材料の力学 1　第 4 回演習問題（2024/5/13 実施）

[1]微小弾性体である一点の応力を図 1.1 の微小三角形 OAB に示す．このとき以下の問いに答えよ．ただし，この三角形は平面応力状態にあり，$0° \leq \theta \leq 180°$とする．OB の長さを L，z 軸方向厚さを単位長さとする．

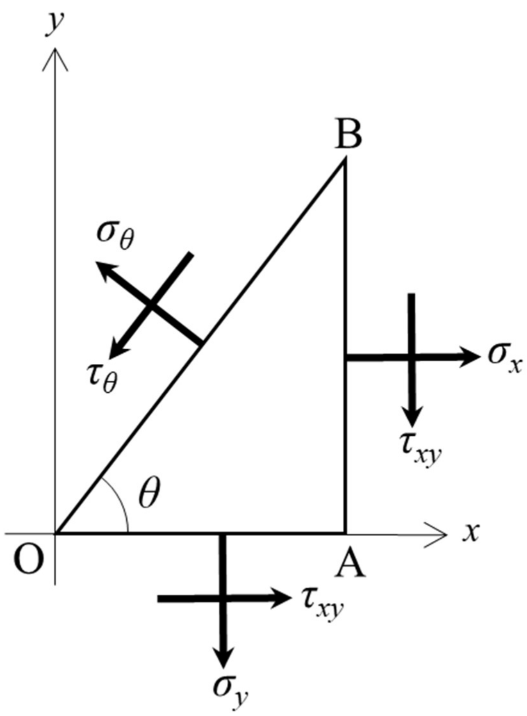


Fig.1　微小弾性体の応力状態

(1)　図 1 の θ 方向とその法線方向について力のつり合い式を立てることにより，σ_θ，τ_θ をそれぞれ σ_x，σ_y，τ_{xy}，2θ を用いて表せ．

(2)　(1)で求めた σ_θ，τ_θを表す 2 式より θ を消去し，モールの応力円を表す以下の式を導出せよ．

$$\frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}{}^2$$

(3)　$\sigma_x = 6\sigma$，$\sigma_y = 2\sigma$，$\tau_{xy} = \sqrt{5}\sigma$ のとき，応力テンソルを求め，図 1 におけるモールの応力円を σ-τ 平面上に描け．

(4)　(3)で描いたモールの応力円を用いて，主応力(σ_1，σ_2)，主方向(θ_1，θ_2)を求めよ．ただし，$\sigma_1>\sigma_2$，θ_1 を反時計回り，θ_2 を時計回りとする．

(1) **図 1 の θ 方向とその法線方向について力のつり合い式を立てることにより，$\boldsymbol{\sigma_\theta}$，$\boldsymbol{\tau_\theta}$ をそれぞれ $\boldsymbol{\sigma_x}$，$\boldsymbol{\sigma_y}$，$\boldsymbol{\tau_{xy}}$，$\boldsymbol{2\theta}$ を用いて表せ．**

θ 方向の法線方向の力のつり合い式は以下のようになる．

$$\sigma_\theta \cdot L - \sigma_x \sin\theta \cdot L\sin\theta - \tau_{xy}\cos\theta \cdot L\sin\theta - \sigma_y \cos\theta \cdot L\cos\theta - \tau_{xy}\sin\theta \cdot L\cos\theta = 0 \tag{1.1}$$

θ 方向の力のつり合い式は以下のようになる．

$$\tau_\theta \cdot L - \sigma_x \cos\theta \cdot L\sin\theta + \tau_{xy}\sin\theta \cdot L\sin\theta + \sigma_y \sin\theta \cdot L\cos\theta - \tau_{xy}\cos\theta \cdot L\cos\theta = 0 \tag{1.2}$$

上式を，それぞれ 2θ を用いて整理すると

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \tag{1.3}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{1.4}$$

(2) **(1)で求めた $\boldsymbol{\sigma_\theta}$，$\boldsymbol{\tau_\theta}$ を表す 2 式より θ を消去し，モールの応力円を表す以下の式を導出せよ．**

$$\frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}$$

以下の式に σ_θ，τ_θ を代入することでモールの応力円を表す式が得られる．

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta^{\ 2} \tag{1.5}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\cos2\theta+\tau_{xy}\sin2\theta-\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right\}^2$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sin2\theta+\tau_{xy}\cos2\theta\right\}^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2\cos^2 2\theta-\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\tau_{xy}\sin2\theta\cos2\theta+\tau_{xy}{}^2\sin^2 2\theta$$

$$+\frac{1}{4}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2\sin^2 2\theta+\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\tau_{xy}\sin2\theta\cos2\theta+\tau_{xy}{}^2\cos^2 2\theta$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\tau_{xy}{}^2 \tag{1.6}$$

