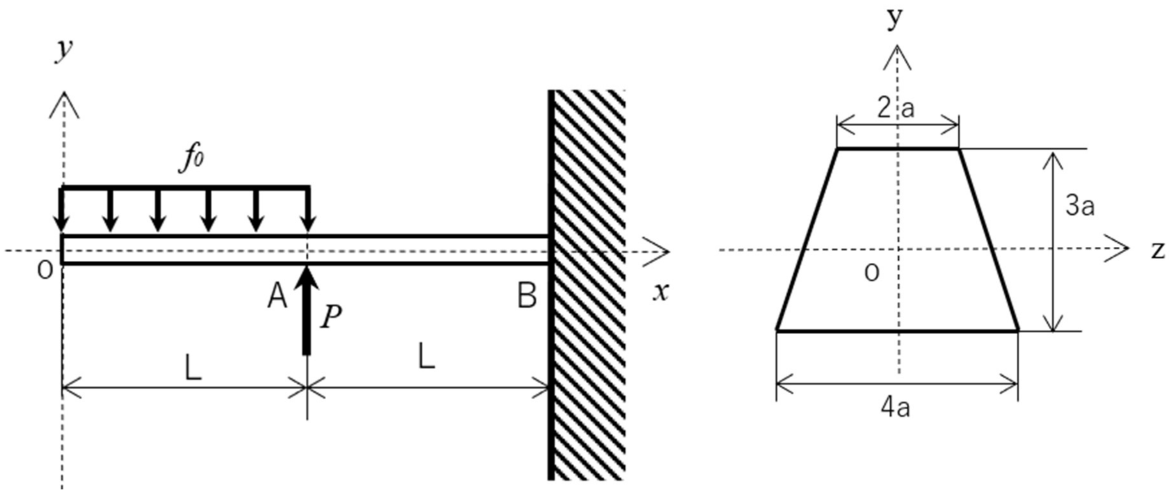
材料の力学1　第11回演習問題（2024/7/1実施）

[1] 図1(a)に示すようにはりに分布荷重f_0と集中荷重Pが作用している.はりの断面形状は図1(b)のように台形状になっている．また yz 軸の交点は断面の図心を通る．このとき以下の問いに答えよ.



(a)　(b)

Fig.1

(1) このはりの図心を通るz軸に関する断面2次モーメントI_zを求めよ.

(2) はり全体のFBDを描き，壁から受ける反力R_Bと反モーメントM_Bを求めよ.

(3) 位置xの仮想断面において，はりに作用するせん断力$Q(x)$及び曲げモーメント$M(x)$を求めよ.

分布荷重と集中荷重は$P = 2f_0L$の関係にあるとする.

(4), (5)についてはPを用いずf_0を用いて答えよ.

(4)せん断力のx方向変化の図（せん断力線図:SFD）と曲げモーメントの x方向変化の図（曲げモーメント線図:BMD）を書け.

(5)最大曲げモーメントを求めよ.

(1) **このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメントI_zを求めよ.**

z 軸に関する断面 2 次モーメントI_zは図 1. 1 のように四角形と三角形に分けて考える.

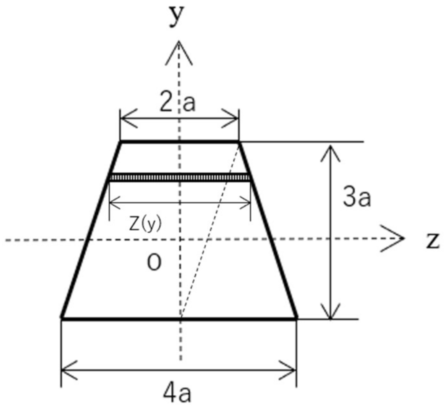


Fig. 1.1 はりの断面図

図心を決定するため，断面一次モーメントを算出する．図 1. 2 に示すように z 軸に平行に台形の底辺と一致するようにz'軸をとる.

