材料の力学 1　第 7 回演習問題

[1]平面応力状態にある十分に薄い弾性体において, 図 1 のように x-y 座標系から反時計回りに 30°傾いた n-t 座標系に沿う正方形微小要素を考える. 薄い弾性体に対して x 方向に引張応力 5σ, y 方向に圧縮応力 3σ が作用している. 弾性体の縦弾性係数を E, 横弾性係数を G, ポアソン比を ν として, 以下の設問に答えよ. なお, 指示が無ければ解答には σ, E, G, ν のうち必要なものを用いよ.

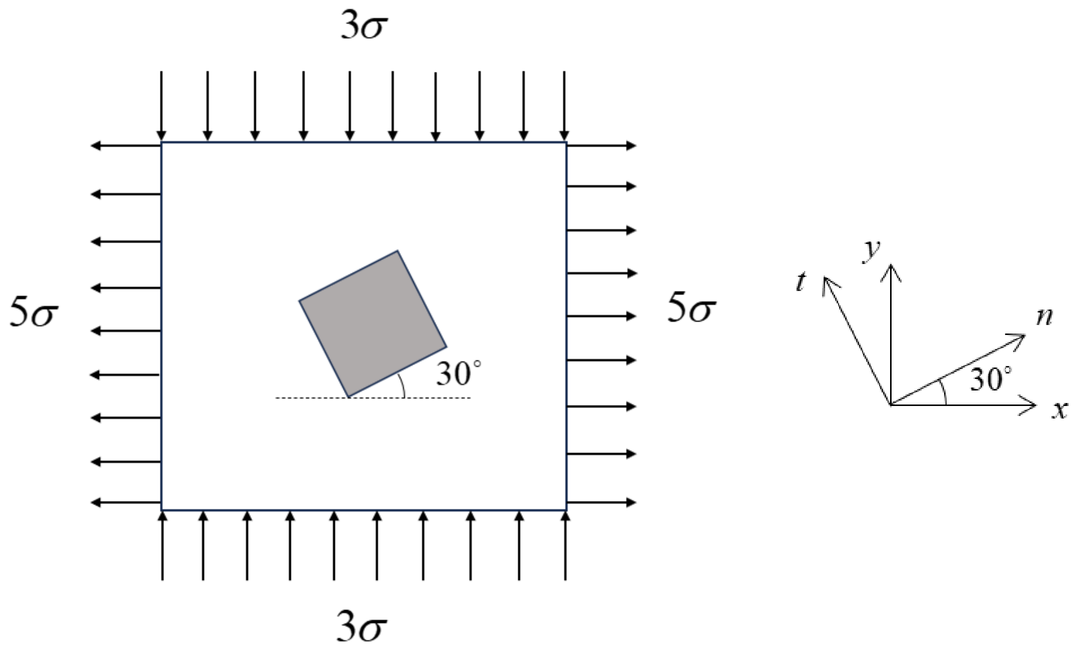


Fig.1 平面応力状態にある弾性体

(1)x-y 座標系における応力テンソルを求めよ.
(2)n-t 座標系における応力テンソルを求めよ.
(3)x-y 座標系におけるひずみテンソルを求めよ.
(4)n-t 座標系におけるひずみテンソルを求めよ. (ここでは G を用いないこと)
(5)n-t 座標系におけるせん断応力 τ_{nt} とせん断ひずみ γ_{nt} の関係を踏まえ, 横弾性係数 G を E, ν を用いて表せ.

(1)*x-y* 座標系における応力テンソルを求めよ.

図から応力テンソルは

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sigma & 0 \\ 0 & -3\sigma \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

となる.

(2)*n-t* 座標系における応力テンソルを求めよ.

モールの応力円を描くと図 1.1 のようになる.

