第 9 回演習問題

[1]図 1.1～図 1.3 のような形状の断面があるとする．以下の設問に答えよ．
有効数字は 3 桁とする．

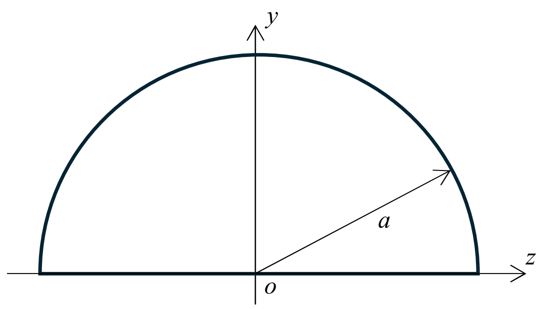


Fig. 1.1 半円断面

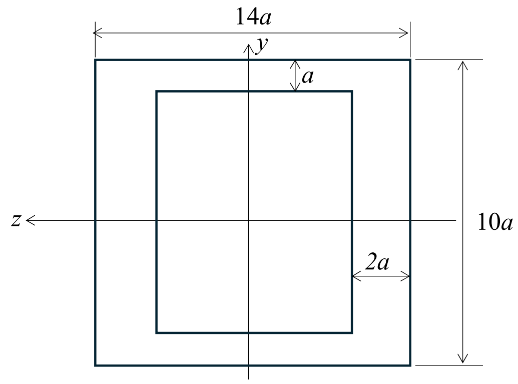


Fig. 1.2 ロの字型形状

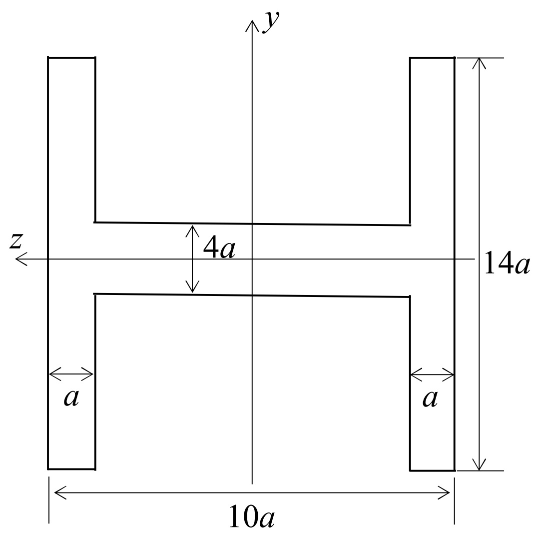


Fig. 1.3 H 字型形状

(1) 図 1.1 について，z 軸に関する断面一次モーメント S_z を求めよ

(2) 図 1.1 について，図心の y 座標である y_c を求めよ．

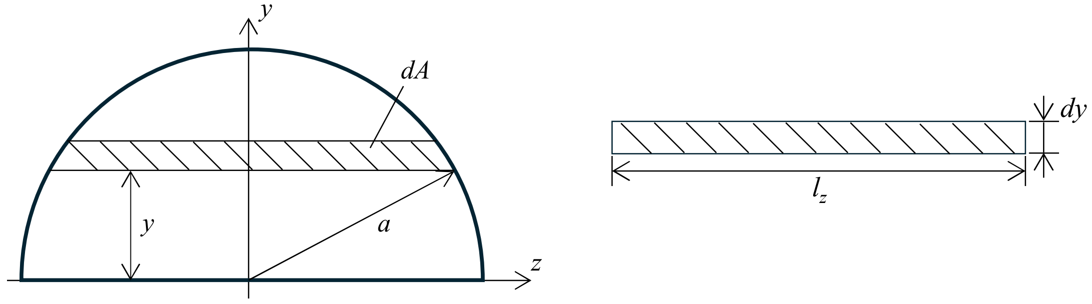
(3) 図 1.2 について，z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ

(4) 図 1.3 について，z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ

(5) 図 1.2 と図 1.3 の断面を持つはりの y 方向に同一の力が作用した場合，どちらの部材が曲がりにくいか答えよ．また，その理由を説明せよ．ただし，両者の縦弾性係数 E は等しいものとする．