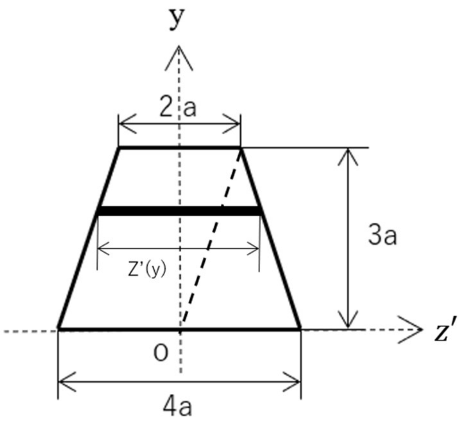


Fig. 1.2 はりの断面図(z'軸)

とある y においてZ'は

$$Z^{'}(y) = 2a + 2a \cdot \frac{3a - y}{3a} = 4a - \frac{2}{3}y \tag{1.1}$$

と示される．また微小面積dAは

$$dA = Z^{'}(y)dy \tag{1.2}$$

である.

断面一次モーメントは

$$S_{Z'}=\int_A ydA=\int_0^{3a} y\left(4a-\frac{2}{3}y\right)dy=12a^3 \tag{1.3}$$

となる．図心y_Cは断面一次モーメントと台形全体の面積Aを用い，

$$y_C=\frac{S_{Z'}}{A}=\frac{12a^3}{(2a+4a)\cdot\frac{3a}{2}}=\frac{4}{3}a \tag{1.4}$$

このように示される．
続いてとある y においてZは

$$Z(y)=2a+2a\cdot\frac{\frac{5}{3}a-y}{3a}=\frac{28}{9}a-\frac{2}{3}y \tag{1.5}$$

と示される．よって図心回りの断面二次モーメントは以下のようになる．

$$I_z=\int_A y^2dA=\int_{-\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}a} y^2\left(\frac{28}{9}a-\frac{2}{3}y\right)dy=\frac{13}{2}a^4 \tag{1.6}$$

（補足 1）
z'軸の断面二次モーメントから平行軸の定理を用いても同様の結果が得られる．
z'軸の断面二次モーメントは

$$I_{z'}=\int_A y^2dA=\int_0^{3a} y^2\left(4a-\frac{2}{3}y\right)dy=\frac{45}{2}a^4 \tag{1.7}$$

である．平行軸の定理は，図心から離れた点の断面二次モーメントを$I_{z'}$，図心の断面二次モーメントをI_z，図心とのはなれた距離をα，はりの断面積をAとすると

$$I_{z'}=I_z+\alpha^2A \tag{1.8}$$

となる．よって

$$I_{\mathrm{z}} = I_{\mathrm{z}'} - \alpha^2 A = \frac{45}{2}a^4 - \left(\frac{4}{3}a\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(4a + 2a) \cdot 3a = \frac{13}{2}a^4 \tag{1.9}$$

である．

（補足 2）

台形の断面二次モーメントは，台形が四角形と三角形で構成されること，平行軸の定理より求めることもできる．図 1. 1 における四角形の図心の y 座標は$a/6$，三角形の図心の y 座標は-$a/3$である．よって平行軸の定理より

$$I_{\mathrm{z}\,四角} = \frac{2a(3a)^3}{12} + \left(\frac{a}{6}\right)^2 \cdot 2a \cdot 3a \tag{1.10}$$

$$I_{\mathrm{z}\,三角} = \frac{2a(3a)^3}{36} + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 \cdot \frac{2a \cdot 3a}{2} \tag{1.11}$$

$$I_{\mathrm{z}} = I_{\mathrm{z}\,四角} + I_{\mathrm{z}\,三角} = \frac{13}{2}a^4 \tag{1.12}$$

となる．

(2) はり全体の**FBD**を描き，壁から受ける反力$\boldsymbol{R}_{\mathbf{B}}$と反モーメント$\boldsymbol{M}_{\mathbf{B}}$を求めよ．

はり全体の FBD を図 1.3 に示す.

