[1] 平面応力状態にある弾性体において，せん断応力 τ=-48 [MPa]が図 1 のように作用している．その結果，弾性体の表面に描かれた正方形 OABC（一辺の長さ a=50[mm]）が n 軸に関して対称である平行四辺形 OA'B'C'に変形した．ただし，A,B 点の y 方向の変位，B,C 点の x 方向の変位はともに $b=1\times10^{-2}$[mm]であり，正方形の一辺の長さに対し十分小さいものである．n-t 座標系は x-y 座標系を反時計回りに 45°回転した座標系である．弾性体の材料定数を縦弾性係数 E，ポアソン比 ν=0.3 とし，以下の設問に答えよ．

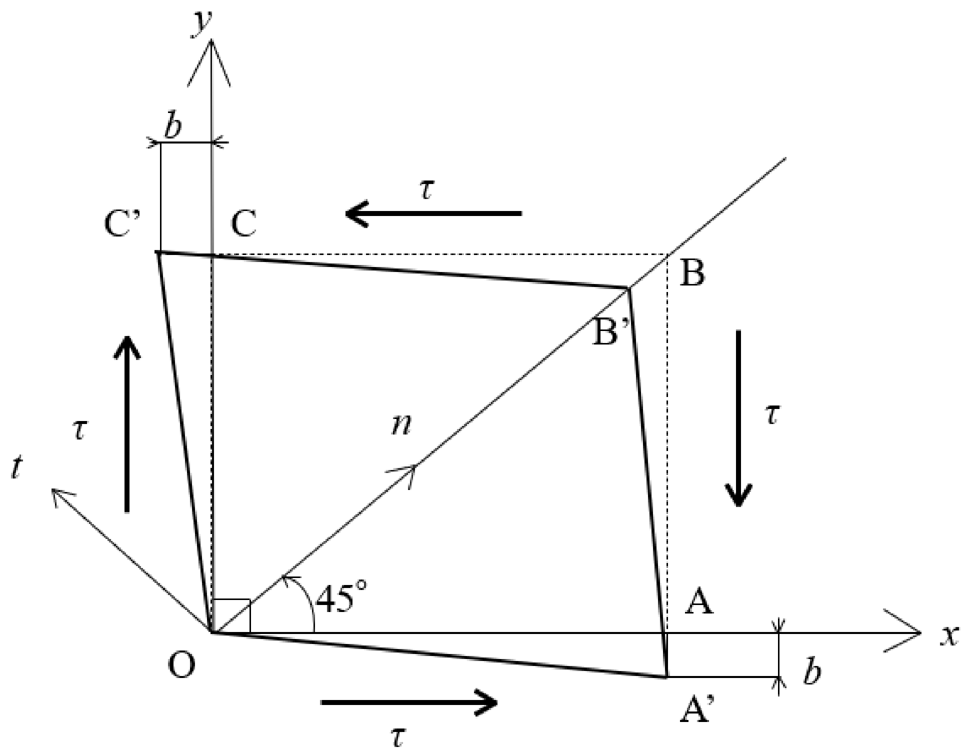

Fig.1 平面応力状態にある弾性体

(1)　x 方向の垂直ひずみ ε_x，y 方向の垂直ひずみ ε_y，せん断ひずみ γ_{xy}を求め，μ を含む形式で表せ．ただし，μ は 10^{-6}を表す．

(2)　点 B(a,a)が変形後に点 B'(a-b,a-b)になったとして，n 方向の垂直ひずみ ε_nを求め，μ を含む形式で表せ．

(3)　(1)の結果を用いて，x-y 座標系のひずみテンソルを求め，モールのひずみ円を描き，中心と半径を明記せよ．

(4)　(3)で描いたモールのひずみ円から n-t 座標系におけるひずみテンソルを求め，μ を含む形式で表せ．

(5)　x-y 座標系における応力テンソルからモールの応力円を描き，中心と半径を明記せよ．さらに，n-t 座標系における応力テンソルを求めよ．（単位は書かなくてよい）