(1) 図 1.1 について，*z* 軸に関する断面一次モーメント S_z を求めよ．

まず，計算に必要になる微小面積 *dA* を考える．



(a) 半円内の幾何学的関係　　(b) 微小面積 *dA* の拡大面積

Fig. 1.4　*z* 軸に沿った方向の微小面積

図 1.4(a)より，長さ l_z は以下のように表される．

$$l_z = 2\sqrt{a^2 - y^2} \tag{1.1}$$

微小面積 *dA* は，図 1.4(b)のように長方形と近似できるため

$$dA = l_z \cdot dy = 2\sqrt{a^2 - y^2}\,dy \tag{1.2}$$

と表される，よって，断面一次モーメント S_z は

$$S_z = \int y dA = \int_0^a 2y\sqrt{a^2 - y^2}\,dy = 2\left[-\frac{\left(a^2 - y^2\right)^{3/2}}{3}\right]_0^a = \frac{2a^3}{3} \tag{1.3}$$

のように求められる．

(2)図 1.1 について，図心の *y* 座標である y_c を求めよ．

図心の *y* 座標である y_c は，前問で求めた断面一次モーメントを用いて，

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{4a}{3\pi} \tag{1.4}$$

このように求められる．ここで *A* は，半円の面積である．

(3)図 1.2 について，z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ

図 1.2 の断面二次モーメントは，図 1.5 のように①の長方形の断面二次モーメント I_{z1} から，②の長方形の断面二次モーメント I_{z2} を引くことで求められる．

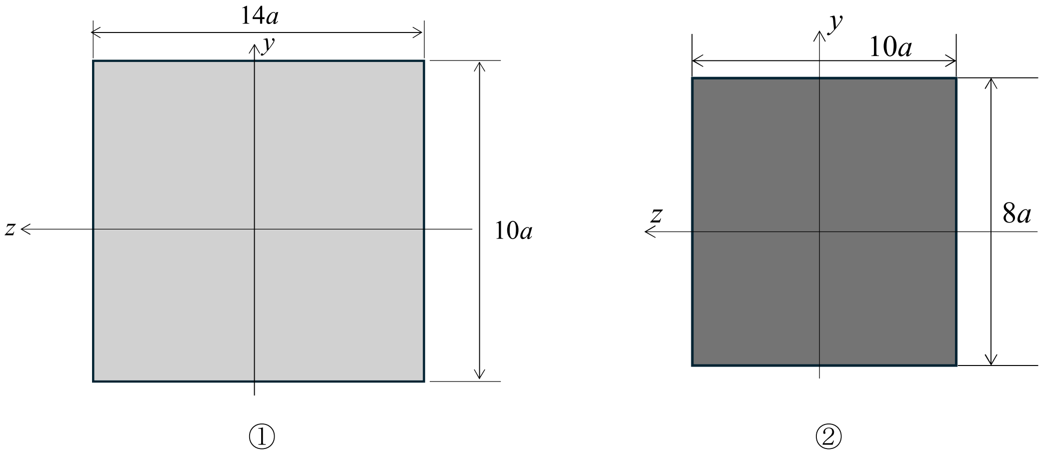


Fig. 1.5　ロ字型形状の断面二次モーメントの算出

それぞれ z 軸に対称であるため，長方形形状の断面二字モーメントの式を用いて，以下のように求められる．

$$I_{z1} = \frac{1}{12} \cdot 14a \cdot (10a)^3 = \frac{3500}{3} a^3 \tag{1.4}$$

$$I_{z2} = \frac{1}{12} \cdot 10a \cdot (8a)^3 = \frac{1280}{3} a^3 \tag{1.5}$$

したがって，求める値は

$$I_z = I_{z1} - I_{z2} = \frac{3500}{3} a^3 - \frac{1280}{3} a^3 = \frac{2220}{3} a^3 = 740 a^3 \tag{1.6}$$

となる．

(4)図 1.3 について，z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ

図 1.3 の H 型形状の断面二次モーメントは，図 1.6 のように①の長方形の断面二次モーメント I_{z1} と二つ分の②の長方形の断面二次モーメント I_{z2} の和で求められる．