(3) $\boldsymbol{\sigma_x=6\sigma}$，$\boldsymbol{\sigma_y=2\sigma}$，$\boldsymbol{\tau_{xy}=\sqrt{5}\sigma}$ のとき，応力テンソルを求め，図 **1** におけるモールの応力円を $\boldsymbol{\sigma}$**-**$\boldsymbol{\tau}$ 平面上に描け．

本問は平面応力状態であるから，板厚方向の荷重波 0 である．

応力テンソルに値を代入すると，以下のようになる．

$$[\sigma]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\sigma & \sqrt{5}\sigma\\ \sqrt{5}\sigma & 2\sigma\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

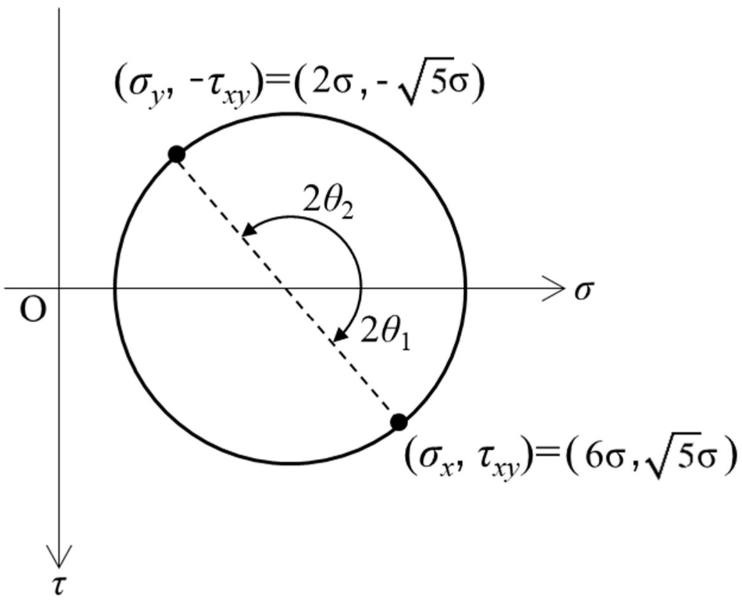


Fig.1.1　モールの応力円

(4) **(3)**で描いたモールの応力円を用いて，主応力**($\boldsymbol{\sigma_1}$，$\boldsymbol{\sigma_2}$)**，主方向**($\boldsymbol{\theta_1}$，$\boldsymbol{\theta_2}$)**を求めよ．ただし，$\boldsymbol{\sigma_1>\sigma_2}$とし，$\boldsymbol{\theta_1}$を反時計回り，$\boldsymbol{\theta_2}$を時計回りとする．

主応力は，モールの応力円とσ軸との交点であるから，モールの応力円の中心のσ座標，及び半径を求めることで，2つの主応力が得られる．

中心のσ座標は

$$\frac{1}{4}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\tau_{xy}{}^2\sigma_c=\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=4\sigma \tag{1.8}$$

