材料の力学 1　第 10 回演習問題解答解説（2024/6/24 実施）

[1]　図 1 に示すような構造の薄肉円筒が点 O で壁に固定されており，点 B においてトルク T が作用している．構造物の横弾性係数を G として以下の問いに答えよ．ただし，$r>>t$ である．

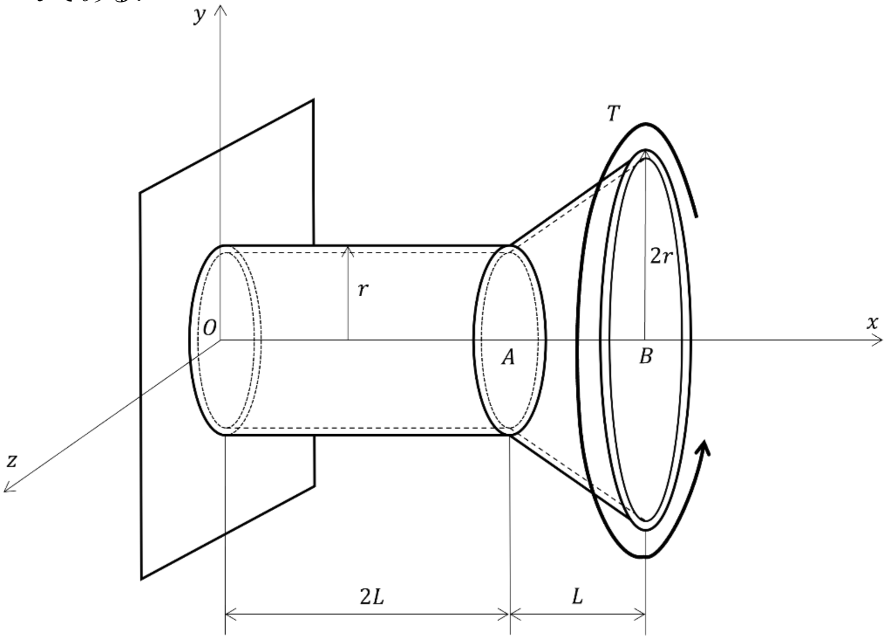


Fig.1.1 薄肉円筒

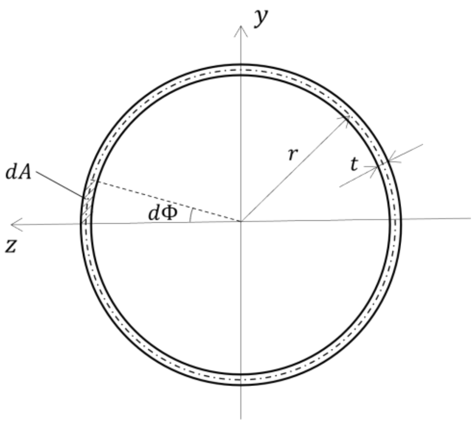


Fig.1.2 任意断面図

(1) 図1.2に示すように，z軸と半径rのなす角を$d\Phi$としたとき，斜線部の面積dAを式で表せ．また，求めたdAを用いて断面2次極モーメントI_pを求めよ．

(2) (1)の結果を利用して図1.1における断面2次極モーメントI_p のx方向分布を図示せよ．

(3) 図1.1における部材表面のせん断応力τのx方向分布を図示せよ．

(4) 微小区間dxにおけるねじれ角$d\theta$ をG，T，I_p，dx を用いて答えよ．

(5) 点 O から見た点 B のねじれ角φ_{OB}を求めよ．

(1) 図1.2に示すように，*z*軸と半径*r*のなす角を*dΦ*としたとき，斜線部の面積*dA*を式で表せ．また，求めた*dA*を用いて断面2次極モーメントI_pを求めよ．

図 1.2 における斜線部の面積 A は

$$dA=rtd\Phi \tag{1.1}$$

したがって，断面 2 次極モーメント I_p は，

$$I_p=\int_A r^2 dA=\int_0^{2\pi} r^2\cdot rtd\Phi=2\pi r^3 t \tag{1.2}$$

(2) (1)の結果を利用して図 1.1 における断面 2 次極モーメント I_p の x 方向分布を図示せよ．

(i)$0\leq x\leq 2L$の場合

外半径は一定なので，

$$I_p(x)=2\pi r^3 t \tag{1.3}$$

(ii)$2L\leq x\leq 3L$の場合

外半径を $r(x)$とすると，

$$r(x)=r(\frac{x}{L}-1) \tag{1.4}$$

よって，

$$I_p(x)=2\pi t\cdot r^3(\frac{x}{L}-1)^3=2\pi r^3 t(\frac{x}{L}-1)^3 \tag{1.5}$$