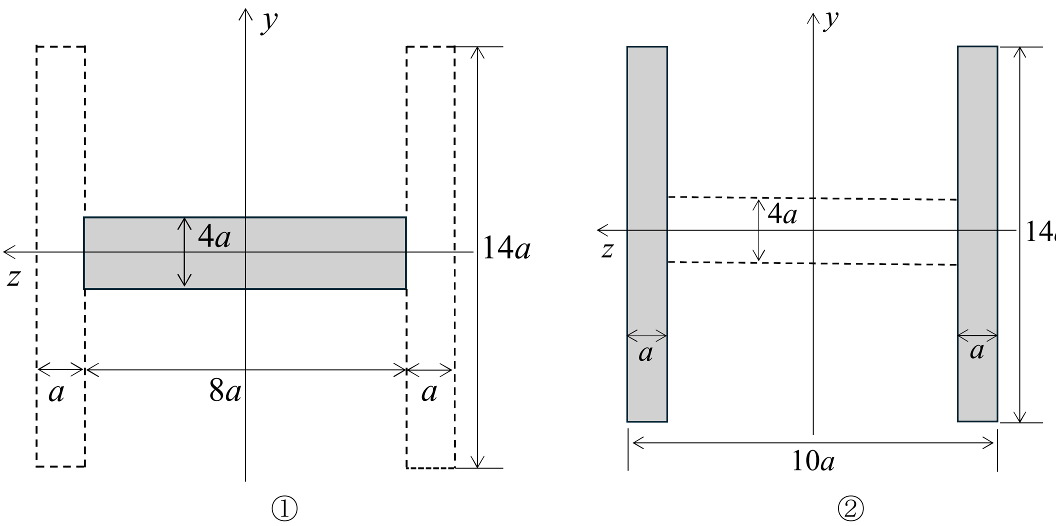


Fig. 1.6　H 型形状の断面二次モーメントの算出

それぞれ z 軸に対称であるため，長方形形状の断面二次モーメントの式を用いて，

$$I_{z1} = \frac{1}{12} \cdot 8a \cdot (4a)^3 = \frac{128}{3} a^3 \tag{1.7}$$

$$I_{z2} = \frac{1}{12} \cdot a \cdot (14a)^3 = \frac{686}{3} a^3 \tag{1.8}$$

したがって，求める断面二次モーメントは

$$I_z = I_{z1} + 2I_{z2} = \frac{128}{3} a^3 + \frac{1372}{3} a^3 = \frac{1884}{3} a^3 = 500a^3 \tag{1.9}$$

となる．

(5)図 1.2 と図 1.3 の断面を持つはりの y 方向に同一の力が作用した場合，どちらの部材が曲がりにくいか答えよ．また，その理由を説明せよ．ただし，両社の縦弾性係数 E は等しいものとする．

縦弾性係数 E と断面二次モーメント I_z の積 EI_z は，曲げ剛性と呼ばれ，部材の曲がりにくさを表す．本問において，E は 2 つの部材で等しいとしているため，曲げ剛性の大小は断面二次モーメントに依存する．このとき断面二次モーメントは，図 1.2 の部材の方が大きいので，図 1.3 の部材より曲がりにくいといえる．下に模範解答を示す．

$$I_{z1.2} = 740a^3 > 500a^3 = I_{z1.3} \tag{1.10}$$

図 1.2

理由：断面二次モーメントが図 1.3 の部材よりも大きいため，曲げ剛性が大きくなるから．

[2] 同一平面内で直角に折れ曲がっている片持ちはりがある．壁と棒の接着部分を O 点，A 点，B 点における断面をそれぞれ断面 A，断面 B とする．それぞれの点で局所座標系を図 2 に示すように定義する．以下の問いに答えよ．ただし，棒にかかる重力は無視できる．