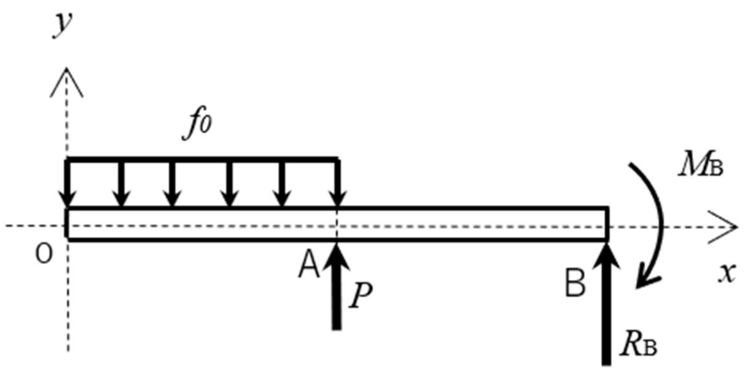


Fig. 1.3 はり全体の FBD

つり合い式より，

$$-\int_0^L f_0 dx' + P + R_{\mathrm{B}} = 0 \tag{1.13}$$

$$R_{\mathrm{B}} = -P + f_0 L$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より，

$$-\int_0^L f_0 x' dx' + PL + 2R_{\mathrm{B}}L - M_{\mathrm{B}} = 0 \tag{1.14}$$

$$M_{\mathrm{B}} = -PL + \frac{3}{2} f_0 L^2$$

(3) 位置$\boldsymbol{x}$の仮想断面において，はりに作用するせん断力$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$及び曲げモーメント$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$を求めよ．

(i) $0 \leq x < \mathrm{L}$のとき

はりの FBD を図 1.4 に示す.

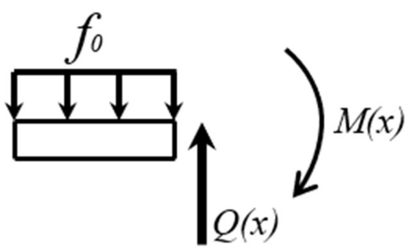


Fig. 1.4 はりの FBD($0 \leq x < \mathrm{L}$)

力のつり合い式より，

$$Q(x) - \int_0^x f_0 dx' = 0 \tag{1.15}$$

$$Q(x) = f_0 x$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より，

$$-M(x) + Q(x) \cdot x - \int_0^x f_0 x' dx' = 0 \tag{1.16}$$

$$M(x) = \frac{1}{2} f_0 x^2$$

(ii) $\mathrm{L} < x \leq 2\mathrm{L}$のとき

はりの FBD を図 1.5 に示す.

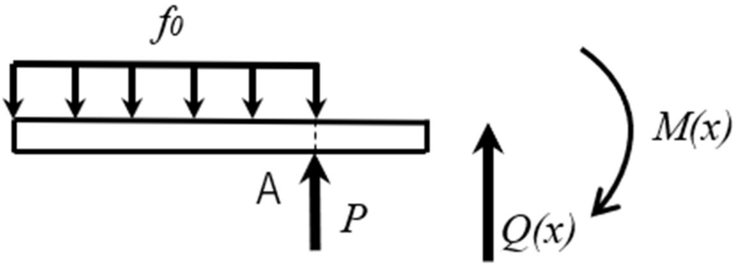


Fig. 1.5 はりの FBD($\mathrm{L} < x \leq 2\mathrm{L}$)

力のつり合い式より，

$$Q(x) + P - \int_0^L f_0 dx' = 0 \tag{1.17}$$

$$Q(x) = -P + f_0 L$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より，

$$-M(x) + Q(x) \cdot x + PL - \int_0^L f_0 x' dx' = 0 \tag{1.18}$$

$$M(x) = -P(x - L) + f_0 Lx - \frac{1}{2} f_0 L^2$$

（別解）

解の重ね合わせでも同様の結果が得られる.

分布荷重によるはりの FBD を図 1.6 に示す.

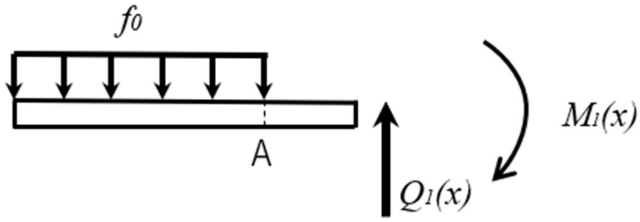


Fig. 1.6 分布荷重によるはりの FBD(L $< x \leq$ 2L)

