材料の力学 1　第 12 回演習問題（2024/7/8 実施）

[1] 図 1 に示すような不静定はりについて考える．点 O にて壁に固定，点 B にて単純支持されており，A 点に集中モーメント M_A が作用している．はりの断面二次モーメントを I，弾性係数は E とする．このとき以下の問いに答えよ．

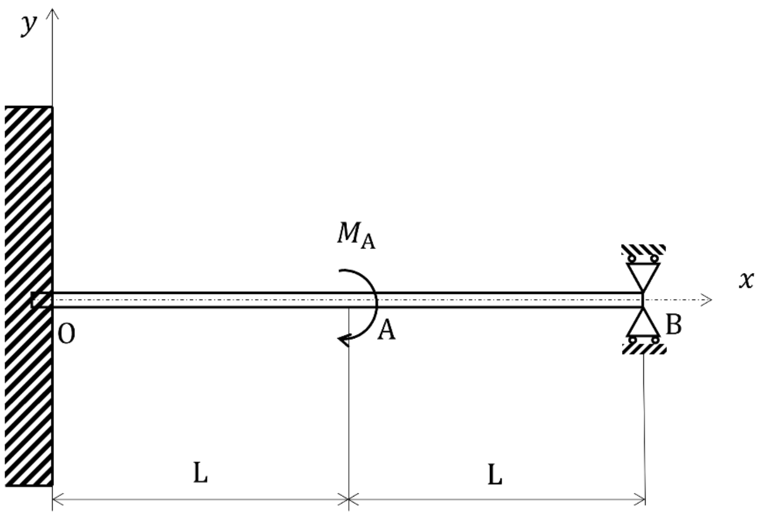


Fig. 1　片方固定，片方支持の不静定はり

(1)　点 O および点 B に作用する反力をそれぞれ R_O，R_B，また点 O に作用する反モーメントを M_O とする．このときのはりに関する力のつり合い式，および点 B まわりの力のモーメントのつり合い式をそれぞれ求めよ．

(2)　はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$を R_O，M_A，L，x のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

(3)　はりが点 O で固定され，また点 A で連続であることを用いて、たわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$を R_O，M_A，L，x，E，I のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

(4)　はりが点 B で支持されていることを用いて，反力 R_O，R_A，反モーメント M_O を M_A，L のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

(5)　(1)～(4)の結果を用いてはり全体の SFD，BMD を示せ．

(1) 点 O および点 B に作用する反力をそれぞれ R_O，R_B，また点 O に作用する反モーメントを M_O とする．このときのはりに関する力のつり合い式，および点 B まわりの力のモーメントのつり合い式をそれぞれ求めよ．

はり全体の FBD は以下の通り．

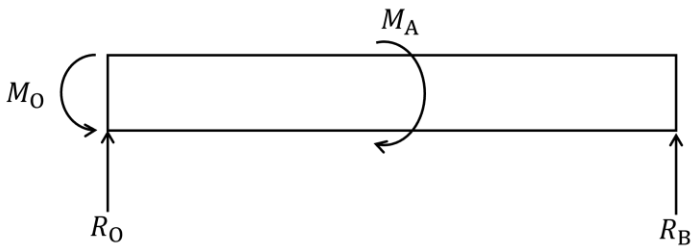


Fig. 1.1 はり全体の FBD

図 1.1 より，力のつり合い式および点 B まわりの力のモーメントのつり合い式はそれぞれ以下の通り．

$$R_O + R_B = 0 \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} M_O - M_A - 2R_O L = 0 \\ M_O = M_A + 2R_O L \end{gathered} \tag{1.2}$$

(2) はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$を R_O，M_A，L，x のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