始めに，図 2 のように $0 \leq x_A \leq a$ の範囲において分布荷重 p をかけた場合を考える．

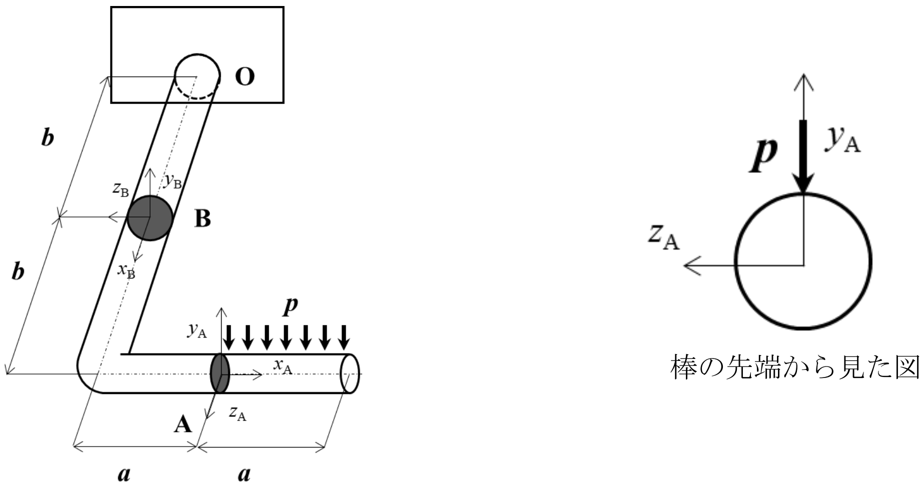


Fig. 2 分布荷重をかけた中実丸棒

(1)　図 2 の断面 A に作用する断面力$(F_x^{\mathrm{A}}, F_y^{\mathrm{A}}, F_z^{\mathrm{A}})$とモーメント$(M_x^{\mathrm{A}}, M_y^{\mathrm{A}}, M_z^{\mathrm{A}})$を求めよ．

(2)　図 2 の断面 B に作用する断面力$(F_x^{\mathrm{B}}, F_y^{\mathrm{B}}, F_z^{\mathrm{B}})$とモーメント$(M_x^{\mathrm{B}}, M_y^{\mathrm{B}}, M_z^{\mathrm{B}})$を求めよ．

次に，図 2 でかけた荷重に加え，図 3 のように先端に荷重 R，棒の折れ曲がる点に荷重 R をかけた．

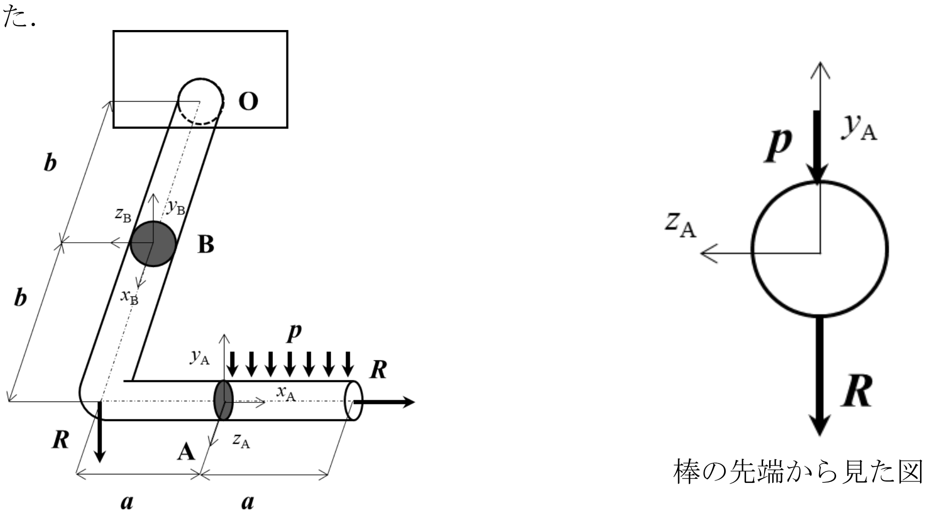


Fig.3 さらに荷重 R をかけた中実丸棒

(3)　図 3 の断面 A に作用する断面力$(F_x^{\mathrm{A}}, F_y^{\mathrm{A}}, F_z^{\mathrm{A}})$とモーメント$(M_x^{\mathrm{A}}, M_y^{\mathrm{A}}, M_z^{\mathrm{A}})$を求めよ．

(4)　図 3 の断面 B に作用する断面力$(F_x^{\mathrm{B}}, F_y^{\mathrm{B}}, F_z^{\mathrm{B}})$とモーメント$(M_x^{\mathrm{B}}, M_y^{\mathrm{B}}, M_z^{\mathrm{B}})$を求めよ．

(1)　図 2 の断面 A に作用する断面力($F_x^{\mathrm{A}}, F_y^{\mathrm{A}}, F_z^{\mathrm{A}}$)とモーメント($M_x^{\mathrm{A}}, M_y^{\mathrm{A}}, M_z^{\mathrm{A}}$)を求めよ.