半径は

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}{}^2}=3\sigma \tag{1.9}$$

以上より，主応力σ_1，σ_2は

$$\sigma_1=\sigma_c+r=7\sigma \tag{1.10}$$

$$\sigma_2=\sigma_c-r=\sigma \tag{1.11}$$

さらに，

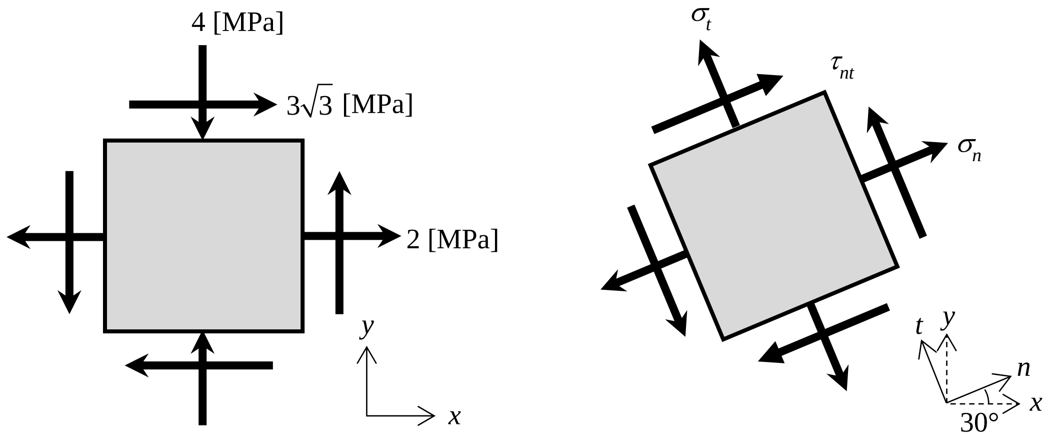
$$\tan 2\theta_1=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{\sqrt{5}}{2} \tag{1.12}$$

したがって，

$$\theta_1\approx 24.1^\circ \quad (\text{反時計回り}) \tag{1.13}$$

$$\theta_2\approx 65.9^\circ \quad (\text{時計回り}) \tag{1.14}$$

[2] 図 2 は板厚が十分に薄い弾性体のある点における応力状態を示したものである．図 2(b) は，図 2(a)を反時計回りに 30°回転した状態を図示したものである．このとき，以下の設問に答えよ．<u>**解答には単位を明記すること．**</u>



(a)　　　　(b)

Fig. 2 弾性体のある点における応力状態

(1)　図 2(a)のような応力状態における *x*-*y* 座標系の応力テンソルを求めよ．

図 2(b)の *n*-*t* 座標系における応力テンソルを求める．

<u><モールの応力円を用いた解法></u>

(2)　図 2(a)の状態におけるモールの応力円を描き，中心と半径を求めよ．モールの応力円には *x*-*y* 座標系における応力テンソルの座標も明記すること．

(3)　回転後の図 2(b)のモールの応力円を描き，*n*-*t* 座標系における応力テンソルを求めよ．作図の際は図 2(a)の状態から回転させたことがわかるように描くこと．

<u><座標変換マトリックスを用いた解法></u>

(4)　図 2(a)について以下に示す座標変換マトリックスを用いて座標変換を行うことで，図 2(b)の *n*-*t* 座標系における応力テンソルを求めよ．ただし途中計算も書くこと．

※座標変換マトリックス： $[L]=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ ， $[\sigma']=[L][\sigma][L^{-1}]$

(1) 図 2(a)のような応力状態における *x-y* 座標系の応力テンソルを求めよ．

図 2(a) における応力テンソルは以下の式(2.1)のように表すことができる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{pmatrix} \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{2.1}$$