$x = L$ に集中曲げモーメント M_A が負荷されていることから，以下のように場合分けて考える．

(i) $0 \leq x \leq L$ の場合

任意の仮想断面におけるせん断力を $Q_1(x)$，曲げモーメントを $M_1(x)$とすると，FBD は以下の通り．

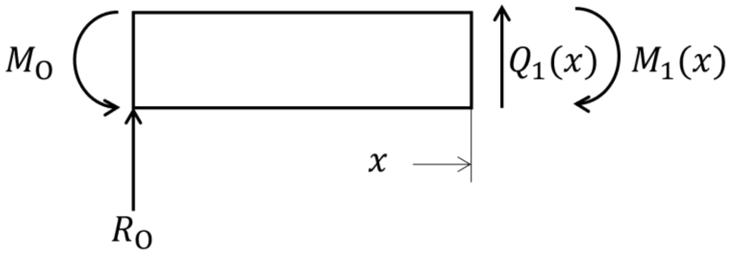


Fig. 1.2　$0 \leq x \leq L$ におけるはりの FBD

図 1.2 において力のつり合い式を考えると

$$Q_1(x) + R_\mathrm{O} = 0 \tag{1.3}$$

$$Q_1(x) = -R_\mathrm{O} \tag{1.4}$$

また、点 O まわりのモーメントのつり合い式より

$$M_\mathrm{O} + Q_1(x)x - M_1(x) = 0 \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \therefore M_1(x) &= M_\mathrm{O} + Q_1(x)x \\ &= M_\mathrm{A} + 2R_\mathrm{O}L - R_\mathrm{O}x \end{aligned} \tag{1.6}$$

(ii) $L \leq x \leq 2L$ の場合

任意の仮想断面におけるせん断力を $Q_2(x)$，曲げモーメントを $M_2(x)$とすると，FBD は以下の通り.

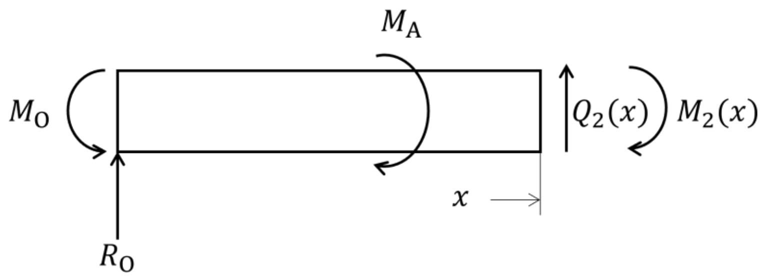


Fig. 1.3　$L \leq x \leq 2L$ におけるはりの FBD

図 1.3 において力のつり合い式を考えると

$$Q_2(x) + R_O = 0 \tag{1.9}$$

$$Q_2(x) = -R_O \tag{1.10}$$

また、点 O まわりのモーメントのつり合い式より

$$M_O + Q_2(x)x - M_A - M_2(x) = 0 \tag{1.11}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore M(x) &= M_O + Q_2(x)x - M_A \\
&= M_A + 2R_O L - R_O x - M_A \qquad (1.12) \\
&= 2R_O L - R_O x
\end{aligned}
$$

(3)　はりが点 O で固定され，<u>また点 A で連続であることを用いて</u>、たわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$を R_O，M_A，L，x，E，I のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

本問題は不静定問題であることから，R_O を用いたまま，たわみ角やたわみを求め，境界条件より R_O を消去する．曲げモーメントとたわみの関係式より，

$$
-EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = \begin{cases} M_A + 2R_O L - R_O x & (0 \leq x \leq L) \\ 2R_O L - R_O x & (L \leq x \leq 2L) \end{cases} \qquad (1.15)
$$

したがってこれらを区間に分けて積分し，境界条件を適用させる．なお C_1～C_4 は積分定数である。

(i) $0 \leq x \leq L$ の場合

式(1.15)より

$$
-EIv_1''(x) = M_A + 2R_O L - R_O x \qquad (1.16)
$$

$$
-EIv_1'(x) = -\frac{1}{2}R_O x^2 + (M_A + 2R_O L)x + C_1 \qquad (1.17)
$$

$$
-EIv_1(x) = -\frac{1}{6}R_O x^3 + \frac{1}{2}(M_A + 2R_O L)x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (1.18)
$$