図 2 について，はじめに自由端に近い断面 A から考える．次の図 2.1 のように A 点において棒を部材①と②に分けて考える．

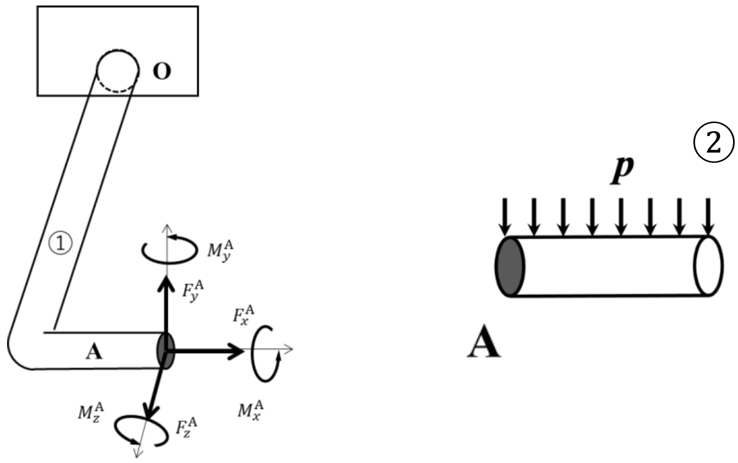


Fig.2.1 図 2 の断面 A で分けた図

また，部材②に関する FBD を図 2.2 に示す．ここで，部材②において断面 A は負の面であるため，断面力とモーメントの正負が反転することに注意する．

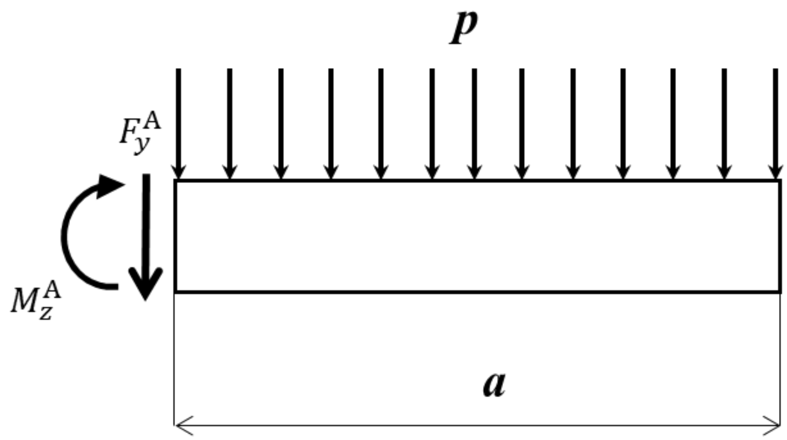


Fig2.2 部材②の FBD

x_{A} と z_{A} 軸方向に外力は作用していないため，断面 A に作用する断面力$F_x^{\mathrm{A}}, F_z^{\mathrm{A}}$は

$$F_x{}^{\mathrm{A}} = F_z{}^{\mathrm{A}} = 0 \tag{2.1}$$

となる．

また，図 2.2 の部材②に関する FBD から力のつりあいより，断面力F_y^{A}は

$$\begin{aligned} F_y{}^{\mathrm{A}} + pa &= 0 \\ F_y{}^{\mathrm{A}} &= -pa \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる．

x_A, y_A, z_A 軸回りのモーメントのつりあいより，断面 A に作用するモーメントは

$$M_x{}^{\mathrm{A}} = M_y{}^{\mathrm{A}} = 0$$
$$M_z{}^{\mathrm{A}} + \int_0^a px\,dx = 0 \qquad (2.3)$$
$$M_z{}^{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}pa^2$$

となる．よって図 2 の断面 A に作用する断面力とモーメントは

$$\left(F_x{}^{\mathrm{A}}, F_y{}^{\mathrm{A}}, F_z{}^{\mathrm{A}}\right) = \left(0, -pa, 0\right)$$
$$\left(M_x{}^{\mathrm{A}}, M_y{}^{\mathrm{A}}, M_z{}^{\mathrm{A}}\right) = \left(0, 0, -\frac{1}{2}pa^2\right) \qquad (2.4)$$

となる．

(2) 図 2 の断面 B に作用する断面力($\boldsymbol{F_x^{\mathrm{B}}, F_y^{\mathrm{B}}, F_z^{\mathrm{B}}}$)とモーメント($\boldsymbol{M_x^{\mathrm{B}}, M_y^{\mathrm{B}}, M_z^{\mathrm{B}}}$)を求めよ．

