材料の力学 1　第 5 回演習問題（2024/5/20 実施）

[1]　板厚が十分に薄い弾性体である正三角形 ABC が，図 1 のような応力状態にある.このとき，以下の問いに答えよ．ただし，正三角形の一辺の長さを a，z 軸方向厚さを単位長さとする．

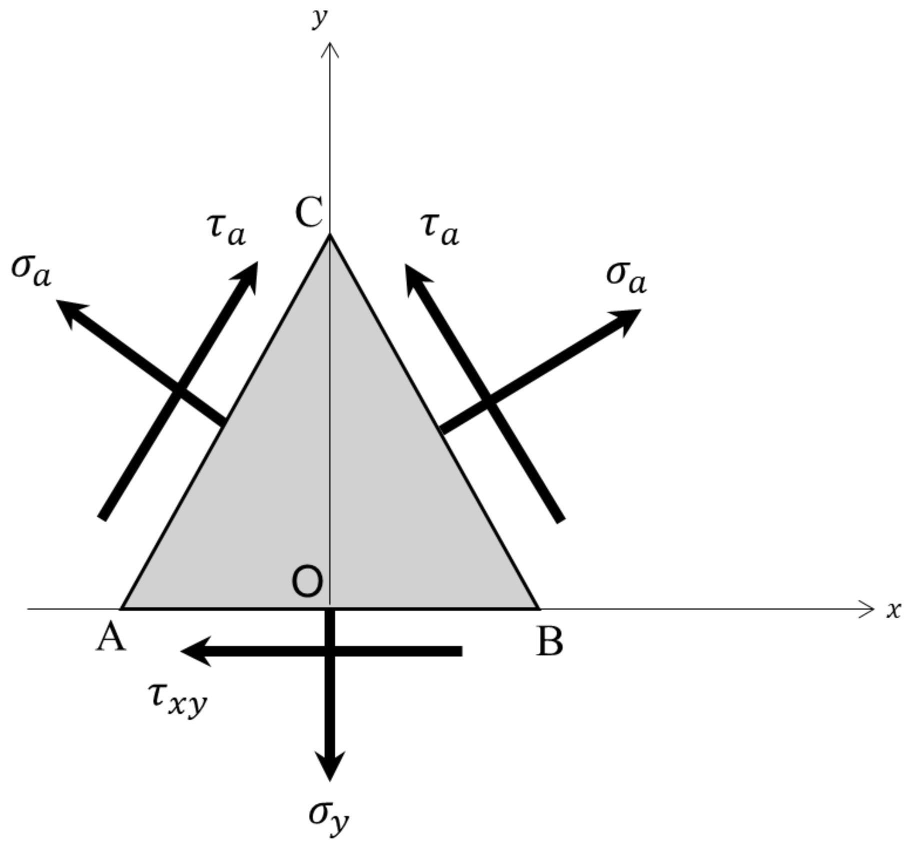


Fig.1 微小弾性体の応力状態

(1) x 方向および y 方向の力のつり合い式を立て，垂直応力σ_y，せん断応力 τ_{xy} をσ_a と τ_a を用いて表せ.

(2) 垂直応力σ_xをσ_aと τ_a を用いて表せ.

以下の設問より，$\sigma_a = 6$[MPa], $\tau_a = 2\sqrt{3}$[MPa]とする．

(3) x-y 座標系における応力テンソルを答えよ．また，このときのモールの応力円を描き，中心と半径を求めよ．（単位を明記すること）

(4) このときの主応力(σ_1，σ_2)を求めよ．ただし，$\sigma_1 > \sigma_2$ とする．

(1) x 方向および y 方向の力のつり合い式を立て，垂直応力σ_y，せん断応力 τ_{xy} をσ_a と τ_a を用いて表せ.

x 方向の力のつり合い式は以下のようになる.

$$\sigma_a \cos 30° \cdot a - \tau_a \cos 60° \cdot a - \sigma_a \cos 30° \cdot a + \tau_a \cos 60° \cdot a - \tau_{xy} \cdot a = 0 \tag{1.1}$$

y 方向の力のつり合い式は以下のようになる.

$$\sigma_a \sin 30° \cdot a + \tau_a \sin 60° \cdot a + \sigma_a \sin 30° \cdot a + \tau_a \sin 60° \cdot a - \sigma_y \cdot a = 0 \tag{1.2}$$

この 2 式を整理することで以下の式が得られる.

$$\tau_{xy} = 0 \tag{1.3}$$

$$\sigma_y = \sigma_a + \sqrt{3}\,\tau_a \tag{1.4}$$

(2) 垂直応力σ_x をσ_a と τ_a を用いて表せ.