(ii) $L \leq x \leq 2L$ の場合

同様に

$$
-EIv_2''(x) = 2R_O L - R_O x \qquad (1.19)
$$

$$
-EIv_2'(x) = -\frac{1}{2}R_O x^2 + 2R_O Lx + C_3 \qquad (1.20)
$$

$$-EIv_2(x) = -\frac{1}{6}R_O x^3 + R_O L x^2 + C_3 x + C_4 \tag{1.21}$$

ここではりは点 O で固定されていることから，$x = 0$ においてたわみ角およびたわみはそれぞれ 0 である．このことより

$$EIv_1'(0) = C_1 = 0 \therefore C_1 = 0 \tag{1.22}$$

$$EIv_1(0) = C_2 = 0 \therefore C_2 = 0 \tag{1.23}$$

またはりは点 A で連続であることから，$v_1'(L) = v_2'(L)$，$v_1(L) = v_2(L)$が成り立つので

$$-\frac{1}{2}R_O x^2 + (M_A + 2R_O L)L = -\frac{1}{2}R_O L^2 + 2R_O L^2 + C_3 \tag{1.24}$$

$$\therefore C_3 = M_A L \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{6}R_O L^3 + \frac{1}{2}(M_A + 2R_O L)L^2 \\ &= -\frac{1}{6}R_O L^3 + R_O L^3 + M_A L^2 + C_4 \end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\therefore C_4 = -\frac{1}{2}M_A L^2 \tag{1.27}$$

以上のことより，たわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$はそれぞれ以下の通り．
$0 \leq x \leq L$ の場合

$$\begin{aligned} v_1'(x) &= -\frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{2}R_O x^2 + (M_A + 2R_O L)x\right\} \\ v_1(x) &= -\frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{6}R_O x^3 + \frac{1}{2}(M_A + 2R_O L)x^2\right\} \end{aligned} \tag{1.28}$$

$L \leq x \leq 2L$ の場合

$$\begin{aligned} v_2'(x) &= -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}R_O x^2 + 2R_O L x + M_A L\right) \\ v_2(x) &= -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}R_O x^3 + R_O L x^2 + M_A L x - \frac{1}{2}M_A L^2\right) \end{aligned} \tag{1.29}$$

(4)　<u>はりが点 B で支持されていることを用いて</u>，反力 $\boldsymbol{R_O}$，$\boldsymbol{R_B}$，反モーメント $\boldsymbol{M_O}$ を $\boldsymbol{M_A}$，$\boldsymbol{L}$ のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

はりは点 B において単純支持されていることから，$x = 2L$ におけるたわみは 0 である．これより

$$-EIv_2(2L) = \left\{-\frac{1}{6}R_O(2L)^3 + R_OL(2L)^2 + M_AL(2L) - \frac{1}{2}M_AL^2\right\} = 0 \tag{1.30}$$