(2)と同様にして，B 点において部材を③と④に分けて考える．

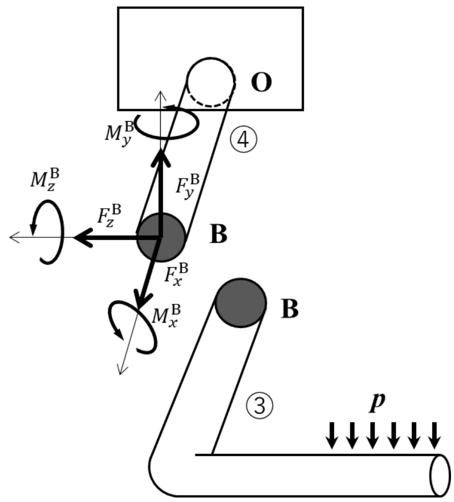


Fig2.3 図 2 の断面 B で分けた図

x_B, z_B 軸方向の外力は 0 なので，断面 B に作用する断面力$F_x^{\mathrm{B}}, F_z^{\mathrm{B}}$は

$$F_x{}^{B} = F_z{}^{B} = 0 \qquad (2.5)$$

となる．

部材③に関する FBD を図 2.4 に示す．

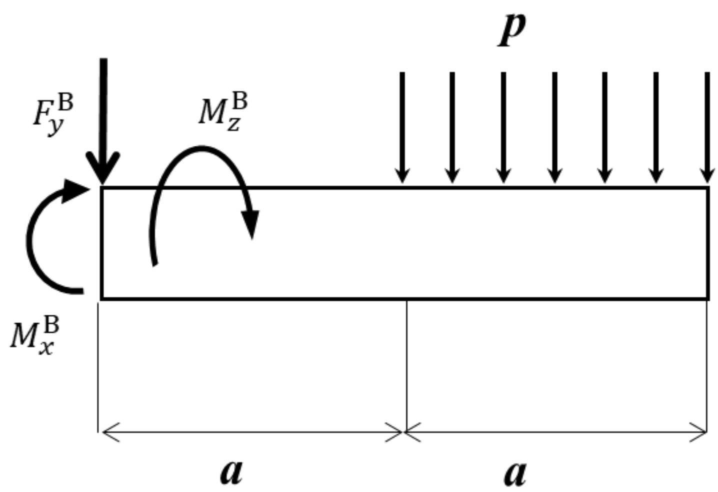


Fig2.4 部材③の FBD

また，部材③の y_{B} 軸方向の力のつりあいから，断面力F_y^{B}は

$$F_y{}^{\mathrm{B}} = -pa \tag{2.6}$$

x_{B}, y_{B}, z_{B} 軸回りのモーメントのつりあいより，断面 B に作用するモーメントは部材③が紙面に対して垂直な方向に長さ b の奥行きがあることを考慮して，

$$\begin{aligned} M_x{}^{\mathrm{B}} &= -\int_a^{2a} pxdx = -\frac{3}{2}pa^2 \\ M_y{}^{\mathrm{B}} &= 0 \\ M_z{}^{\mathrm{B}} &= -pab \end{aligned} \tag{2.7}$$

よって図 2 の断面 B に作用する断面力とモーメントは

$$\begin{aligned} \left(F_x{}^{\mathrm{B}}, F_y{}^{\mathrm{B}}, F_z{}^{\mathrm{B}}\right) &= \left(0, -pa, 0\right) \\ \left(M_x{}^{\mathrm{B}}, M_y{}^{\mathrm{B}}, M_z{}^{\mathrm{B}}\right) &= \left(-\frac{3}{2}pa^2, 0, -pab\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる．

(3)　図 3 の断面 A に作用する断面力($\boldsymbol{F_x^{\mathrm{A}}}, \boldsymbol{F_y^{\mathrm{A}}}, \boldsymbol{F_z^{\mathrm{A}}}$)とモーメント($\boldsymbol{M_x^{\mathrm{A}}}, \boldsymbol{M_y^{\mathrm{A}}}, \boldsymbol{M_z^{\mathrm{A}}}$)を求めよ．

(2)と同様にして，部材①と②に分けて考え，図 3.1 に示す.