(6)　平面応力状態下の応力−ひずみの関係式 $\varepsilon_n = \frac{1}{E}(\sigma_n - \nu\sigma_t)$ に対して，(2)で求めたひずみと，(5)で求めた応力を適用することで，弾性体の縦弾性係数 E を求めよ．

(1) *x* 方向の垂直ひずみ方向の垂直ひずみ ε_x,y 方向の垂直ひずみ ε_y, せん断ひずみ γ_{xy}を求め,μ を含む形式で表せ.ただし,μ は 10^{-6} を表す.

ひずみの定義から以下のように求められる.

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{OA'\text{-}OA}}{\mathrm{OA}} = 0\mu \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\mathrm{OC'\text{-}OC}}{\mathrm{OC}} = 0\mu \tag{1.2}$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{OA}} - \frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{OC}} = -\frac{b}{a} - \frac{b}{a} = -\frac{2b}{a} = -\frac{2\times1\times10^{-2}}{50} = -400\mu \tag{1.3}$$

(2) 点 B(*a,a*)が変形後に B'(*a-b, a-b*)になったとして,*n* 方向の垂直ひずみ ε_nを求め,μ を含む形式で表せ.

線分 OB の長さ L_n は，三平方の定理より以下のように求められる.

$$L_n = \sqrt{(a-b)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{2}\,(a-b) \tag{1.4}$$

よって，*n* 方向の垂直ひずみ ε_n は以下のように求められる.

$$\varepsilon_n = \frac{L_n - \sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}\,(a-b) - \sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = -\frac{b}{a} = -\frac{1\times10^{-2}}{50} = -200\mu \tag{1.5}$$

(3) (1)の結果を用いて,*x-y* 座標系のひずみテンソルを求め,モールのひずみ円を描き,中心と半径を明記せよ.

(1)の結果から，ひずみテンソルは以下のように求められる.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -200 \\ -200 & 0 \end{pmatrix}\mu \tag{1.6}$$

したがって，モールのひずみ円は以下のように描くことができる.

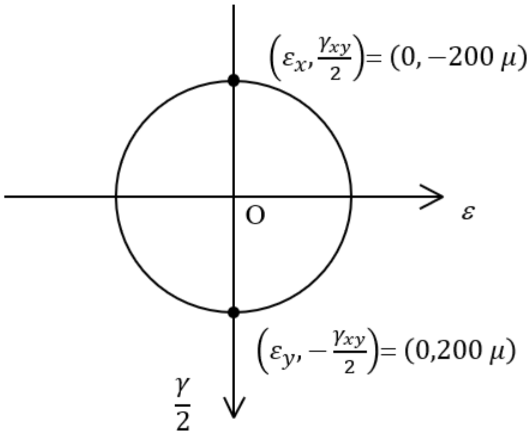

Fig.1.1 *x-y* 座標におけるモールのひずみ円

モールのひずみ円の中心(ε_c,0)と半径 r は以下のように求められる.

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) = 0$$
$$\left(\varepsilon_c, 0\right) = \left(0, 0\right) \tag{1.7}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}{}^2} = 200\mu \tag{1.8}$$

(4) (3)で描いたモールのひずみ円から *n-t* 座標系におけるひずみテンソルを求め,μ を含む形式で表せ.

n-t 座標は *x-y* 座標を反時計回りに 45°回転させたものである. モールのひずみ円では, 反時計回りに 2 倍の 90°回転させればよい. したがって, モールのひずみ円は以下のように描くことができる.