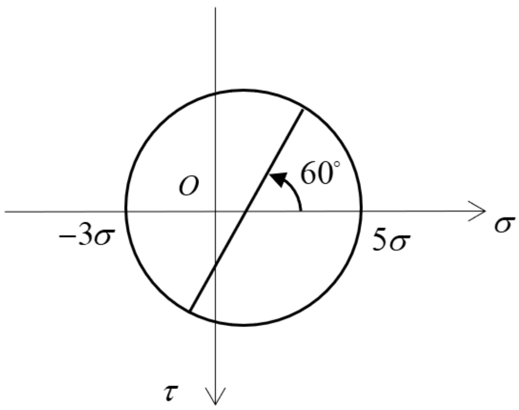


Fig.1.1 モールの応力円

モールの応力円から ***n-t*** 座標系における応力テンソルは,

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sigma & -2\sqrt{3}\sigma \\ -2\sqrt{3}\sigma & -\sigma \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

となる.

また, 行列計算でも求められる.

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\sigma & 0 \\ 0 & -3\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\sigma & -2\sqrt{3}\sigma \\ -2\sqrt{3}\sigma & -\sigma \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

(3)*x-y* 座標系におけるひずみテンソルを求めよ.

平面応力状態より， $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ なので，応力とひずみの関係から

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \\
&= \frac{5+3\nu}{E}\sigma
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \\
&= -\frac{3+5\nu}{E}\sigma
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

よって，ひずみテンソルは

$$
\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5+3\nu}{E}\sigma & 0 \\ 0 & -\dfrac{3+5\nu}{E}\sigma \end{pmatrix} \tag{1.7}
$$

となる.

(4)*n-t* 座標系におけるひずみテンソルを求めよ．(ここでは *G* を用いないこと)

モールのひずみ円を描くと図 1.2 のようになる.

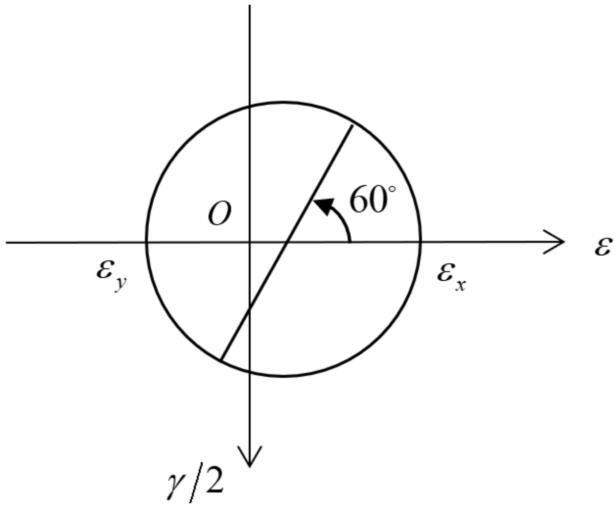


Fig.1.2 モールのひずみ円

モールのひずみ円から *n-t* 座標系におけるひずみテンソルは

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_n & \gamma_{nt}/2 \\ \gamma_{nt}/2 & \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3+\nu}{E}\sigma & -\dfrac{2\sqrt{3}(1+\nu)}{E}\sigma \\ -\dfrac{2\sqrt{3}(1+\nu)}{E}\sigma & -\dfrac{1+3\nu}{E}\sigma \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

となる.

また，行列計算でも求められる.

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \varepsilon_n & \gamma_{nt}/2 \\ \gamma_{nt}/2 & \varepsilon_t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{5+3\upsilon}{E}\sigma & 0 \\ 0 & -\dfrac{3+5\upsilon}{E}\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{3+\nu}{E}\sigma & -\dfrac{2\sqrt{3}\left(1+\nu\right)}{E}\sigma \\ -\dfrac{2\sqrt{3}\left(1+\nu\right)}{E}\sigma & -\dfrac{1+3\nu}{E}\sigma \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

(5)*n-t* 座標系におけるせん断応力 τ_{nt} とせん断ひずみ γ_{nt} の関係を踏まえ，横弾性係数 *G* を *E*，ν を用いて表せ.

n-t 座標系において次の関係式が成り立つ.