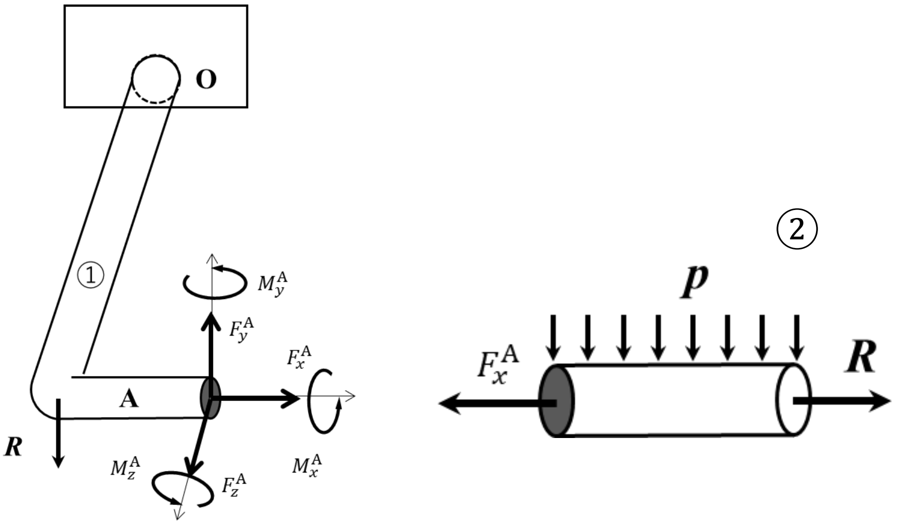


Fig.3.1 図 3 の断面 A で分けた図

また，部材②の FBD を図 3.2 に示す．部材②において断面 A は負の面であるため，断面とモーメントの正負が反転することに注意する．

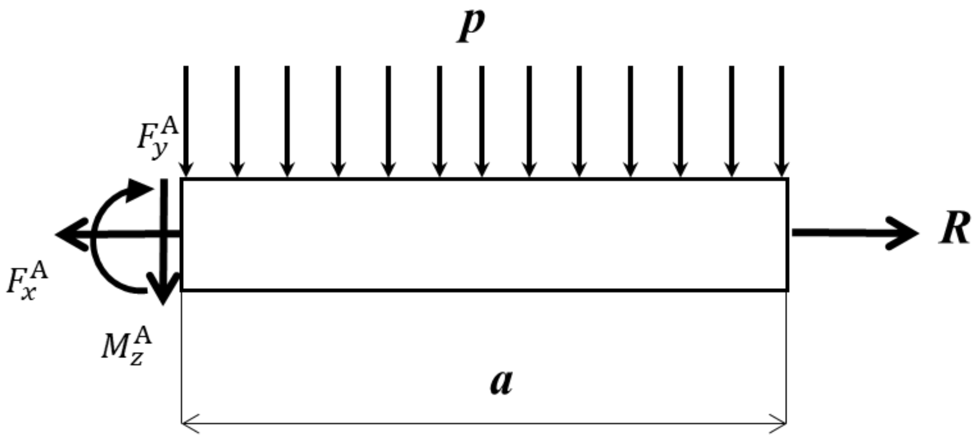


Fig.3.2 部材②の FBD

z_{A} 軸方向の外力は 0 である．また，y_{A} 軸の力のつり合いより，断面力$F_y^{\mathrm{A}}, F_z^{\mathrm{A}}$は

$$\begin{aligned} F_y{}^{\mathrm{A}} + pa &= 0 \\ F_y{}^{\mathrm{A}} &= -pa \\ F_z{}^{\mathrm{A}} &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

また，x_{A}, 方向の力のつりあいより，断面力F_x^{A}は

$$\begin{aligned} F_x{}^{\mathrm{A}} - R &= 0 \\ F_x{}^{\mathrm{A}} &= R \end{aligned} \tag{2.10}$$

x_{A}, y_{A}, z_{A} 軸回りのモーメントのつりあいより，断面 A に作用するモーメントは

$$M_x{}^{\mathrm{A}} = M_y{}^{\mathrm{A}} = 0$$

$$M_z{}^{\mathrm{A}} + \int_0^a px\,dx = 0 \tag{2.11}$$

$$M_z{}^{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}pa^2$$

よって図 3 の断面 A に作用する断面力とモーメントは

$$\left(F_x{}^{\mathrm{A}}, F_y{}^{\mathrm{A}}, F_z{}^{\mathrm{A}}\right) = \left(R, -pa, 0\right)$$

$$\left(M_x{}^{\mathrm{A}}, M_y{}^{\mathrm{A}}, M_z{}^{\mathrm{A}}\right) = \left(0, 0, -\frac{1}{2}pa^2\right) \tag{2.12}$$

となる.