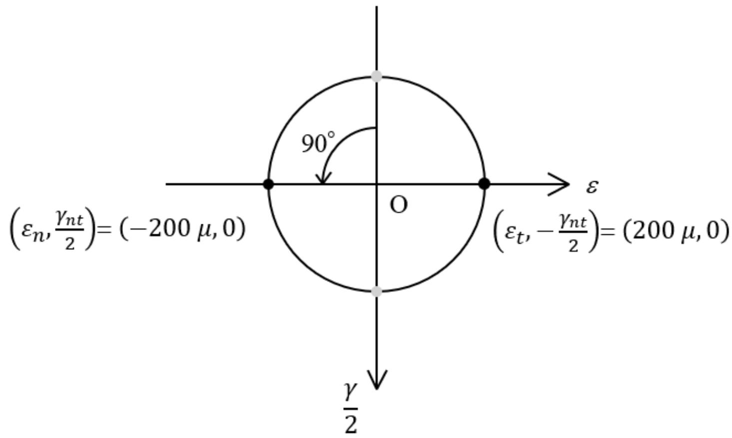

Fig.1.2. *n-t* 座標におけるモールのひずみ円

よって, *n-t* 座標におけるひずみテンソルは以下のように求められる.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_n & \dfrac{\gamma_{nt}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{nt}}{2} & \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix}\mu \tag{1.9}$$

以上より，垂直ひずみ ε_n は(2)の結果と一致することが確認された．

(5) *x*- *y* 座標系における応力テンソルからモールの応力円を描き，中心と半径を明記せよ．さらに，*n*- *t* 座標系における応力テンソルを求めよ．(単位は書かなくてよい)

応力テンソルは以下のように表せる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ -\tau & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -48 \\ -48 & 0 \end{pmatrix}[\mathrm{MPa}] \tag{1.10}$$

したがって，モールの応力円は以下のように描くことができる．

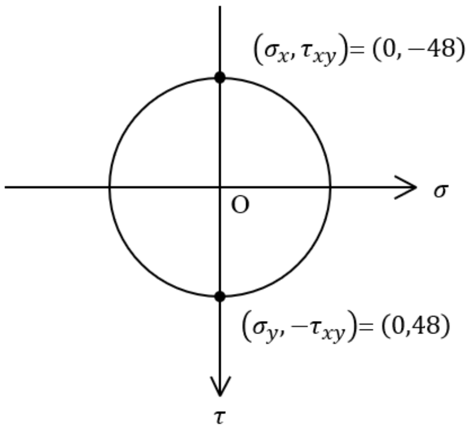

Fig.1.3. *x*-*y* 座標におけるモールの応力円

モールの応力円の中心(σ_c,0)と半径 r は以下のように求められる．

$$\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \tag{1.11}$$

$$\left(\sigma_c, 0\right) = \left(0,0\right)[\mathrm{MPa}]$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^{\ 2}} = 48[\mathrm{MPa}] \tag{1.12}$$

さらに，*n*-*t* 座標におけるモールの応力円は反時計回りに 90°回転させればよいから，以下のように描くことができる．

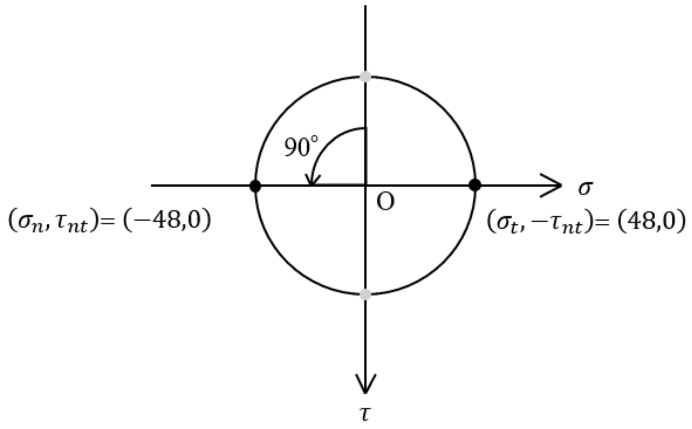

Fig.1.4. *n-t* 座標におけるモールの応力円

よって，*n-t* 座標における応力テンソルは以下のように求められる.