(2) 図 2(a)の状態におけるモールの応力円を描き，中心と半径を求めよ．モールの応力円には *x-y* 座標系における応力テンソルの座標も明記すること．

式(2.1)より，モールの応力円は以下の図 2.1 のように描くことができる．

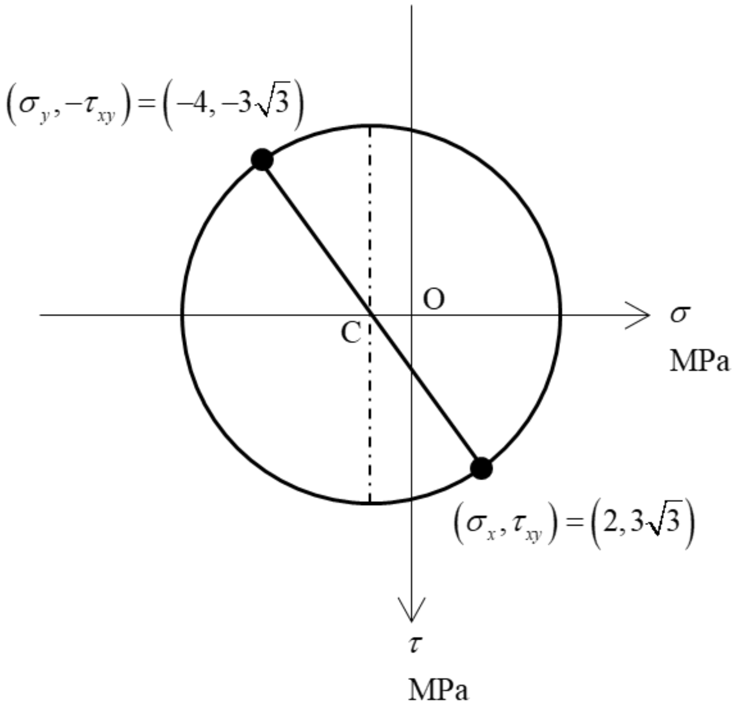


Fig. 2.1 (a)のモールの応力円

中心と半径は以下の式(2.2)，式(2.3)のように求めることができる．

中心

$$\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{2}\left(2-4\right) = -1$$
$$\therefore \left(\sigma_c, 0\right) = \left(-1, 0\right) \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{2.2}$$

半径

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 4\times\left(3\sqrt{3}\right)^2} = 6$$
$$\therefore r = 6 \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{2.3}$$

(3) 回転後の図 2(b)のモールの応力円を描き，*n-t* 座標系における応力テンソルを求めよ．作図の際は図 2(a)の状態から回転させたことがわかるように描くこと．

図 2(b)を見ると，*n-t* 座標系は *x-y* 座標系を 30°回転させたものだとわかるため，モールの応力円上では 60°回転させればよい．

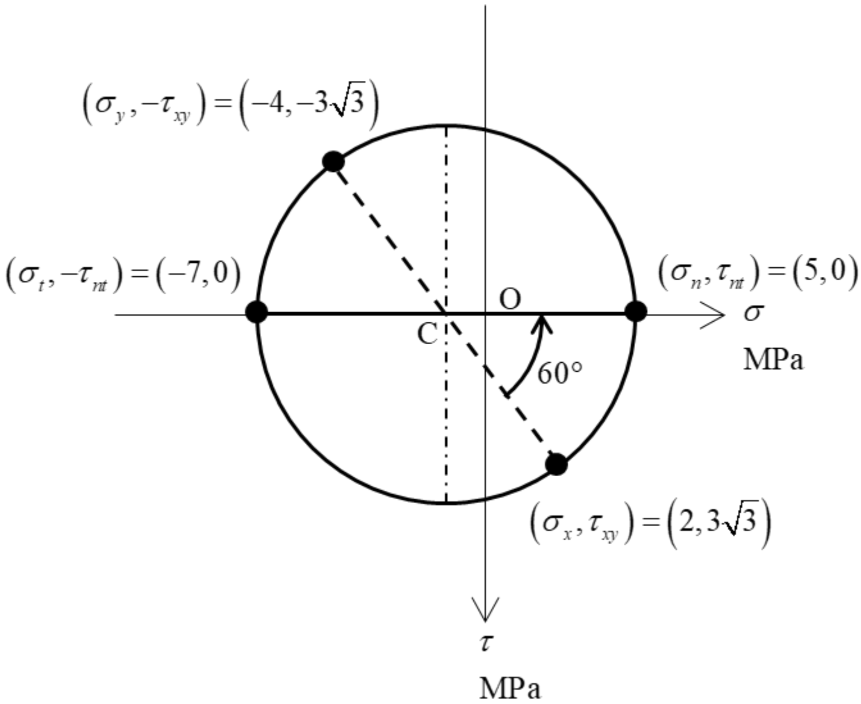


Fig. 2.2 (b)のモールの応力円

よって，図 2(b)における応力テンソルは以下の式(2.4)のように表すことができる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}] \tag{2.4}$$

(4) 図 2(a)について以下に示す座標変換マトリックスを用いて座標変換を行うことで，図 2(b)の *n-t* 座標系における応力テンソルを求めよ．ただし途中計算も書くこと．

図 2(b)を見ると，*n-t* 座標系は *x-y* 座標系を 30°回転させたものだとわかる．そのため，座標変換マトリックスで q = 30°とすればよい．よって，図 2(b)における応力テンソルは以下の式(2.5)のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
[\sigma'] &= [L][\sigma][L^{-1}] \\
&= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}[\mathrm{MPa}] \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

これより，座標変換によって得られた応力テンソルは，モールの応力円から得られた結果と一致することが分かる．

<補足>

座標変換マトリックスは,

$$
[\sigma'] = [L][\sigma][L^{-1}]
$$

$$
\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (2.6)
$$

と表されるが，これを各要素ごとに計算すると，以下の式(2.7)のようになる．

$$
\begin{aligned}
\sigma'_x &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\
\sigma'_y &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad (2.7) \\
\tau'_{xy} &= (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)
\end{aligned}
$$