力のつり合い式より,

$$Q_1(x) - \int_0^L f_0 dx' = 0 \tag{1.19}$$

$$Q_1(x) = f_0 L$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より,

$$-M_1(x) + Q_1(x) \cdot x - \int_0^L f_0 x' dx' = 0 \tag{1.20}$$

$$M_1(x) = f_0 L x - \frac{1}{2} f_0 L^2$$

集中荷重によるはりの FBD を図 1.7 に示す

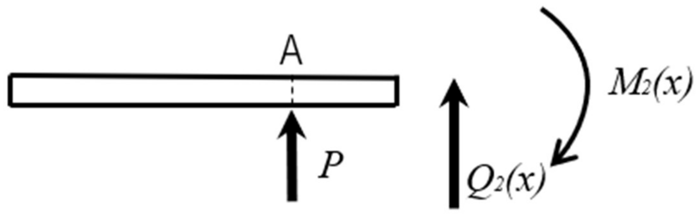


Fig. 1.7 集中荷重によるはりの FBD(L $< x \leq$ 2L)

力のつり合い式より，

$$Q_2(x) + P = 0 \tag{1.21}$$
$$Q_2(x) = -P$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より，

$$-M_2(x) + Q_2(x) \cdot x + PL = 0 \tag{1.22}$$
$$M_2(x) = -P(x - L)$$

よって重ね合わせより$\mathrm{L} < x \leq 2\mathrm{L}$において曲げモーメントは

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x) = -P(x - L) + f_0Lx - \frac{1}{2}f_0L^2 \tag{1.23}$$

(4) せん断力の$\boldsymbol{x}$方向変化の図（せん断力線図：**SFD**）と曲げモーメントの $\boldsymbol{x}$方向変化の図（曲げモーメント線図：**BMD**）を書け．

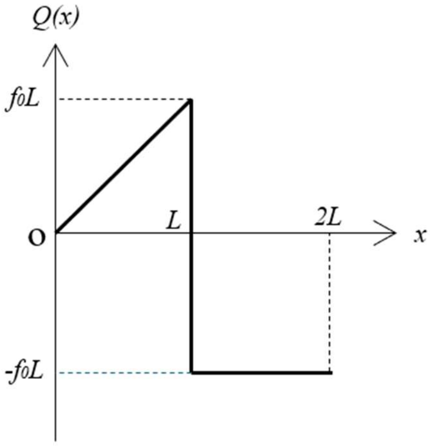


Fig. 1.8 SFD

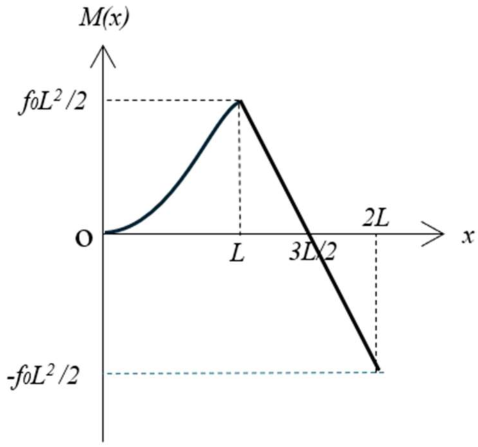


Fig. 1.9 BMD

(5) 最大曲げ応力$\boldsymbol{\sigma}_{max}$の大きさを求めよ．

(4)より最大曲げモーメントは点 A において

$$M_A = \frac{1}{2}f_0L^2 \tag{1.24}$$

（補足）最大曲げ応力は図心から最も離れた点，$y=\frac{5}{3}a$に生じるので，

$$\sigma_{Amax}=\left|\frac{\frac{1}{2}f_0L^2}{\frac{13}{2}a^4}\left(\frac{5}{3}a\right)\right|=\frac{5}{39}\frac{f_0L^2}{a^3} \tag{1.25}$$

[2] 図 2.1 のように左端を壁に固定された長さ $2l$ のはりがある．はりの中央部 A 点に剛体レバーが取り付けられ，上向きの分布荷重 f_0 が作用しており，はりの右端部分 B 点では下向きの荷重 P が作用している．はりの断面形状は図 2.2 のような正六角形になっている．はりの左端部分 O 点の反力を R_O，反モーメントを M_O として，以下の各設問に解答せよ．