以上より，断面 2 次極モーメント I_p の x 方向分布は以下のようになる．

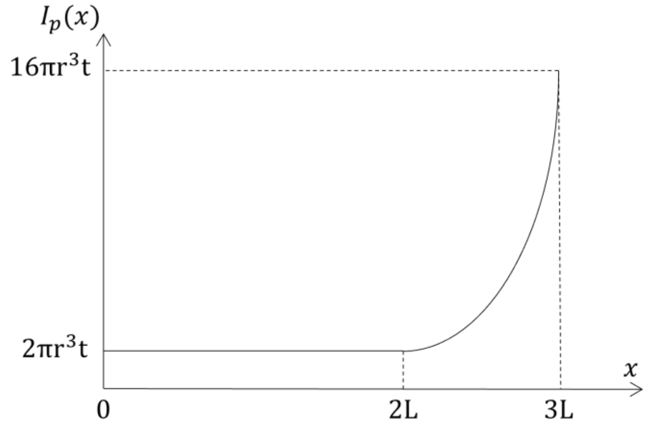


Fig.1.4 断面 2 次極モーメント I_p の x 方向分布

(3) 図1.1における部材表面のせん断応力τのx方向分布を図示せよ.

せん断応力は以下の式で与えられる.

$$\tau = \frac{T}{I_p} r = \frac{T}{2\pi t \{r(x)\}^2} \tag{1.6}$$

(i)$0 \le x \le 2L$の場合

$$\tau(x) = \frac{T}{2\pi r^2 t} \tag{1.7}$$

(ii)$2L \le x \le 3L$の場合

$$\tau(x) = \frac{T}{2\pi t \{r(\frac{x}{L}-1)\}^2} \tag{1.8}$$

以上より，せん断応力の x 方向分布は以下のようになる.

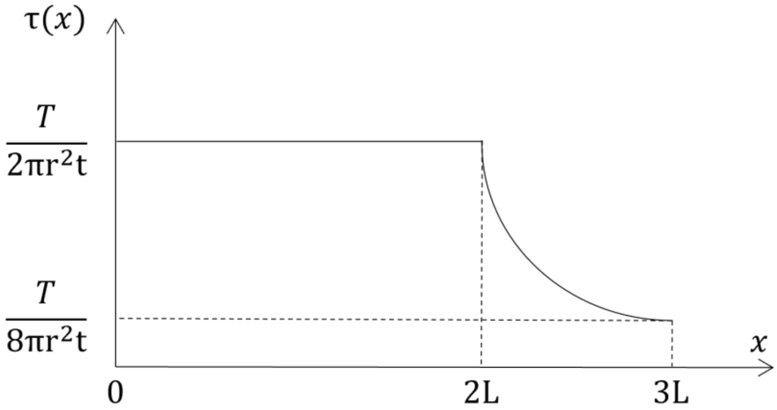


Fig.1.5 せん断応力τの x 方向分布

(4) 図1.3のような微小区間*dx*におけるねじれ角*d*θ を*G*，*T*，*I*ₚ，*dx* を用いて答えよ．

図 1.3 より，

$$d\theta = \gamma \frac{dx}{r} = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{dx}{r} = \frac{T}{GI_p} dx \tag{1.9}$$

(5)点 O から見た点 B のねじれ角φ_{OB}を求めよ．

OA 間，AB 間のねじれ角をφ_{OA}，　φ_{AB}とすると

$$\varphi_{OA} = \frac{T}{G \cdot 2\pi r^3 t} \cdot 2L = \frac{TL}{G\pi r^3 t} \tag{1.10}$$

$$\varphi_{AB} = \int_{2L}^{3L} \frac{T}{G} \cdot \frac{dx}{2\pi r^3 t (\frac{x}{L} - 1)^3} = \frac{3TL}{16G\pi r^3 t} \tag{1.11}$$

以上より，

$$\varphi_{OB} = \varphi_{OA} + \varphi_{AB} = \frac{19TL}{16G\pi r^3 t} \tag{1.12}$$

[2]図 2 に示すように,直径 $4d$,$2d$ の円筒が剛体円盤 C で接合され,それぞれ他の端は剛体壁 A,B に固定されている.剛体円盤 C にはねじりモーメント T が作用している.円筒の横弾性係数を G,点 A 及び点 B における反モーメントをそれぞれ M_A,M_B として以下の設問に答えよ.