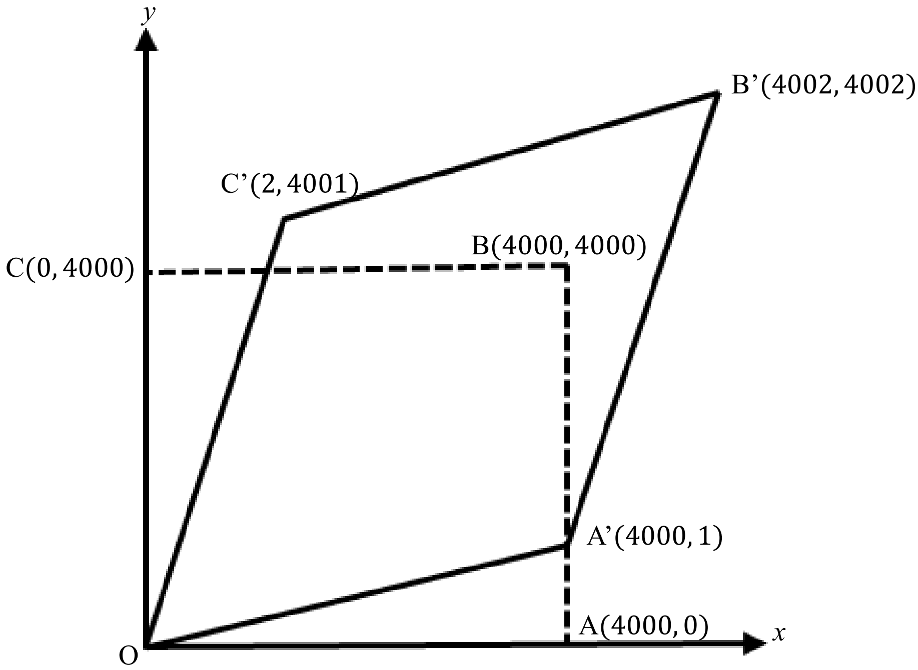
$$
\gamma_{nt} = \frac{1}{G}\tau_{nt} \tag{1.10}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{\tau_{nt}}{\gamma_{nt}} \\
&= \frac{-2\sqrt{3}\sigma}{-\dfrac{4\sqrt{3}\left(1+\nu\right)}{E}\sigma} \\
&= \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

となる.

[2]平面応力状態における弾性体に，垂直応力 σ_y 及びせん断応力 τ が作用している．$\nu = 0.3$ $E = 10[GPa]$



(1) 垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$, および，せん断ひずみ γ_{xy} を求めよ．有効数字は 2 桁としたうえで $\mu(10^{-6})$を用いて表せ.

(2) モールのひずみ円を描き，中心と半径を求めよ.

(3) 主ひずみを求めよ.

(4) 応力とひずみの関係から主応力を求めよ．但し有効数字 2 桁，単位は MPa とする.

(5) モールの応力円を描き，中心と半径を求めよ．但し有効数字 2 桁，単位は MPa とする.

(6) モールの応力円から，この弾性体にかかっている垂直応力 σ_y 及びせん断応力 τ を求めよ.

(1) 垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$, および，せん断ひずみ γ_{xy} を求めよ． 有効数字は 2 桁としたうえで μ($\mathbf{10^{-6}}$)を用いて表せ.

$$\varepsilon_x = 0 \tag{1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\mathrm{OC'} - \mathrm{OC}}{\mathrm{OC}} = \frac{1}{4000} = 250\mu \tag{2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{OC}} = \frac{1}{4000} + \frac{2}{4001} \approx 750\mu \tag{3}$$

(2) モールのひずみ円を描き，中心と半径を求めよ.

(1)よりひずみテンソルは

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 375 \\ 375 & 250 \end{pmatrix}\mu \tag{4}$$

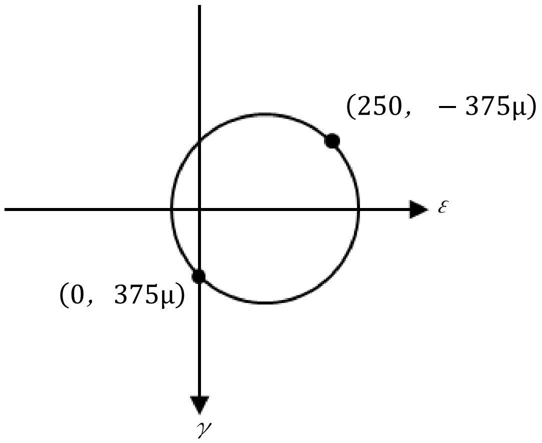


Fig2.1 より中心は(125μ，0), 半径は

$$\sqrt{125^2 + 375^2}\mu \approx 395\mu \tag{5}$$

(3) 主ひずみを求めよ.