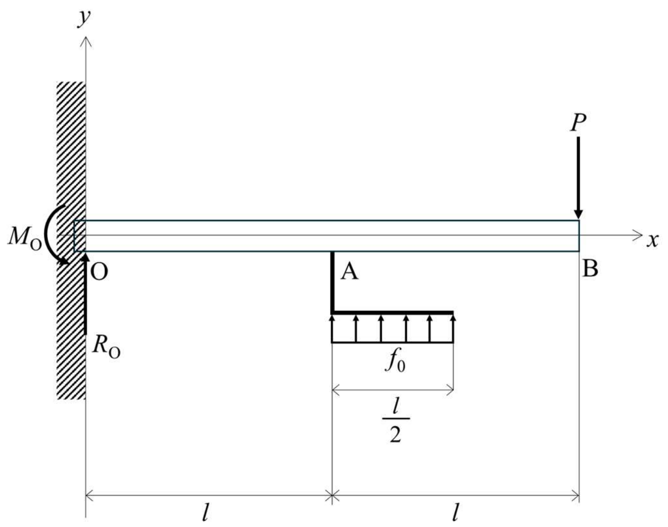


Fig. 2.1　剛体レバーのついたはり

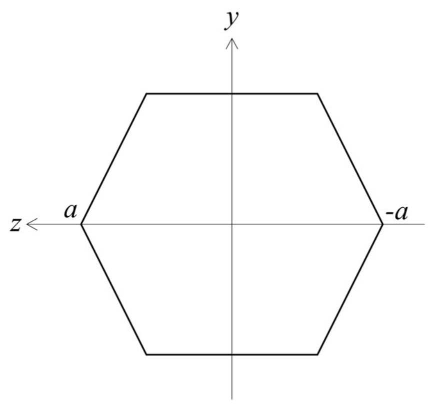


Fig. 2.2　はりの断面形状

(1) はりの z 軸に関する断面二次モーメント I_z 求めよ．

(2) 剛体レバーの FBD を描き，A 点での反力 R_A，反モーメント M_A を求めよ．

(3) はり全体の FBD を描き，壁が受ける反力 R_O，反モーメント M_O を求めよ．ただし，A 点で生じる力と反モーメントを考慮せよ．

以下の問題では，$P = \frac{f_0 l}{4}$ として，f_0 のみを用いて答えよ．

(4) はりに生じるせん断力 $Q(x)$ と曲げモーメント $M(x)$ を求め，それぞれの x 方向変化を図示せよ．

(5) はりの曲げモーメントが最大となる最大曲げ応力 σ_{max} を求めよ．

(1) はりの z 軸に関する断面二次モーメント I_Z を求めよ．

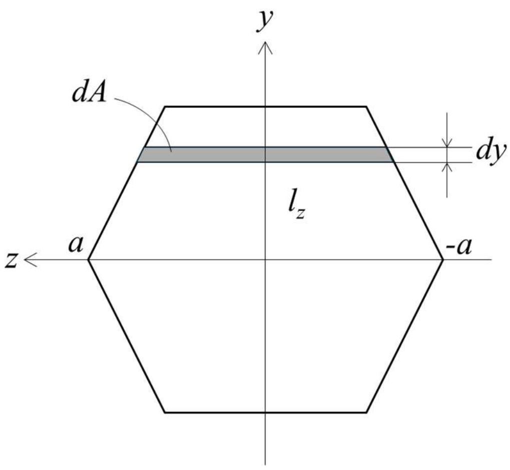


Fig. 2.3　はりの断面形状

図 2.3 において，長さ l_z は以下のように表される．

$$l_z = -\frac{2}{\sqrt{3}}y + 2a \tag{2.1}$$

微小面積 dA は長方形と近似できるため，

$$dA = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}y + 2a\right)dy \tag{2.2}$$

と表される．

したがって，z 軸まわりの断面二次モーメントは

$$I_z = \int_A y^2 dA = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}y + 2a\right)y^2 dy = \frac{5\sqrt{3}}{16}a^4 \tag{2.3}$$