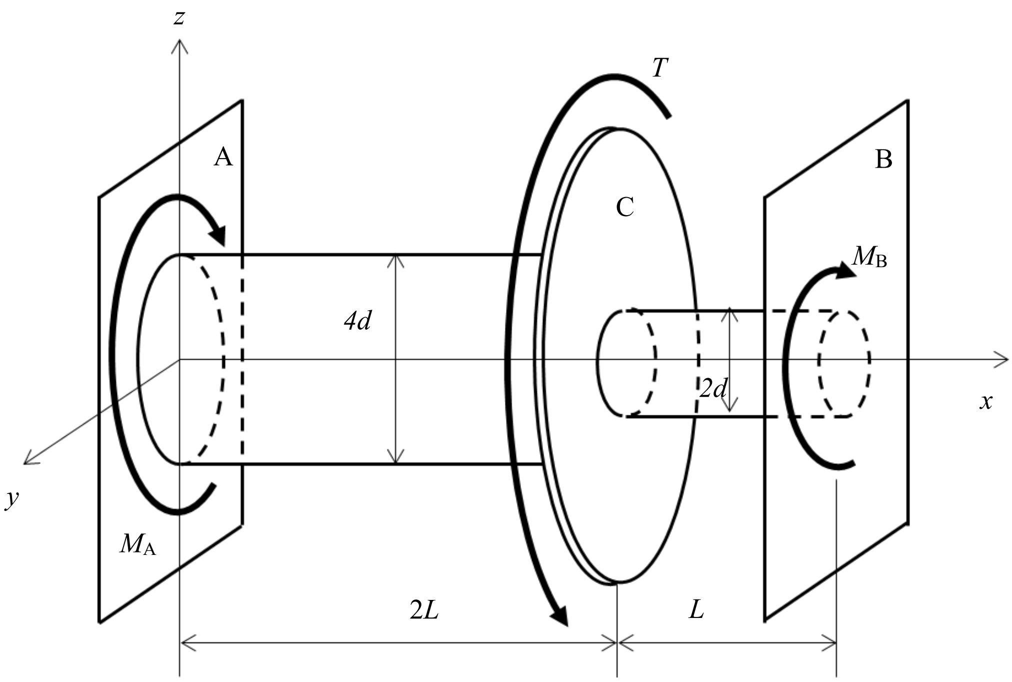


Fig.2 円筒部材

(1) 円筒 1, 2 の断面二次極モーメント I_1, I_2 をそれぞれ求めよ.

(2) 全体の FBD を描き，モーメントのつり合いより得られる条件式を M_A，M_B を用いて示せ

(3) AC 間，CB 間で円筒に生じるねじれ角 φ_{AC}, φ_{CB} を点 A における反モーメント M_A を用いてそれぞれ表せ.

(4) (3)の答を用いて反モーメント M_A，M_B を，T を用いて表せ.