式(1.1)，(1.2)，(1.30)より

$$R_O = -\frac{9M_A}{16L} \tag{1.31}$$

$$R_B = \frac{9M_A}{16L} \tag{1.32}$$

$$M_O = -\frac{1}{8}M_A \tag{1.33}$$

(5)　(1)～(4)の結果を用いてはり全体の SFD，BMD を示せ．

Fig. 1.4　はりの SFD

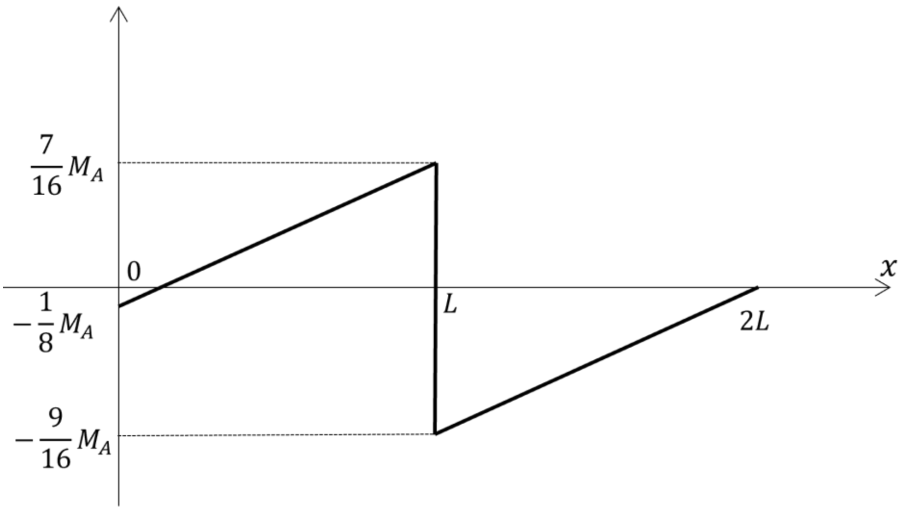


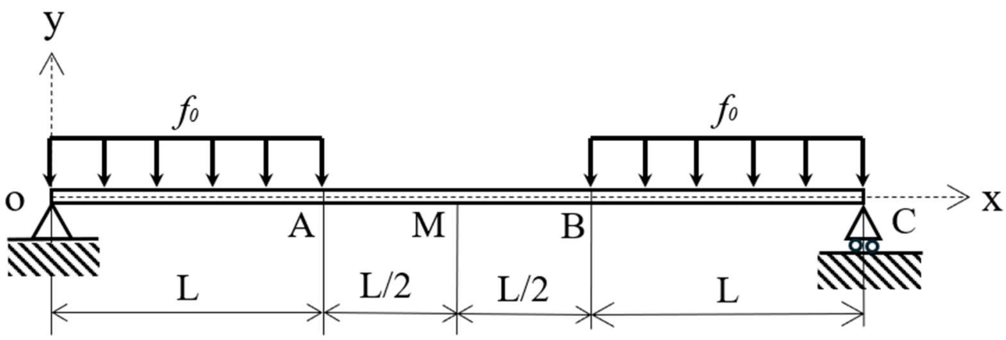
Fig. 1.5　はりの BMD

なお，$Q(x)$と $M(x)$の算出には(1)～(4)の結果から導いた以下の式を用いた．

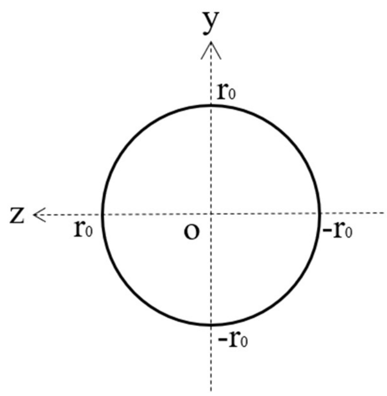
$$Q(x) = -R_O = \frac{9M_A}{16L} \tag{1.34}$$

$$M(x) = \begin{cases} M_A + 2R_O L - R_O x = M_A - \dfrac{9M_A}{16L}(2L - x) & (0 \leq x \leq L) \\ 2R_O L - R_O x = -\dfrac{9M_A}{16L}(2L - x) & (L \leq x \leq 2L) \end{cases} \tag{1.35}$$

[2]　図 2 に示すようなはりについて考える．両端(点 O，点 C)で単純支持されており，OA 間，BC 間には，分布荷重f_0が作用している．はりの原点から 3L/2 の点を点 M とする．はりの断面は図 2(b)に示すような半径 r_0 の円形である．またはりの弾性係数を E とする．このとき以下の問いに答えよ．



(a)



(b)

Fig. 2 両端単純支持のはり．

(1) はりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ．以下の公式を用いても良い。

$$\int \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\theta}{8} - \frac{\sin 4\theta}{32}$$

(2) はり全体の SFD，BMD を描け．曲げモーメントは時計方向を正とする．

(3) 点 O でのたわみ v_O，対称性に注意して点 M におけるたわみ角 v'_M を求めよ．

(4) 最大たわみ v_{MAX} を求めよ．但し(1)で求めた断面二次モーメントを代入して答えよ．

(1)　このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

図 2(b)より断面が z 軸に関して対称であるので，図 2.1 のように上半分を考える．

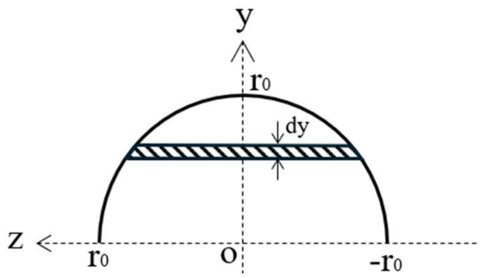


Fig.2.1 断面(z 軸上側)

このとき断面 2 次モーメントは以下の式より求める．

$$I_z = \int_A y^2 dA \tag{2.1}$$

図 2.1 の斜線部に関して微小要素を考えると長方形と近似できる．このとき y，z，dy が半径 r_0，角度 θ を用いると以下のように表せる．

$$\begin{gathered} y = r_0 \sin\theta \\ dy = r_0 \cos\theta\, d\theta \\ z = r_0 \cos\theta \end{gathered} \tag{2.2}$$