(2) 剛体レバーの FBD を描き，A 点での反力 R_A，反モーメント M_A を求めよ．

図 2.4 に剛体レバーの FBD を示す．

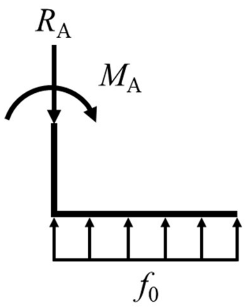


Fig. 2.4　剛体レバーの FBD

力のつり合い式より

$$\frac{f_0 l}{2} - R_A = 0 \tag{2.4}$$

$$R_A = \frac{f_0 l}{2} \tag{2.5}$$

A 点まわりのモーメントのつり合い式より

$$\int_0^{\frac{i}{2}} f_0 x dx - M_A = 0 \tag{2.6}$$

$$M_A = \frac{f_0 l^2}{8} \tag{2.7}$$

(3) **はり全体の FBD を描き，壁が受ける反力 $\boldsymbol{R_O}$，反モーメント $\boldsymbol{M_O}$ を求めよ．ただし，A 点で生じる力と反モーメントを考慮せよ．**

図 2.5 にはり全体の FBD を示す.

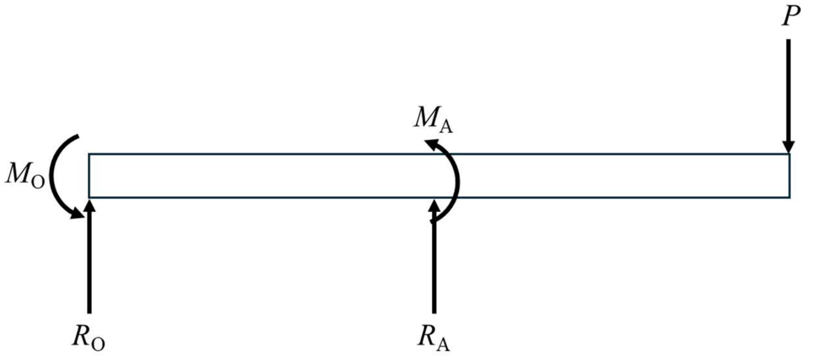


Fig. 2.5　はり全体の FBD

力のつり合い式より

$$R_O + R_A - P = 0 \tag{2.8}$$

$$R_O = P - \frac{f_0 l}{2} \tag{2.9}$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より

$$M_O + M_A + R_A \times l - P \times 2l = 0 \tag{2.10}$$

$$M_O = 2Pl - \frac{5 f_0 l^2}{8} \tag{2.11}$$

(4) はりに生じるせん断力 ***Q(x)***と曲げモーメント ***M(x)***を求め，それぞれの **x** 方向変化を図示せよ．

(i)0≤x≤*l* のとき

図 2.6 に FBD を示す.

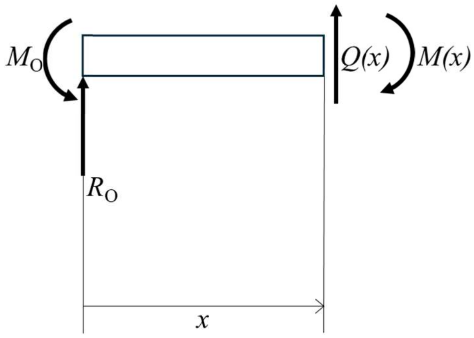


Fig. 2.6　はりの FBD (0≤x≤*l*)

力のつり合い式より

$$R_O + Q(x) = 0 \tag{2.12}$$

$$Q(x) = -P + \frac{f_0 l}{2} = \frac{f_0 l}{4} \tag{2.13}$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より

$$M_O - M(x) + Q(x) \times x = 0 \tag{2.14}$$

$$M(x) = 2Pl - \frac{5f_0 l^2}{8} + \frac{f_0 lx}{4} = \frac{f_0 lx}{4} - \frac{f_0 l^2}{8} \tag{2.15}$$

(ii)*l*≤x≤2*l* のとき

図 2.7 に FBD を示す.

