R_O x + \frac{1}{2}f_0x^2 \tag{1.14}$$

(ii) $L \leq x \leq 2L$

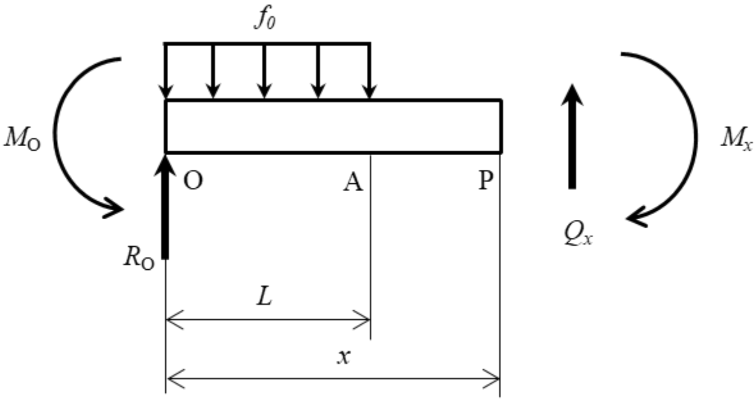

Fig.1.5 仮想断面の FBD

$$M(x) = M_O - R_O x + \frac{1}{2} f_0 x^2 - \frac{1}{2} f_0 (x - L)^2 \tag{1.15}$$

$$M(x) = M_O - \frac{1}{2} f_0 L^2 \tag{1.16}$$

(4) たわみの基礎式と式(1.14)，式(1.16)より、以下の式が成り立つ。

(i) $0 \leq x \leq L$

$$-EIv_1'(x) = M_O x - \frac{1}{2} f_0 L x^2 + \frac{1}{6} f_0 x^3 + C_1 \tag{1.17}$$

$$-EIv_1(x) = \frac{1}{2} M_O x^2 - \frac{1}{6} f_0 L x^3 + \frac{1}{24} f_0 x^4 + C_1 x + C_2 \tag{1.18}$$

(ii) $L \leq x \leq 2L$

$$-EIv_2'(x) = M_O x - \frac{1}{2} f_0 L^2 x + C_3 \tag{1.19}$$

$$-EIv_2(x) = \frac{1}{2} M_O x^2 - \frac{1}{4} f_0 L^2 x^2 + C_3 x + C_4 \tag{1.20}$$

境界条件 $\begin{aligned} &v_1'(0)=v(0)=0 \\ &v_1(L)=v_2(L) \\ &v_1'(L)=v_2'(L) \\ &v_2'(2L)=0 \end{aligned}$ より、$\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=0 \\ C_3=\dfrac{1}{6}f_0L^3 \\ C_4=-\dfrac{1}{24}f_0L^4 \\ M_\mathrm{O}=\dfrac{5}{12}f_0L^2 \end{cases}$

したがって、たわみ角およびたわみは以下のようになる

$$v'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{5}{12}f_0L^2x-\dfrac{1}{2}f_0Lx^2+\dfrac{1}{6}f_0x^3\right) & (0\le x\le L) \\ -\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{5}{12}f_0L^2x-\dfrac{1}{2}f_0L^2x+\dfrac{1}{6}f_0L^3\right) & (L\le x\le 2L) \end{cases} \tag{1.21}$$

$$v(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{EI_z}\left(\dfrac{5}{24}f_0L^2x^2-\dfrac{1}{6}f_0Lx^3+\dfrac{1}{24}f_0x^4\right) & (0\le x\le L) \\ -\dfrac{1}{EI_z}\left(\dfrac{5}{24}f_0L^2x^2-\dfrac{1}{4}f_0L^2x^2+\dfrac{1}{6}f_0L^3x-\dfrac{1}{24}f_0L^4\right) & (L\le x\le 2L) \end{cases} \tag{1.22}$$

[2] 図 2 に示すように，B 点においてばね(ばね定数 k)で支持された片持ちはりについて考える．OA 間には分布荷重 f_0 が作用している．図 2 のとき，ばねは自然長であるとして以下の問いに答えよ．