よって，面積 dA が以下のように求まる．

$$dA = 2z \cdot dy = 2{r_0}^2 \cos^2\theta\, d\theta \tag{2.3}$$

よって断面 2 次モーメントは以下のように求まる．

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r_0 \sin\theta)^2 \cdot 2{r_0}^2 \cos^2\theta\, d\theta \\ &= 4{r_0}^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta \\ &= {r_0}^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta \\ &= \frac{{r_0}^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\ &= \frac{{r_0}^4}{2} \left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi {r_0}^4}{4} \end{aligned} \tag{2.4}$$

※別解

図 2.1 の斜線部に関して微小要素を考えると長方形と近似できる．このとき z が半径 r_0，y を用いると以下のように表せる．

$$z = \sqrt{r_0^2 - y^2} \tag{2.5}$$

よって，面積 dA が以下のように求まる．

$$dA = 2z \cdot dy = 2\sqrt{r_0^2 - y^2}dy \tag{2.6}$$

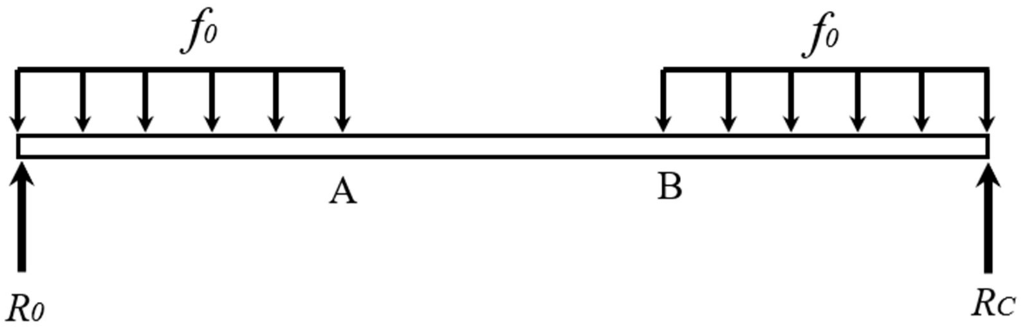
よって断面 2 次モーメントは以下のように求まる．

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA \\ &= 2\int_{-r_0}^{r_0} y^2 \sqrt{r_0^2 - y^2}\, dy \\ &= 4\left[\frac{2y^3 - r_0^2 y}{8}\sqrt{r_0^2 - y^2} + \frac{r_0^4}{8}\sin^{-1}\frac{y}{r_0}\right]_0^{r_0} \\ &= \frac{r_0^4}{2}\sin^{-1} 1 \\ &= \frac{\pi {r_0}^4}{4} \end{aligned} \tag{2.7}$$

(2) はり全体の **SFD**，**BMD** を描け．曲げモーメントは時計方向を正とする．

はじめに全体のFBDを描き点O,Cにおける反力を求める．全体のFBDを図2.2に示し，点Oにおける反力をR_O，点Cにおける反力をR_Cとおく．

Fig.2.2 FBD



力のつり合いより，

$$R_O - f_0 L - f_0 L + R_C = 0$$
$$\therefore R_O + R_C = 2f_0 L \tag{2.8}$$

対称性より，

$$R_O = R_C = f_0 L \tag{2.9}$$

次に $0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}L$ において，それぞれの位置における FBD を描き，せん断力 Q と曲げモーメント M を求める．

(i) $0 \leqq x \leqq L$

FBD は以下のように描ける．

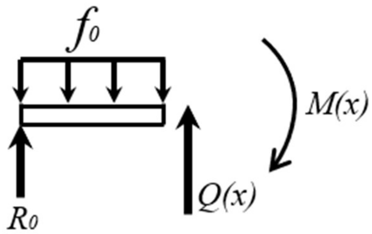


Fig.2.3 FBD

せん断力 $Q(x)$は力のつり合いより以下のように求まる．

$$R_O + Q(x) = f_0 x$$
$$\therefore Q(x) = f_0 x - R_O = f_0(x - L) \tag{2.10}$$

曲げモーメント $M(x)$は O 点まわりのモーメントのつり合いより以下のように求まる．

$$\frac{1}{2}f_0 x^2 + M(x) = Q(x)x$$
$$\therefore M(x) = Q(x)x - \frac{1}{2}f_0 x^2 = \frac{1}{2}f_0 x^2 - f_0 L x \tag{2.11}$$