Fig2.1 より

$$\varepsilon_1 = 395\mu + 125\mu = 520\mu,\ \ \varepsilon_2 = -395\mu + 125\mu = -270\mu \tag{6}$$

よって

$$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) = (520,\ -270)\mu$$

(4) 応力とひずみの関係から主応力を求めよ．. 但し有効数字 2 桁，単位は *MPa* とする.

応力とひずみの関係式より

$$\sigma_1 = \frac{E(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)}{1 - \nu^2}$$

$$= \frac{10(520 - 0.3 \times 270)}{1 - 0.3^2} \times 10^3 \qquad (6)$$

$$\approx 4.8[MPa]$$

$$\sigma_2 = \frac{E(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)}{1 - \nu^2}$$

$$= \frac{10(-270 + 0.3 \times 520)}{1 - 0.3^2} 10^3 \qquad (7)$$

$$\approx -1.2[MPa]$$

よって主応力は

$$(\sigma_1，\sigma_2) = (4.8，\ -1.2)\ [MPa] \qquad (8)$$

(5) モールの応力円を描き，中心と半径を求めよ. 但し有効数字 2 桁，単位は *MPa* とする.

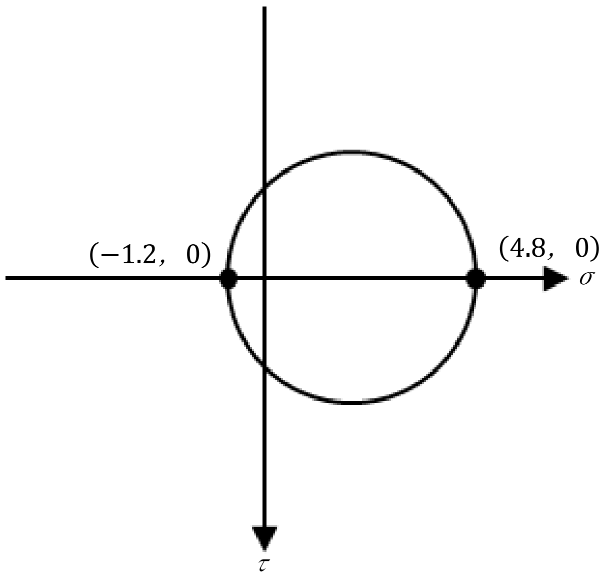
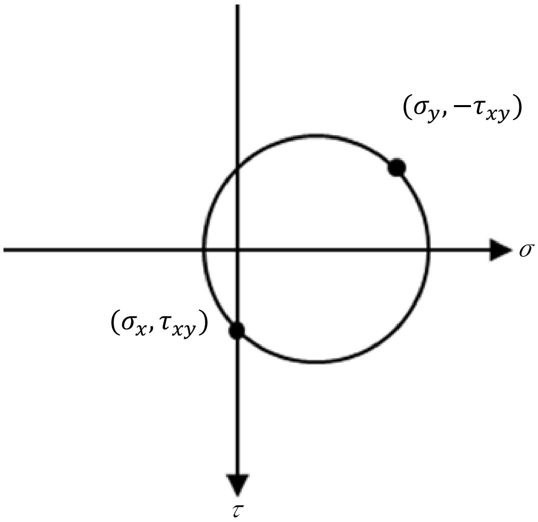


Fig2.2 より中心は(1.8，0)$[MPa]$, 半径は3.0$[MPa]$

(6) **この弾性体にかかっているせん断応力 τ を求めよ.**



σ_xが作用していないこと，σ_y，τ_{xy}が正方向に作用していることを考慮すれば，以上 2 点の座標を求めればよいことがわかる.

円の方程式は

$$(\sigma - 1.8)^2 + \tau^2 = 9 \tag{9}$$

であることから,

$$\sigma_y = 3.6[MPa], \tau_{xy} = 2.4[MPa] \tag{10}$$