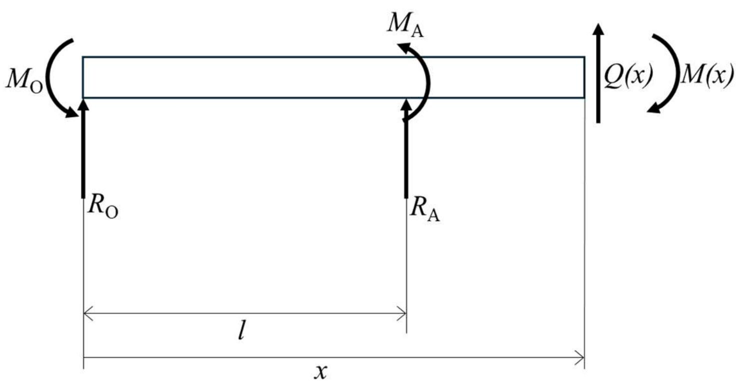


Fig. 2.6　はりの FBD (*l*≤x≤2*l*)

力のつり合い式より

$$R_O + R_A + Q(x) = 0 \tag{2.16}$$

$$Q(x) = -P = -\frac{f_0 l}{4} \tag{2.17}$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より

$$M_O + M_A - M(x) + R_A \times l + Q(x) \times x = 0 \tag{2.18}$$

$$M(x) = 2PL - \frac{f_0 lx}{4} = -\frac{f_0 lx}{4} + \frac{f_0 l^2}{2} \tag{2.19}$$

以上より，せん断力の x 方向変化の図(SFD)と曲げモーメントの x 方向変化の図(BMD)はそれぞれ次のようになる.

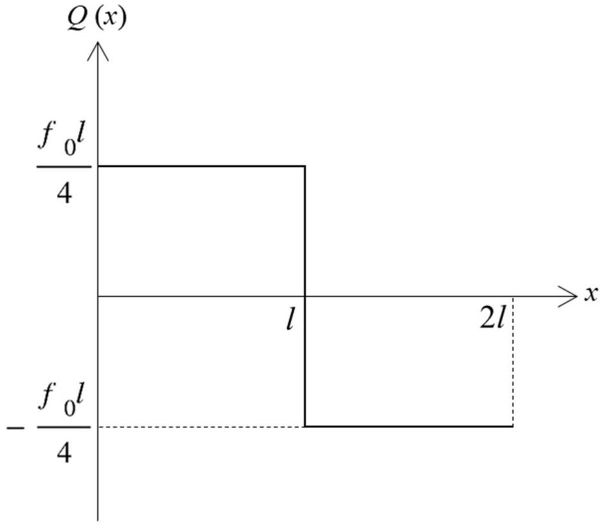


Fig. 2.7　SFD

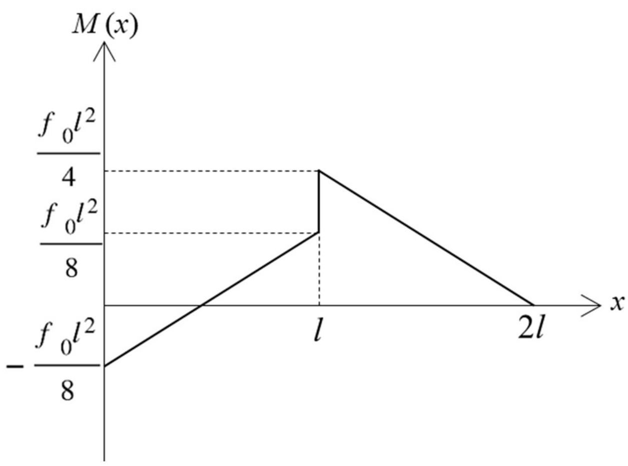


Fig. 2.8　BMD

(5) はりの曲げモーメントが最大となる最大曲げ応力 $\boldsymbol{\sigma_{max}}$ を求めよ．

図 2.9 の BMD より，$x=l$ のときに曲げモーメントは最大となり，曲げモーメント M_{max} は以下のようになる．

$$M_{max} = \frac{f_0 l^2}{4} \tag{2.20}$$

最大曲げ応力は図心から最も離れた点，$y = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ に生じるので，最大曲げ応力は以下のようになる．

$$\sigma_{max} = \left| \frac{M_{max}}{I_z} y \right| = \frac{2 f_0 l^2}{5a^3} \tag{2.21}$$