(4)　図 3 の断面 B に作用する断面力($\boldsymbol{F_x^{\mathrm{B}}}, \boldsymbol{F_y^{\mathrm{B}}}, \boldsymbol{F_z^{\mathrm{B}}}$)とモーメント($\boldsymbol{M_x^{\mathrm{B}}}, \boldsymbol{M_y^{\mathrm{B}}}, \boldsymbol{M_z^{\mathrm{B}}}$)を求めよ.

(3)と同様に，B 点についても部材③と④に分け，図 3.3 に示す.

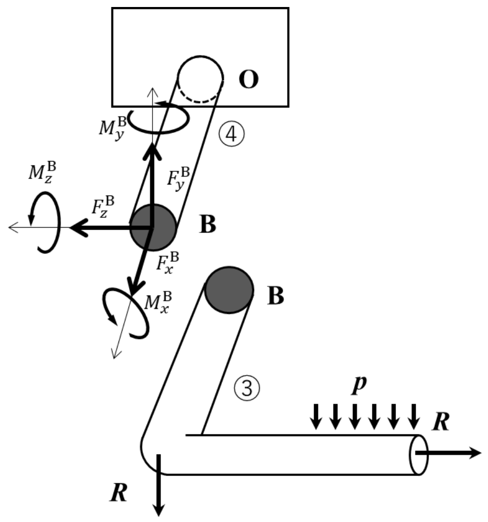


Fig3.3 図 3 の断面 B で分けた図

また，部材③の FBD を図 3.4 に示す．部材③において断面 A は負の面であるため，断面とモーメントの正負が反転することに注意する.

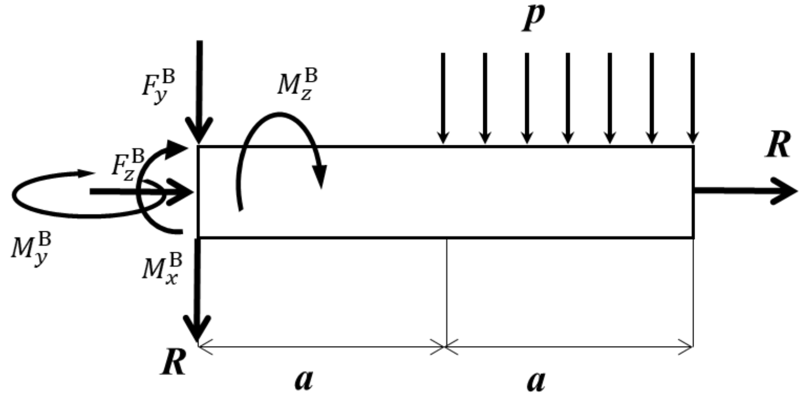


Fig3.4 部材③の FBD

x_B 軸方向の外力は 0 なので，断面 B に作用する断面力F_x^Bは

$$F_x^{\mathrm{B}} = 0 \tag{2.13}$$

また，y_B, z_B 軸方向の力のつり合いより，断面力F_y^B, F_z^Bは

$$\begin{aligned} &F_y^{\mathrm{B}} + pa + R = 0 \\ &F_y^{\mathrm{B}} = -pa - R \\ &F_z^{\mathrm{B}} = -R \end{aligned} \tag{2.14}$$

x_B, y_B, z_B 軸回りのモーメントのつり合いより，断面 B に作用するモーメントは

$$\begin{aligned} M_x^{\mathrm{B}} &= -\int_a^{2a} px\,dx = -\frac{3}{2}pa^2 \\ M_y^{\mathrm{B}} &= Rb \\ M_z^{\mathrm{B}} &= -pab - R \times b \\ &= -pab - Rb \end{aligned} \tag{2.15}$$

よって図 3 の断面 B に作用する断面力とモーメントは

$$\begin{aligned} &\left(F_x^{\mathrm{B}}, F_y^{\mathrm{B}}, F_z^{\mathrm{B}}\right) = \left(0, -pa - R, -R\right) \\ &\left(M_x^{\mathrm{B}}, M_y^{\mathrm{B}}, M_z^{\mathrm{B}}\right) = \left(-\frac{3}{2}pa^2, Rb, -pab - Rb\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

となる.