σ_a をσ_x ,σ_y , τ_{xy} を用いて表すと以下のようになる.

$$\sigma_a = \sigma_x \cos^2 30° + \sigma_y \sin^2 30° + 2\tau_{xy} \sin 30° \cos 30° \tag{1.5}$$

式(1.5)に(1)で得た結果を代入することで以下の式が得られる.

$$\sigma_x = \sigma_a - \frac{\tau_a}{\sqrt{3}} \tag{1.6}$$

(3) このときのモールの応力円を描き，中心と半径を求めよ.（単位を明記すること）

x-y 座標系における応力テンソルは，以下のようになる.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{1.7}$$

式(1.7)をもとにモールの応力円を描くと，以下のようになる.

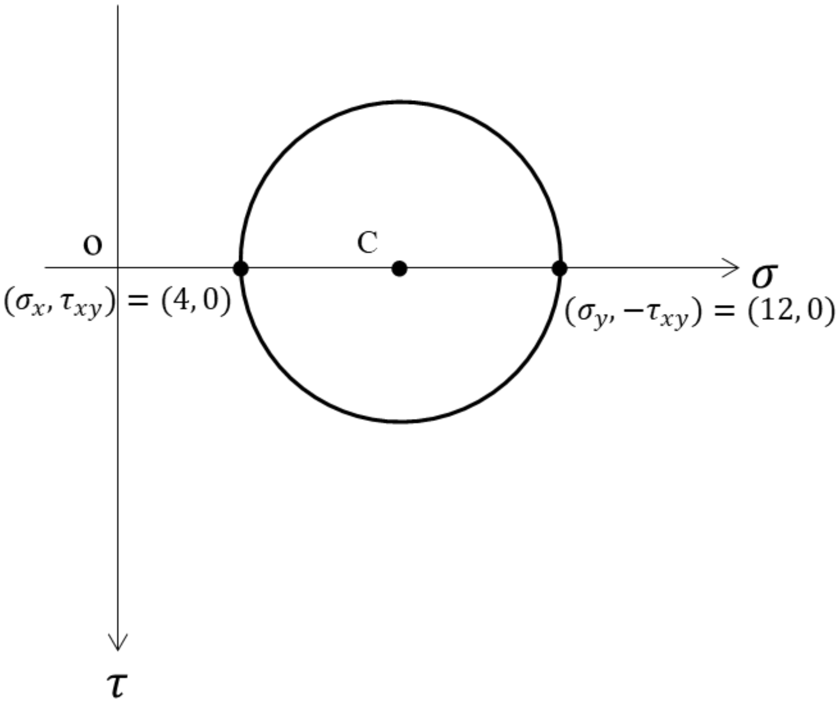


Fig. 1.1　モールの応力円

図 1.1 より，モールの応力円の中心は，以下の式で求められる．

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 8$$

$$\left(\sigma_c, 0\right) = (8, 0)\ \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{1.8}$$

また，半径は以下の式で求められる．

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2_{xy}} = 4\left[\mathrm{MPa}\right] \tag{1.9}$$

(4) **このときの主応力(σ_1，σ_2)を求めよ．ただし，$\sigma_1 > \sigma_2$とする．**

図 1.1 より，

$$\left(\sigma_1, \sigma_2\right) = (12,\ 4)\ \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{1.10}$$

[2] 図 2 に示すように点 A，点 E において壁に固定された段付き丸棒がある．棒の AB 間，DE 間には分布荷重 p がそれぞれ対称に作用している．丸棒の弾性率を E, 断面積は AB 間，DE 間では $2A$，BD 間では A として，以下の問いに答えよ．ただし，壁の変形は考慮しないものとする．