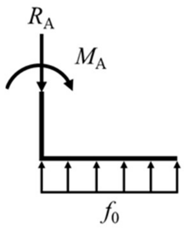
[2]

(1)

$$I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16}a^4$$

(2)

FBD



反力

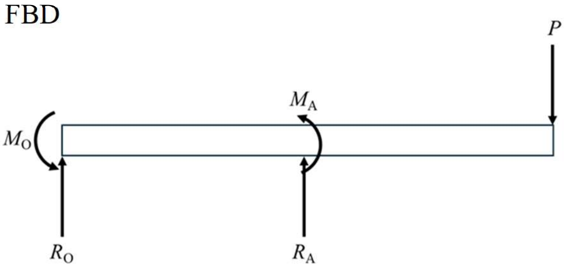
$$R_A = \frac{f_0 l}{2}$$

反モーメント

$$M_A = \frac{f_0 l^2}{8}$$

(3)

FBD



反力

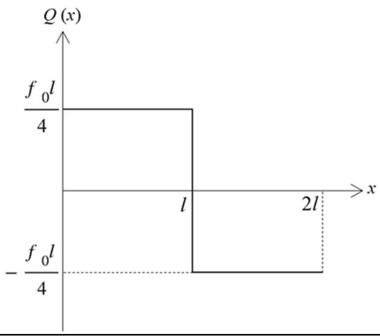
$$R_O = P - \frac{f_0 l}{2}$$

反モーメント

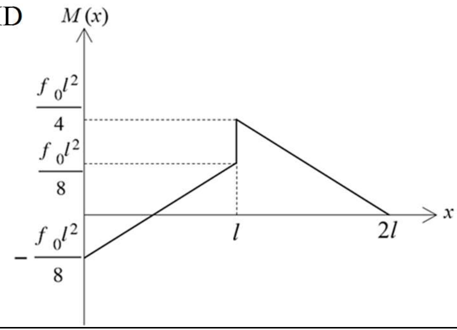
$$M_O = 2Pl - \frac{5f_0 l^2}{8}$$

(4)

SFD



BMD



(5)

$$\sigma_{max} = \frac{2f_0 l^2}{5a^3}$$

※(3)は M_A，R_A を(2)で求めた値で表していても OK.

2024年7月1日	材料力学1	学籍番号： 氏名：

解答用紙(第11回)

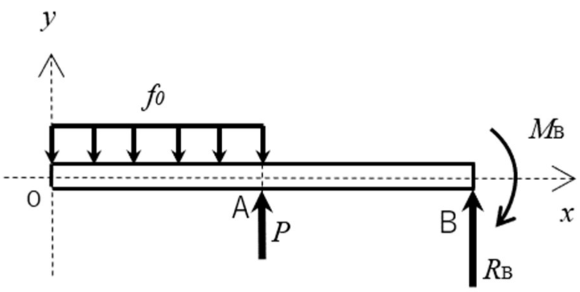
[1]

(1)

$$\frac{13}{2}a^4$$

(2)

FBD



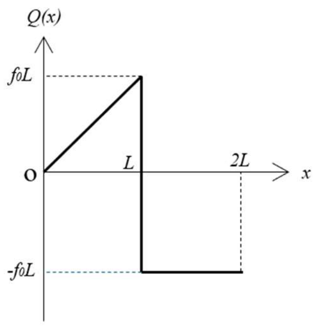
R_B	M_B
$-P+f_0L$	$-PL+\frac{3}{2}f_0L^2$

(3)

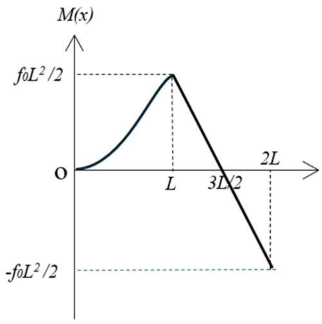
Q(x)	M(x)
$f_0x\ \ (0\le x<L)$ $-P+f_0L(L<x\le 2L)$	$\frac{1}{2}f_0x^2(0\le x<L)$ $-P(x-L)+f_0Lx-\frac{1}{2}f_0L^2(L<x\le 2L)$

(4)

SFD



BMD



(5)

$$\frac{f_0L^2}{2}$$