(1) **円筒 1, 2 の断面二次極モーメント I_1, I_2 をそれぞれ求めよ．**

円筒 1，2 の断面 2 次極モーメント I_1,I_2 は以下のように求められる．

$$I_1 = \int r^2 dA = 2\pi \int_0^{2d} r^3 dr = 8\pi d^4 \tag{2.1}$$

$$I_2 = \int r^2 dA = 2\pi \int_0^{d} r^3 dr = \frac{1}{2}\pi d^4 \tag{2.2}$$

(2) **全体の FBD を描き，モーメントのつり合いより得られる条件式を M_A，M_B を用いて示せ**

全体の FBD は図 2.1 のようになる．

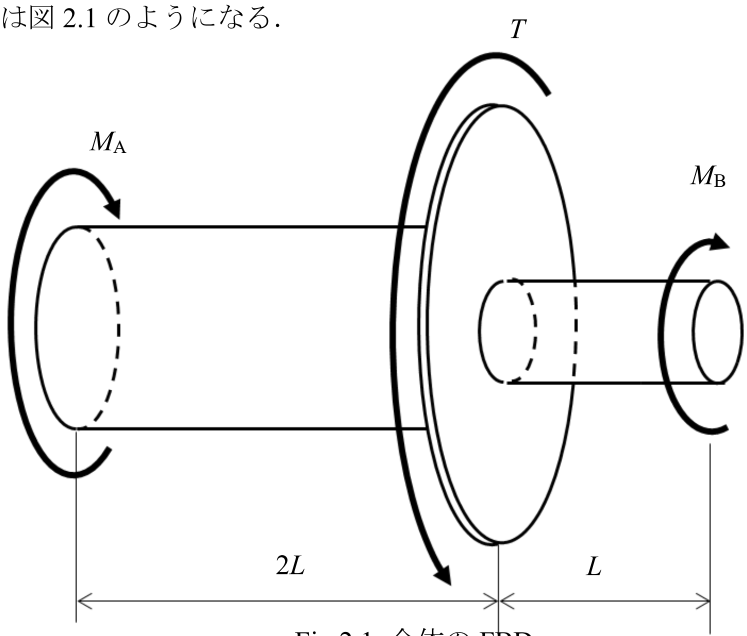


Fig.2.1 全体の FBD

全体の FBD から，モーメントのつり合いより

$$T - M_{\mathrm{A}} - M_{\mathrm{B}} = 0 \tag{2.3}$$

(3) AC 間，CB 間で円筒に生じるねじれ角 $\varphi_{AC}, \varphi_{CB}$ を点 A における反モーメント M_A を用いて表せ.

原点からの距離 x におけるねじりモーメント M(x)は以下のようになる.

(ⅰ)$0 \leqq x \leqq 2L$

FBD は図 2.2 のようになる.

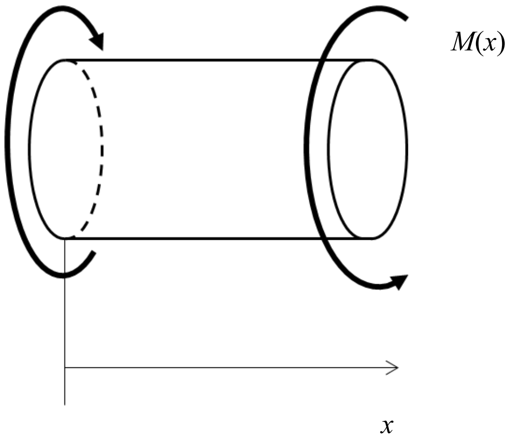


Fig.2.2 FBD($0 \leqq x \leqq 2L$)

FBD から，モーメントのつり合いより

$$M(x) - M_A = 0$$
$$M(x) = M_A \tag{2.4}$$

(ⅱ)$2L \leqq x \leqq 3L$

FBD は図 2.3 のようになる.

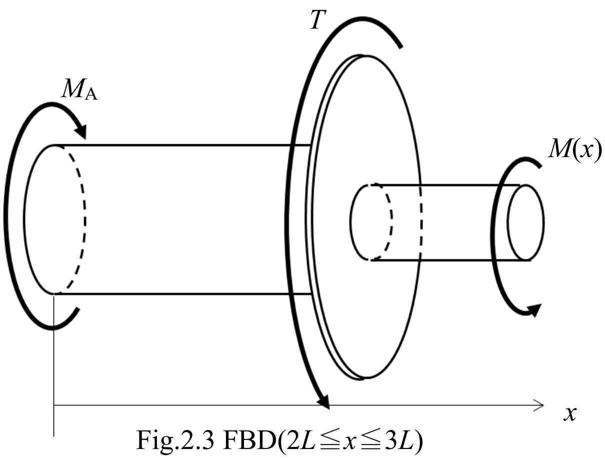


Fig.2.3 FBD($2L \leqq x \leqq 3L$)