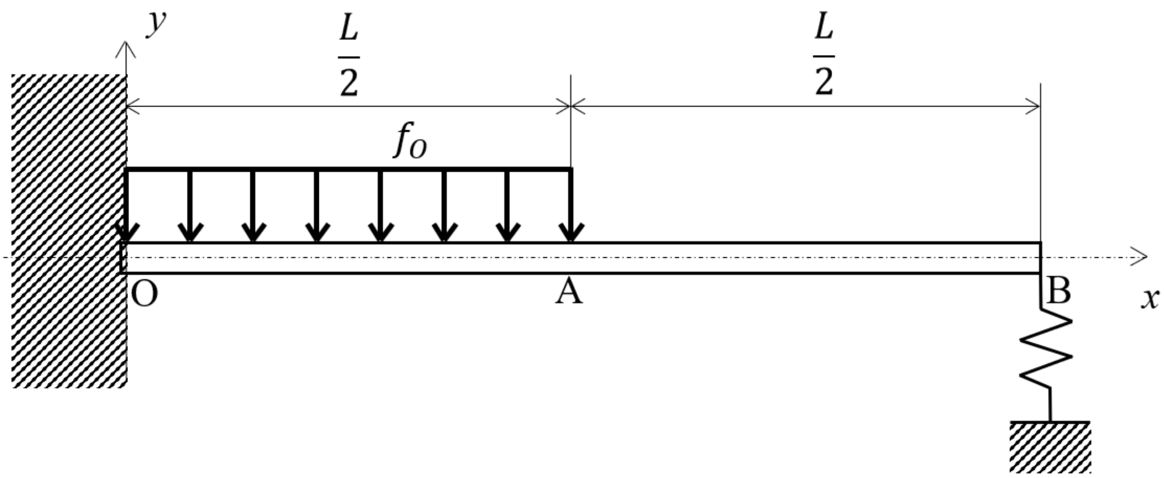

Fig.2 ばねによって支持された片持ちはり

(1)はりの FBD を描き，力とモーメントのつりあい式を答えよ．なお，O 点における反力を R_O，反モーメントを M_O，B 点における反力を R_B とする．
(2)はりの曲げモーメントを特異関数を用いて答えよ．ただし，R_O，M_O をすべて用いよ．
(3)B 点におけるたわみ v_B を求めよ．(R_O，M_O，f_0 を用いてよい．)
(4)ばね係数 k，たわみ v_B を用いて R_B を求めよ．
(5)ばね係数 k を用いて R_B を求めよ．ただし，R_O，M_O を用いてはならない．

(1)はりの FBD を描き，力とモーメントのつりあい式を答えよ．なお，O 点における反力を R_O，反モーメントを M_O，B 点における反力を R_B とする．
はり全体の FBD は次のようになる．

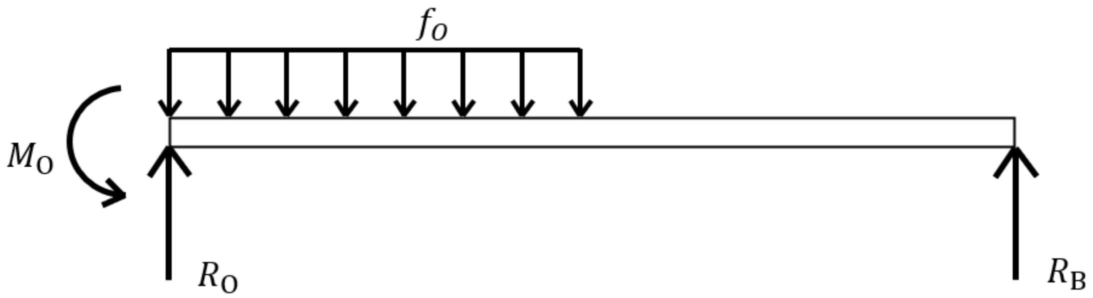

Fig.2.1 はり全体の FBD

力のつり合い式，モーメントのつり合い式はそれぞれ次のようになる．

$$R_O + R_B - \frac{1}{2} f_0 L = 0 \tag{2.1}$$

$$M_O + R_B L - \frac{1}{2} f_0 \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 0 \tag{2.2}$$

(2)はりの曲げモーメントを特異関数を用いて答えよ．ただし，R_O，M_O をすべて用いよ．
はりの曲げモーメントは特異関数で次のように表せる．

$$M(x) = M_O \langle x \rangle^0 - R_O \langle x \rangle^1 + \frac{f_0}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{f_0}{2} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^2 \tag{2.3}$$

(3)B 点におけるたわみ v_B を求めよ．(R_O，M_O，f_0 を用いてよい．)
たわみの基礎式は次のように表せる．

$$-EIv'' = M(x) \tag{2.4}$$

(2)で求めた特異関数を式(2.4)に代入して，両辺積分すると次のようになる．

$$-EIv' = M_O\langle x\rangle^1 - \frac{R_O}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{f_0}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{f_0}{6}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^3 + C_1$$

(2.5)

$$-EIv = \frac{M_O}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{R_O}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{f_0}{24}\langle x\rangle^4 - \frac{f_0}{24}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^4 + C_1x + C_2$$

(2.6)

x=0 において，境界条件 $v=v'=0$ より，$C_1=C_2=0$ となる．
したがって，B 点でのたわみ v_B は $x=L$ を代入することで次のように求められる．

$$v_B = -\frac{L^2}{EI}\left(\frac{1}{2}M_O - \frac{1}{6}R_OL + \frac{5}{128}f_0L^2\right)$$

(2.7)

(4)ばね係数 k, たわみ v_B を用いて R_B を求めよ.
ばねの力のつり合いより，次のように表せる．

$$R_B = -kv_B$$

(2.8)

(5)ばね係数 k を用いて R_B を求めよ. ただし, R_O, M_O を用いてはならない.
(1)より R_O，M_O は R_B を用いて次のように表せる．

$$R_O = \frac{1}{2}f_0L - R_B$$
$$M_O = \frac{1}{8}f_0L^2 - R_BL$$

したがって，R_B は式(2.8)に式(2.7)を代入して，R_O，M_O を代入すると以下のように求められる．

$$R_B = \frac{kL^3}{EI}\left(\frac{7}{384}f_0L - \frac{1}{3}R_B\right)$$
$$R_B = \frac{7f_0kL^4}{128\left(3EI + kL^3\right)}$$

(2.9)