(ii) $L \leqq x \leqq \frac{3}{2}L$

FBD は以下のように描ける．

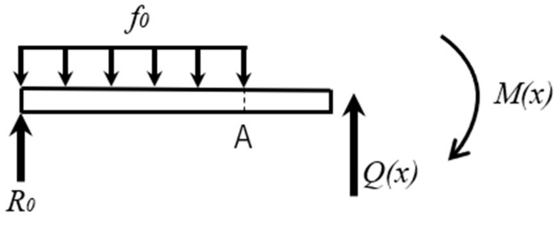


Fig.2.4 FBD

せん断力 $Q(x)$は力のつり合いより以下のように求まる.

$$\begin{gathered} R_O - f_0L + Q(x) = 0 \\ \therefore Q(x) = -R_O + f_0L = 0 \end{gathered} \tag{2.12}$$

曲げモーメント $M(x)$は O 点まわりのモーメントのつり合いより以下のように求まる.

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}f_0L^2 + M(x) = Q(x)x \\ \therefore M(x) = Q(x)x - \frac{1}{2}f_0L^2 = -\frac{1}{2}f_0L^2 \end{gathered} \tag{2.13}$$

※別解

曲げモーメント $M(x)$をx点まわりのモーメントから求める場合は, 図 2.5 のように OA 間の分布荷重を、OA 間の分布荷重と同方向の Ox間の分布荷重と OA 間の分布荷重と逆方向の分布荷重がかかっていると考え、つり合い式をたて求める.

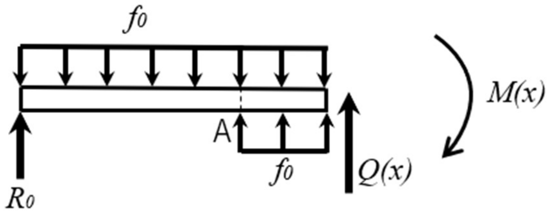


Fig.2.5 FBD

よって曲げモーメント $M(x)$は x 点まわりのモーメントのつり合いより以下のように求まる.

$$\begin{gathered} M(x) + R_Ox + \frac{1}{2}f_0(x-L)^2 = \frac{1}{2}f_0x^2 \\ \therefore M(x) = -\frac{1}{2}f_0L^2 \end{gathered} \tag{2.14}$$

点 M において対称であるため，SFD，BMD は以下のように描ける.