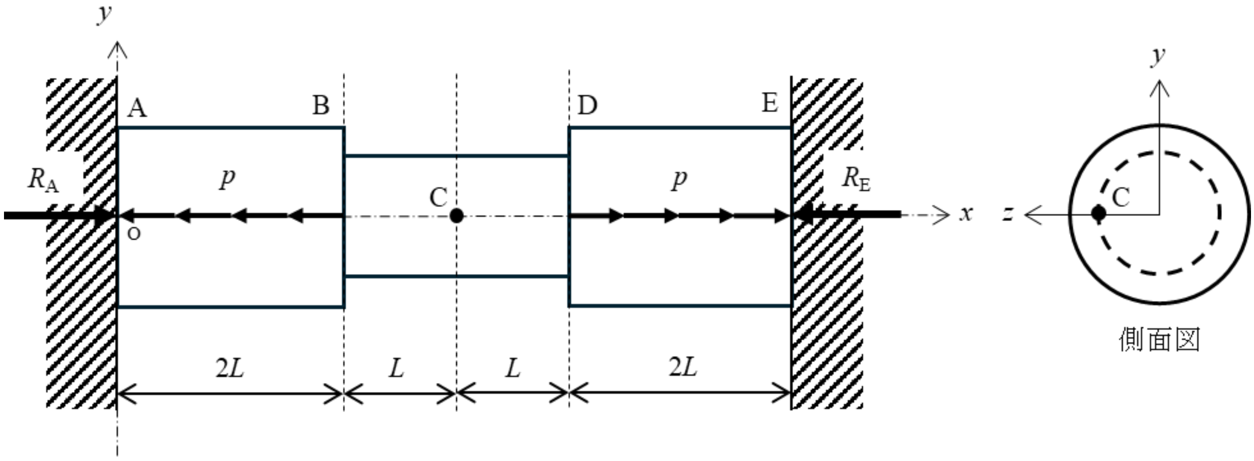


Fig. 2 両端を壁に固定された段付き丸棒

(1) 図 2 の FBD を示せ．また，点 A，点 E における壁からの反力 R_A，R_E を用いて力のつりあい式を示せ.

(2) R_A を用いて AB 間の変位 δ_{AB}，BC 間の変位 δ_{BC} をそれぞれ求めよ.

(3) 対称性により AC 間の変位 $\delta_{AC} = 0$ となることを利用して，変位の条件と力のつり合い式から R_A，R_E を求めよ.

(4) 丸棒表面上の点 C における垂直応力 σ_x を p，L，A を用いて表せ.

(5) 丸棒表面上の点 C におけるモールの応力円を描き，点 C に生じる最大せん断応力 τ_{max} を求めよ．モールの応力円には応力テンソルの座標も明記すること.

(1) 図 2 の FBD を示せ．また，点 A，点 E における壁からの反力 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{E}}$ を用いて力のつりあい式を示せ.

図 2 における FBD は以下の図 2.1 のように描くことができる.

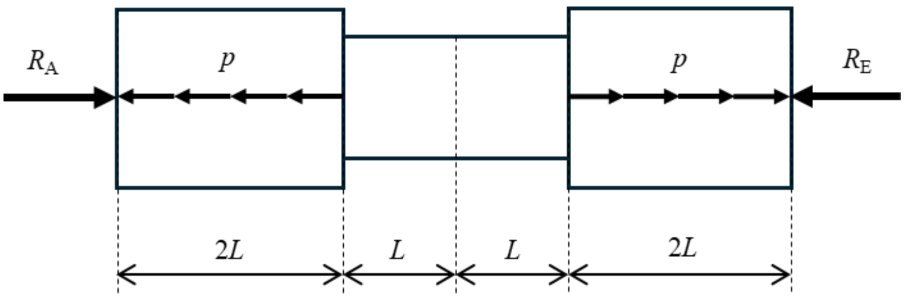


Fig. 2.1 図 2 の FBD

力のつり合い式は以下の式(2.1)のように表される.

$$
\begin{gathered}
R_{\mathrm{A}} - 2pL + 2pL - R_{\mathrm{E}} = 0 \\
\therefore R_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{E}}
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

(2) $\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}$ を用いて AB 間の変位δ_{AB}，BC 間の変位δ_{BC} をそれぞれ求めよ.

(i) AB 間($0 \leqq x \leqq 2L$)

軸力を $N(x)$とすると，作用する力は下図のようになる.

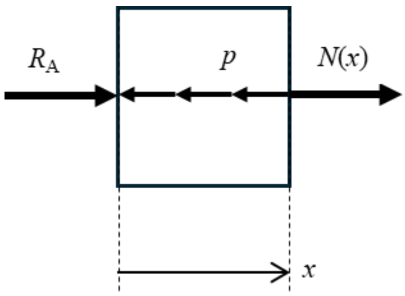


Fig. 2.2 FBD ($0 \leqq x \leqq 2L$)

力のつりあい式を立てると，以下の式(2.2)のようになる.

$$
\begin{gathered}
R_{\mathrm{A}} - px + N\left(x\right) = 0 \\
\therefore N\left(x\right) = -R_{\mathrm{A}} + px
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

よって，応力，ひずみはそれぞれ以下の式(2.3)，式(2.4)のように表すことができる.