FBDから，モーメントのつり合いより

$$M(x)+T-M_{\mathrm{A}}=0$$
$$M(x)=M_{\mathrm{A}}-T \tag{2.5}$$

ねじりモーメントM，部材の長さl，断面二次極モーメントをI_{p}として，ねじれ角φは

$$\varphi=\frac{Ml}{GI_{\mathrm{p}}} \tag{2.6}$$

と計算できる．
よって，式(2.6)より

$$\varphi_{\mathrm{AC}}=\frac{M_{\mathrm{A}}\cdot 2L}{GI_1}=\frac{2M_{\mathrm{A}}L}{G\cdot 8\pi d^4}=\frac{M_{\mathrm{A}}L}{4\pi G d^4} \tag{2.7}$$

$$\varphi_{\mathrm{CB}}=\frac{(M_{\mathrm{A}}-T)L}{GI_2}=\frac{(M_{\mathrm{A}}-T)L}{G\cdot\frac{1}{2}\pi d^4}=\frac{2(M_{\mathrm{A}}-T)L}{\pi G d^4} \tag{2.8}$$

(4) **(3)の答を用いて，$\boldsymbol{M_{\mathrm{A}}}$，$\boldsymbol{M_{\mathrm{B}}}$を，$\boldsymbol{T}$を用いて表せ．**
両端が固定されているため

$$\varphi_{\mathrm{AC}}+\varphi_{\mathrm{CB}}=0 \tag{2.9}$$

式(2.9)より

$$\frac{M_{\mathrm{A}}L}{4\pi G d^4}+\frac{2(M_{\mathrm{A}}-T)L}{\pi G d^4}=0$$

$$M_{\mathrm{A}}=\frac{8}{9}T \tag{2.10}$$

式(2.3)より

$$M_{\mathrm{B}}=\frac{1}{9}T \tag{2.11}$$

2024年6月24日	材料力学1	学籍番号： 氏名：

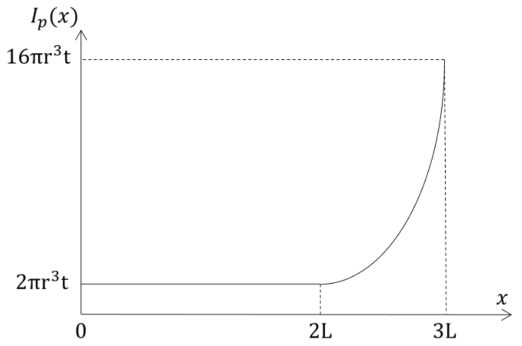
解答用紙(第10回)

[1]

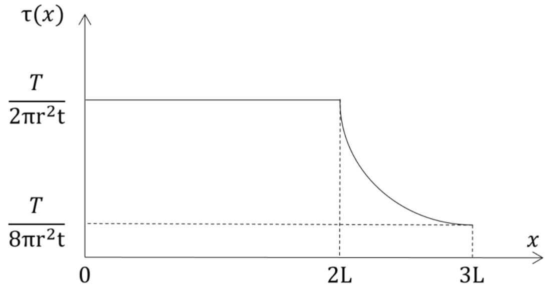
(1)

$$dA = rtd\Phi$$
$$2\pi r^3 t$$

(2)



(3)



(4)

$$\frac{T}{GI_p}dx$$

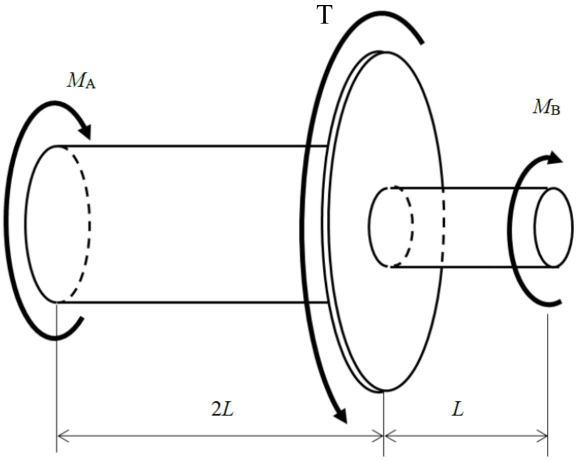
(5)

$$\frac{19TL}{16G\pi r^3 t}$$

[2] (1)

$I_1 = 8\pi d^4$
$I_2 = \frac{1}{2}\pi d^4$

(2)



条件式	$T - M_A - M_B = 0$

(3)

$\varphi_{AC} = \dfrac{M_A L}{4\pi G d^4}$
$\varphi_{CB} = \dfrac{2(M_A - T)L}{\pi G d^4}$

(4)

$M_A = \frac{8}{9}T$
$M_B = \frac{1}{9}T$