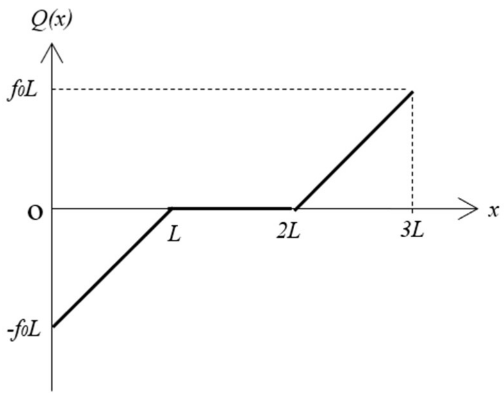


Fig.2.6 SFD

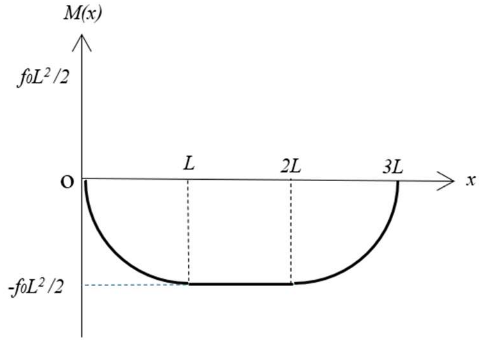


Fig.2.7 BMD

(3)　点Oでのたわみv_O，点Mにおけるたわみ角v'_Mを求めよ．

点 O は単純支持であり，たわみは 0 となる．また点 M において対称であるため，たわみ角は 0 となる．よって以下のように求まる．

$$v_O = 0, v'_M = 0 \tag{2.15}$$

(4)　最大たわみ v_{MAX} を求めよ．但し(1)で求めた断面二次モーメントを代入して答えよ．

(2)と同様に 0≦x≦ $\frac{3}{2}L$ において場合分けを行う．

(i)0≦x≦L

式(2.11)よりたわみの基礎式が以下のようになる．

$$EIv''_1(x) = -M = f_0Lx - \frac{1}{2}f_0x^2 \tag{2.16}$$

両辺を積分することで，たわみ角 $v'_1(x)$とたわみ $v_1(x)$が以下のように求まる．

$$EIv'_1(x) = -\frac{1}{6}f_0x^3 + \frac{1}{2}f_0Lx^2 + C_1 \tag{2.17}$$

$$EIv_1(x) = -\frac{1}{24}f_0x^4 + \frac{1}{6}f_0Lx^3 + C_1x + C_2 \tag{2.18}$$

C_1,C_2 は積分定数である．

(ii) L≦x≦ $\frac{3}{2}L$

式(2.13)よりたわみの基礎式が以下のようになる．

$$EIv''_2(x) = -M = \frac{1}{2}f_0L^2 \tag{2.19}$$

両辺を積分することで，たわみ角 $v'_2(x)$とたわみ $v_2(x)$が以下のように求まる．

$$EIv'_2(x) = \frac{1}{2}f_0L^2x + C_3 \tag{2.20}$$

$$EIv_2(x) = \frac{1}{4}f_0L^2x^2 + C_3x + C_4 \tag{2.21}$$

C_3,C_4は積分定数である．

点Oにおけるたわみ，点Mにおけるたわみ角が0である．また$x = L$におけるたわみ，たわみ角が等しいため，境界条件が以下のように求まる．

$$\begin{gathered} v_1(0) = 0 \\ v_2'\left(\frac{3}{2}L\right) = 0 \\ v_1'(L) = v_2'(L) \\ v_1(L) = v_2(L) \end{gathered} \tag{2.22}$$

よって，それぞれ代入すると，積分定数が以下のように求まる．

$$\begin{gathered} EIv_1(0) = C_2 = 0 \\ \therefore C_2 = 0 \end{gathered} \tag{2.23}$$

$$\begin{gathered} EIv_2'\left(\frac{3}{2}L\right) = \frac{3}{4}f_0L^3 + C_3 = 0 \\ \therefore C_3 = -\frac{3}{4}f_0L^3 \end{gathered} \tag{2.24}$$

$$\begin{gathered} EIv_1'(L) = EIv_2'(L) \\ -\frac{1}{6}f_0L^3 + \frac{1}{2}f_0L^3 + C_1 = \frac{1}{2}f_0L^3 - \frac{3}{4}f_0L^3 \\ \therefore C_1 = -\frac{7}{12}f_0L^3 \end{gathered} \tag{2.25}$$

$$\begin{gathered} EIv_1(L) = EIv_2(L) \\ -\frac{1}{24}f_0L^4 + \frac{1}{6}f_0L^4 - \frac{7}{12}f_0L^4 = \frac{1}{4}f_0L^4 - \frac{3}{4}f_0L^4 + C_4 \\ \therefore C_4 = \frac{1}{24}f_0L^4 \end{gathered} \tag{2.26}$$

よって$0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}L$におけるたわみ角、たわみは以下のように求まる．

$$EIv_1'(x) = -\frac{1}{6}f_0x^3 + \frac{1}{2}f_0Lx^2 - \frac{7}{12}f_0L^3 \qquad (0 \le x \le L) \tag{2.27}$$

$$EIv_1(x) = -\frac{1}{24}f_0x^4 + \frac{1}{6}f_0Lx^3 - \frac{7}{12}f_0L^3x \qquad (0 \le x \le L) \tag{2.28}$$

$$EIv_2'(x) = \frac{1}{2}f_0L^2x - \frac{3}{4}f_0L^3 \qquad \left(L \le x \le \frac{3}{2}L\right) \tag{2.29}$$

$$EIv_2(x) = \frac{1}{4}f_0L^2x^2 - \frac{3}{4}f_0L^3x + \frac{1}{24}f_0L^4 \qquad \left(L \le x \le \frac{3}{2}L\right) \tag{2.30}$$