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{2A} = \frac{-R_{\mathrm{A}} + px}{2A} \tag{2.3}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{-R_{\mathrm{A}} + px}{2EA} \tag{2.4}$$

AB 間の変位は，ひずみを積分すればよいので，

$$\delta_{\mathrm{AB}} = \int_0^{2L} \varepsilon(x)dx = \int_0^{2L} \frac{-R_{\mathrm{A}} + px}{2EA}dx = \frac{1}{EA}(-R_{\mathrm{A}}L + pL^2) \tag{2.5}$$

となる．

(ii) BC 間($2L \leqq x \leqq 3L$)

軸力を $N(x)$とすると，作用する力は下図のようになる．

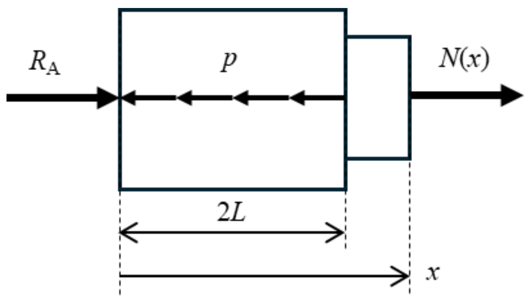


Fig. 2.3 FBD ($2L \leqq x \leqq 3L$)

力のつりあい式を立てると，以下の式(2.6)のようになる．

$$\begin{gathered} R_{\mathrm{A}} - 2pL + N(x) = 0 \\ \therefore N(x) = -R_{\mathrm{A}} + 2pL \end{gathered} \tag{2.6}$$

よって，応力，ひずみはそれぞれ以下の式(2.7)，式(2.8)のように表すことができる．

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{-R_{\mathrm{A}} + 2pL}{A} \tag{2.7}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{-R_{\mathrm{A}} + 2pL}{EA} \tag{2.8}$$

BC 間の変位は，ひずみを積分すればよいので，

$$\delta_{\mathrm{BC}} = \int_{2L}^{3L} \varepsilon(x)dx = \int_{2L}^{3L} \frac{-R_{\mathrm{A}} + 2pL}{EA}dx = \frac{1}{EA}(-R_{\mathrm{A}}L + 2pL^2) \tag{2.9}$$

となる．

(3) 対称性により AC 間の変位δ_{AC} = 0 となることを利用して，変位の条件と力のつり合い式から R_A，R_E を求めよ．

式(2.5)，式(2.9)を利用すると，AC 間の変位は，以下の式(2.10)のように表すことができる．

$$\begin{aligned}\delta_{AC} &= \delta_{AB} + \delta_{BC} \\ &= \frac{1}{EA}(-R_A L + pL^2) + \frac{1}{EA}(-R_A L + 2pL^2) \\ &= \frac{1}{EA}(-2R_A L + 3pL^2)\end{aligned} \tag{2.10}$$

対称性からδ_{AC} = 0 となることを利用して式(2.10)を R_A について解くと，

$$\begin{gathered}\frac{1}{EA}(-2R_A L + 3pL^2) = 0 \\ \therefore R_A = \frac{3}{2}pL\end{gathered} \tag{2.11}$$

となる．式(2.1)，式(2.11)より，R_E は以下の式(2.12)のように表される．

$$R_E = R_A = \frac{3}{2}pL \tag{2.12}$$

以上のように，対称性を利用することで，丸棒の不静定問題を簡単に解くことができる．

(4) 丸棒表面上の点 C における垂直応力σ_xを p，L，A を用いて表せ．

点 C の座標は $x = 3L$ であるから，式(2.7)，式(2.11)より，

$$\sigma_x = \sigma(3L) = \frac{-R_A + 2pL}{A} = \frac{pL}{2A} \tag{2.13}$$

となる．

(5) 丸棒表面上の点 C における x-y 座標系のモールの応力円を描き，点 C に生じる最大せん断応力τ_{max}を求めよ．モールの応力円には応力テンソルの座標も明記すること．