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 & 0 \\ 0 & 48 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}] \tag{1.13}$$

(6) 平面応力状態下の応力−ひずみの関係式 $\boldsymbol{\varepsilon_n = \frac{1}{E}(\sigma_n - \nu\sigma_t)}$ に対して,(2)で求めたひずみと, (5)で求めた応力を適用することで,弾性体の縦弾性係数 *E* を求めよ.

(2), (5)より，縦弾性係数 *E* は次のように求められる.

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}\left(\sigma_n - \upsilon\sigma_t\right) = \frac{1+\upsilon}{E}\sigma_n \tag{1.14}$$

$$E = \frac{1+\upsilon}{\varepsilon_n}\sigma_n = \frac{1+0.3}{200\times10^{-6}}\times48\times10^{-3} = 312[\mathrm{GPa}] \tag{1.15}$$

[2]以下のように 3 方向に貼られたひずみゲージがある．各ひずみゲージによる測定値が $\left(\varepsilon_0,\ \varepsilon_{45},\ \varepsilon_{90}\right) = (2\mu,\ 9\mu,\ 8\mu)$，ひずみゲージが張られた板材のヤング率が$E = 100[MPa]$，ポアソン比が$\nu = 0.3$であるとき以下の問いに答えよ．

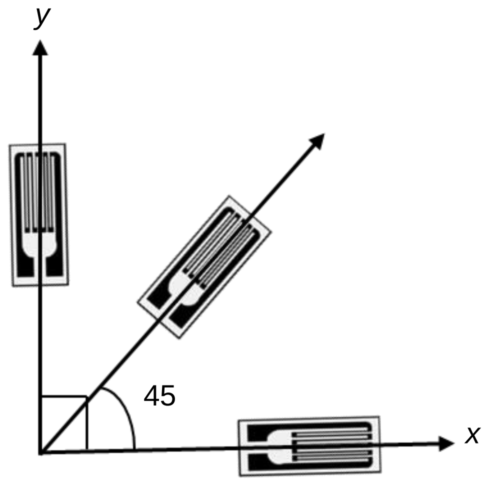

Fig.2 ひずみゲージ

(1) 回転を用いて図 2 の状態のせん断ひずみを求めよ．
(2) モールのひずみ円を描け．
(3) 主ひずみ$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$と主ひずみ方向$(\theta_1,\ \theta_2)$を求めよ．但し$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，$\theta_1 > 0$とする．
(4) 主応力$(\sigma_1,\ \sigma_2)$を求めよ．但し$\sigma_1 > \sigma_2$とする．
(5) この時のモールの応力円を描き，半径と中心を求めよ．

(1) 回転を用いて図 2 の状態のせん断ひずみを求めよ．

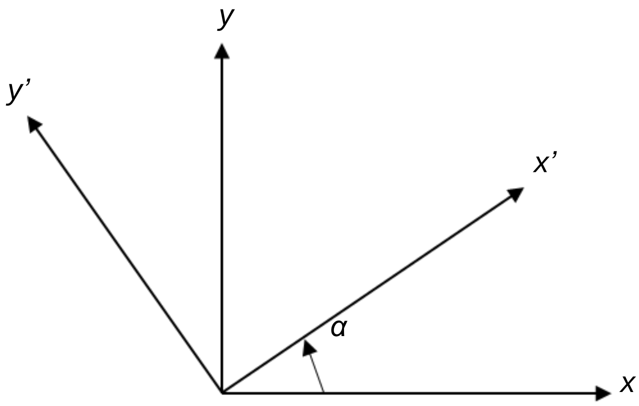

Fig.2.1 回転座標

上図のようなひずみの回転を考えると，

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_x cos^2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy} sin2\alpha + \varepsilon_y sin^2\alpha \tag{1}$$

の関係式が得られる．今， $\varepsilon_x' = \varepsilon_{45}$， $\varepsilon_x = \varepsilon_0$， $\varepsilon_y = \varepsilon_{90}$， $\alpha = 45°$であるので，整理すると