最大たわみをとるのはたわみ角が 0 のときである．そのときのxを求める．
式(2.27)が 0 となるのは$x = -0.94L$, $1.56L$, $2.38L$ のときであり，これは$0 \le x \le L$の条件を満たさない．よって$0 \le x \le L$ではたわみ角が 0 になることはない．
式(2.29)が 0 となるのは$x = 1.5L$のときである．$L \le x \le \frac{3}{2}L$の条件も満たすため，点 M において最大たわみをとる．

したがって点 M におけるたわみ v_{MAX} を求めると以下のようになる．

$$\begin{aligned} EIv_{MAX} &= EIv_2\left(\frac{3}{2}L\right) = \frac{9}{16}f_0L^4 - \frac{9}{8}f_0L^4 + \frac{1}{24}f_0L^4 \\ \therefore v_{MAX} &= -\frac{25}{48}\frac{f_0L^4}{EI} = -\frac{25}{12}\frac{f_0L^4}{E\pi {r_0}^4} \end{aligned} \tag{2.31}$$

2024 年 7 月 9 日	材料力学 1	学籍番号： 氏名：

解答用紙(第 12 回)

[1]

(1)

$$R_O + R_B = 0$$
$$M_O - M_A - 2R_O L = 0$$

(2)$0 \le x \le L$ 間

$$Q_1(x) = -R_O$$
$$M_1(x) = M_A + 2R_O L - R_O x$$

L $\le x \le 2L$ 間

$$Q_2(x) = -R_O$$
$$M(x) = 2R_O L - R_O x$$

(3) $0 \le x \le L$

$$v_1'(x) = -\frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{2}R_O x^2 + (M_A + 2R_O L)x\right\}$$

$$v_1(x) = -\frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{6}R_O x^3 + \frac{1}{2}(M_A + 2R_O L)x^2\right\}$$

$L \le x \le 2L$

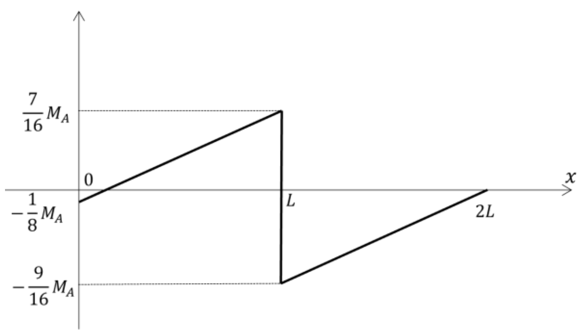
$$v_2'(x) = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}R_O x^2 + 2R_O L x + M_A L\right)$$

$$v_2(x) = -\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}R_O x^3 + R_O L x^2 + M_A L x - \frac{1}{2}M_A L^2\right)$$

(4)$R_O = -\frac{9M_A}{16L}$ $\quad$ $R_B = \frac{9M_A}{16L}$ $\quad$ $M_O = -\frac{1}{8}M_A$

(5) SFD

(5) BMD



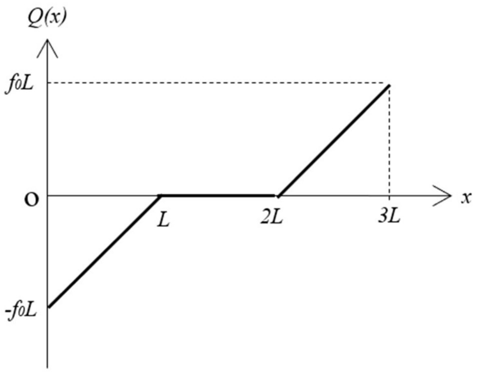
[2]

(1)

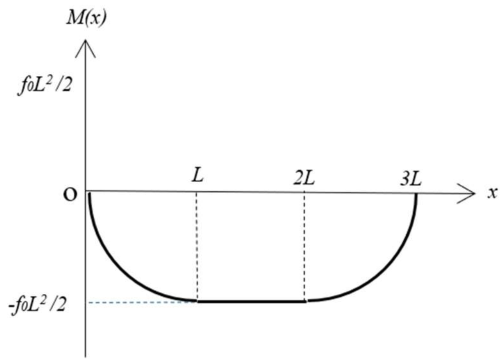
$$\frac{\pi {r_0}^4}{4}$$

(2)

SFD



BMD



(3)

v_O

$$0$$

v'_M

$$0$$

(4)

$$-\frac{25}{12}\frac{f_0 L^4}{E\pi {r_0}^4}$$