式(2.13)を利用すると，点 C における応力テンソルは以下の式(2.14)のように表される．

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{pL}{2A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

よって，モールの応力円は以下の図 2.4 のように描くことができる．

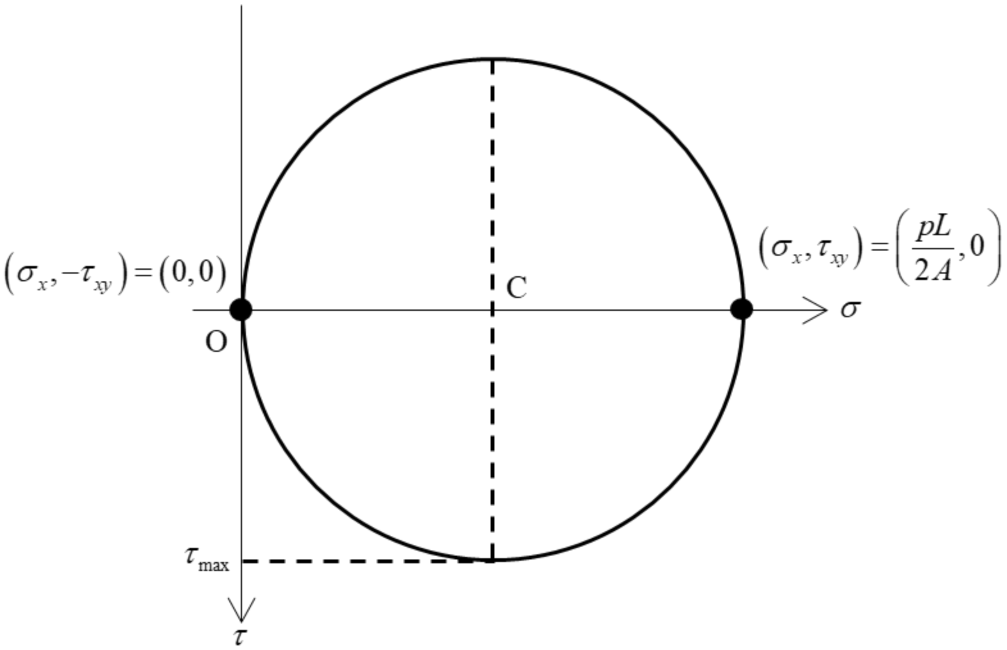


Fig. 2.4 モールの応力円

中心と半径は以下の式(2.15)，式(2.16)のように求めることができる．

中心
$$\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{pL}{2A} - 0\right) = \frac{pL}{4A}$$
$$\therefore \left(\sigma_c, 0\right) = \left(\frac{pL}{4A}, 0\right) \tag{2.15}$$

半径
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{pL}{2A}\right)^2 + 4\times 0^2} = \frac{pL}{4A}$$
$$\therefore r = \frac{pL}{4A} \tag{2.16}$$

したがって，最大せん断応力$\tau_{\max}$は，以下の式(2.17)のように求めることができる．

$$\tau_{\max} = r = \frac{pL}{4A} \tag{2.17}$$

2024年5月20日	材料の力学1	学籍番号: 氏名:
解答用紙(第5回)		

[1]

(1)

$$\tau_{xy}=0$$

$$\sigma_y=\sigma_a+\sqrt{3}\,\tau_a$$

(2)

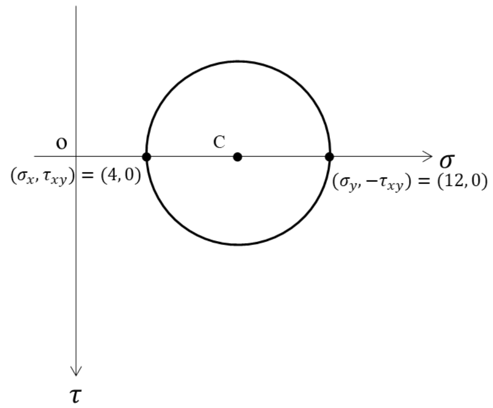
$$\sigma_x=\sigma_a-\frac{\tau_a}{\sqrt{3}}$$

(3)

応力テンソル

$$\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}[\mathrm{MPa}]$$

モールの応力円



中心

$$(\sigma_c, 0)=(8, 0)\ [\mathrm{MPa}]$$

半径

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau^2_{xy}}=4\,[\mathrm{MPa}]$$