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - \left(\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}\right) \tag{2}$$

よって， $\gamma_{xy} = 8\mu$

(2) モールのひずみ円を描け．

問(1)よりひずみテンソルは

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\mu \tag{3}$$

と求まるので，モールのひずみ円は以下のようになる．

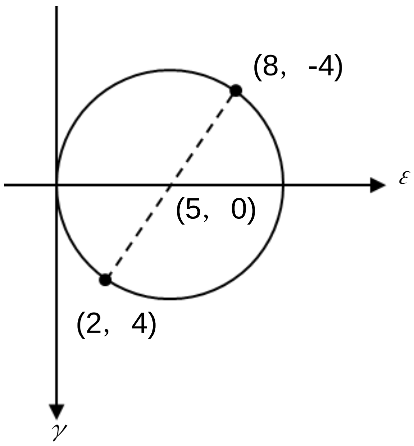

Fig.2.2 モールのひずみ円

(3) 主ひずみ($\boldsymbol{\varepsilon_1}$，$\boldsymbol{\varepsilon_2}$)と主ひずみ方向を求めよ．但し$\boldsymbol{\varepsilon_1 > \varepsilon_2}$，$\boldsymbol{\theta_1 > 0}$とする．

図 2.2 よりモールのひずみ円は原点を通り，半径 5 の円であることがわかるから

$$(\varepsilon_1，\varepsilon_2) = (10，0)\mu \tag{4}$$

主ひずみ方向は幾何的に

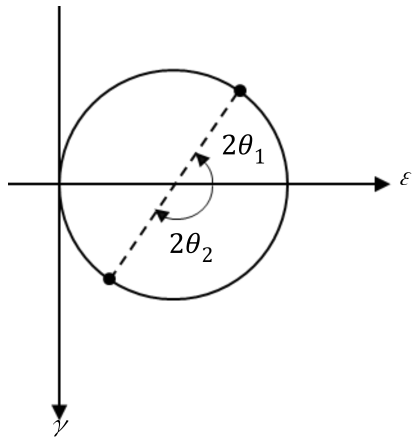

Fig.2.3 回転方向

$\theta_1 = 26.6^\circ$，$\theta_2 = -63.4^\circ$

(4) 主応力(σ_1，σ_2)を求めよ．但し$\sigma_1 > \sigma_2$とする．

応力とひずみの関係式より

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)}{1-\nu^2} \\ &= \frac{100(10 + 0.3 \times 0)}{1 - 0.3^2}\mu \\ &\approx 1100[Pa]\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{E(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)}{1-\nu^2} \\ &= \frac{100(0 + 0.3 \times 10)}{1 - 0.3^2}\mu \\ &\approx 330[Pa]\end{aligned} \tag{6}$$

よって主応力は

$$(\sigma_1，\sigma_2) = (1100，330)\ [Pa] \tag{7}$$

(5) この時のモールの応力円を描き，半径と中心を求めよ．

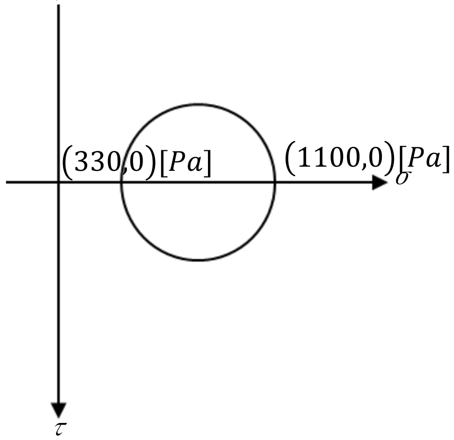

Fig.2.4 モールの応力円

半径については

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ &= \frac{1}{2}(1100 - 330) \\ &= 385[Pa] \end{aligned} \tag{8}$$

中心については

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ &= \frac{1}{2}(1100 + 330) \\ &= 715[Pa] \end{aligned} \tag{9}$$

より$(715,0)[Pa]$