2 倍角の公式を用いて式(2.7)を整理すると，

$$
\begin{aligned}
\sigma'_x &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\
\sigma'_y &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (2.8) \\
\tau'_{xy} &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta
\end{aligned}
$$

となる．以上から，応力の座標変換式と一致することがわかる．

2024 年 5 月 13 日	材料の力学 1	学籍番号: 氏名:

解答用紙(第 4 回)

[1]

(1)

$$\sigma_\theta=\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$
$$\tau_0=\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

(2)導出過程

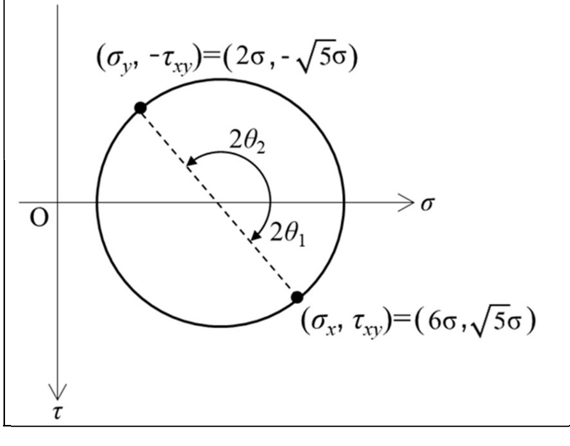
$$\left(\sigma_\theta-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\theta{}^2$$
$$=\left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right\}^2$$
$$+\left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta\right\}^2$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\tau_{xy}{}^2$$

(3)

応力テンソル

$$[\sigma]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\sigma & \sqrt{5}\sigma\\ \sqrt{5}\sigma & 2\sigma\end{pmatrix}$$

モールの応力円



(4)

主応力

$$\sigma_1=\sigma_c+r=7\sigma$$
$$\sigma_2=\sigma_c-r=\sigma$$

主方向

$\theta_1 \approx 24.1°$　(反時計回り)

$\theta_2 \approx 65.9°$　(時計回り)

(2)σ_θ, τ_θ の最初の式が書いて無ければ不正解．途中式一行以上．
(3)座標が書いて無ければ不正解．

[2]

(1)

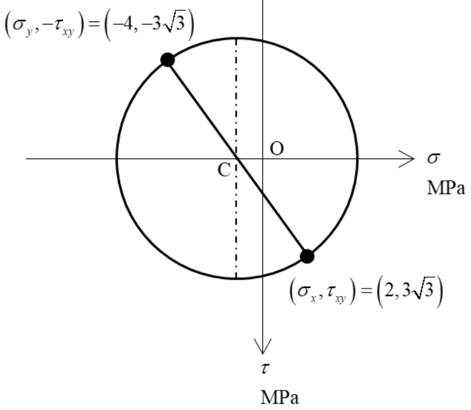
$$\begin{pmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

・単位なしは不正解

(2)

モールの応力円

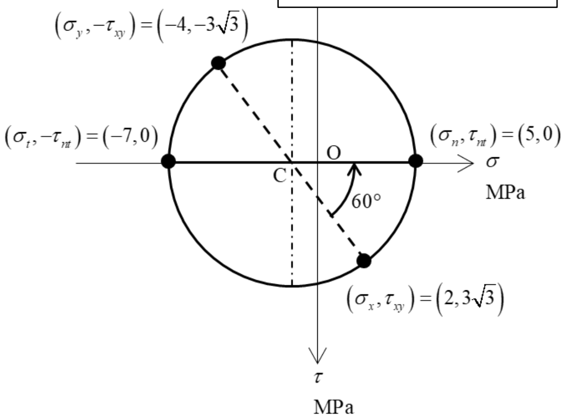
座標がないものは不正解 (軸に書いてあるのはOK)



(3)

モールの応力円

60°回転させたことがわからないものは不正解



中心

$$(-1, 0)\ [\mathrm{MPa}]$$

半径

$$6\ [\mathrm{MPa}]$$

応力テンソル

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

(4)

途中計算

$$\begin{aligned}
[\sigma'] &= [L][\sigma][L^{-1}] \\
&= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- 文字のまま計算して座標変換式を導出し，そこに代入しているものも **OK**
- 途中式は **1** 式以上あれば **OK**

答え

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}]$$