(4)

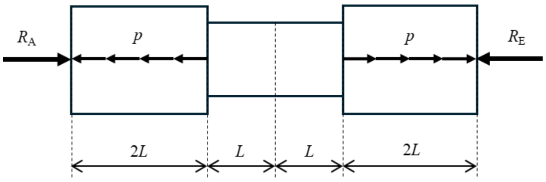
$$(\sigma_1, \sigma_2)=(12,\ 4)\ [\mathrm{MPa}]$$

[2]

座標がないものは不正解 (軸に書いてあるのは OK)

(1)

FBD



つり合い式

$$R_A - 2pL + 2pL - R_E = 0$$

$$\therefore R_A = R_E$$

式の形は問わない

(2)

δ_{AB}

$$\frac{1}{EA}(-R_A L + pL^2)$$

δ_{BC}

$$\frac{1}{EA}(-R_A L + 2pL^2)$$

(3)

R_A

$$\frac{3}{2}pL$$

R_E

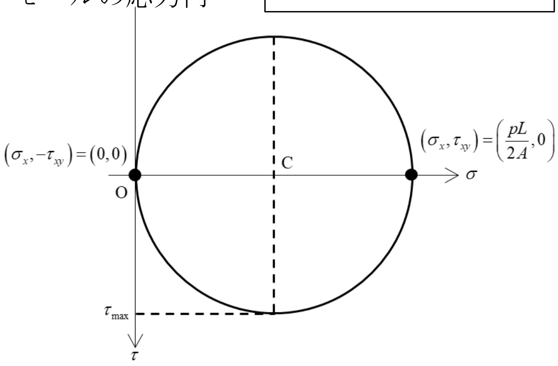
$$\frac{3}{2}pL$$

(4)

$$\frac{pL}{2A}$$

(5)

モールの応力円



最大せん断応力

$$\frac{pL}{4A}$$

第 5 回解答解説 8 ページ

図 2.4 訂正

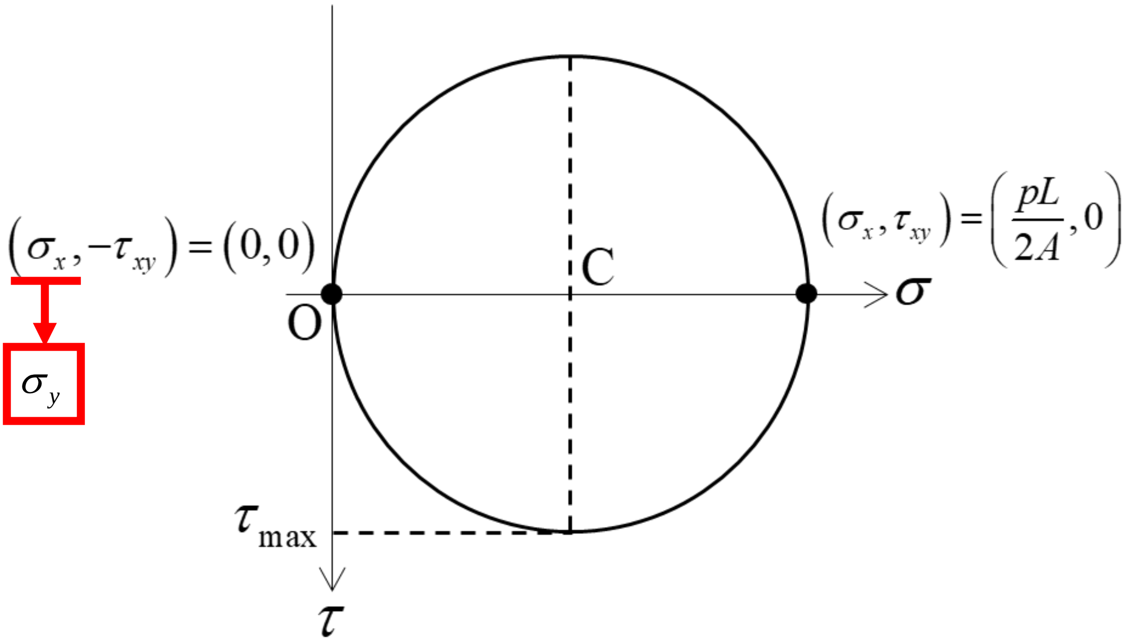


Fig. 2.4 モールの応力円(訂正版)