材料の力学１　第 3 回演習問題（2024/4/29）

[1] 図 1 のように段付き丸棒が両端を壁で固定され，AB 間に分布荷重 p が，BC 間に分布荷重 $2p$ が x 軸正方向に一様に作用している．壁からの反力 R_O，R_C を図のように仮定し，以下の問いに答えよ．ただし，部材 OA 及び BC の断面積を $2A$，部材 AB の断面積を A，部材のヤング率を E とする．

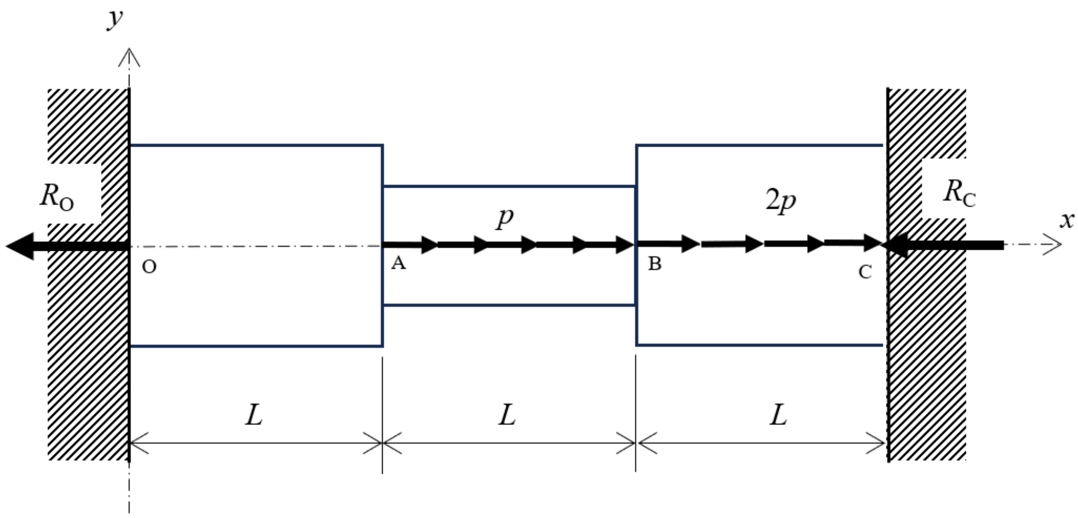


Fig.1 両端固定された棒状部材.

(1)FBD を描き，力のつり合い式を立式せよ．

(2)反力 R_O を用いて座標 x における軸力 $N(x)$を求めよ．

(3)点 C の変位 δ_C=0 となることから，壁からの反力 R_O，R_C を求めよ．

(4)(3)の結果を用いて部材に作用している軸力 $N(x)$と垂直応力 $\sigma(x)$を求めよ．また，$N(x)$と $\sigma(x)$の x 方向の変化を図示せよ．

(1)FBD を描き，力のつり合い式を立式せよ．

　丸棒の FBD を描くと，図 1.1 のようになる．

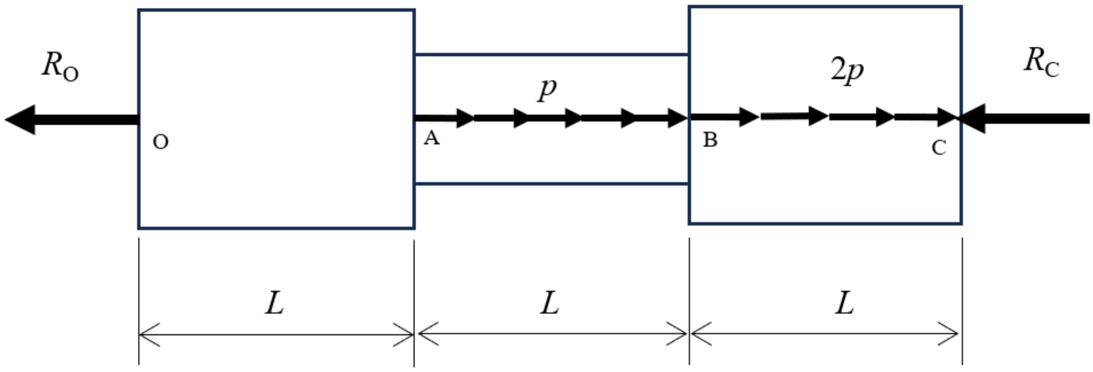


Fig.1.1 FBD.

図 1.1 から力のつり合い式を立式すると，

$$
\begin{aligned}
&-R_O + pL + 2pL - R_C = 0 \\
&-R_O + 3pL - R_C = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

となる．

(2)反力 R_0 を用いて座標 x における軸力 $N(x)$を求めよ．

　$0 \le x \le L$，$L \le x \le 2L$，$2L \le x \le 3L$ の 3 つの範囲に分けて軸力 $N(x)$を求める．

(i) $0 \le x \le L$ のとき

FBD を描くと，図 1.2 のようになる．

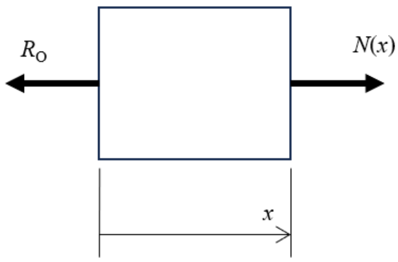


Fig.1.2 FBD ($0 \le x \le L$).

図 1.2 から力のつり合い式を立式すると，

$$
\begin{aligned}
-R_{\mathrm{O}} + N(x) &= 0 \\
N(x) &= R_{\mathrm{O}}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

となる．

(ii)$L \leq x \leq 2L$ のとき

FBD を描くと，図 1.3 のようになる．

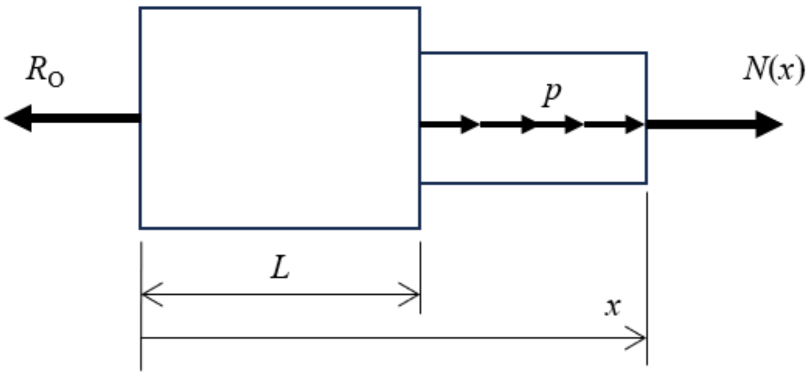


Fig.1.3 FBD ($L \leq x \leq 2L$).

図 1.3 から力のつり合い式を立式すると，

$$
\begin{aligned}
-R_{\mathrm{O}} + p(x-L) + N(x) &= 0 \\
N(x) &= R_{\mathrm{O}} - p(x-L)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

となる．

(ii)$2L \leq x \leq 3L$ のとき

FBD を描くと，図 1.4 のようになる．

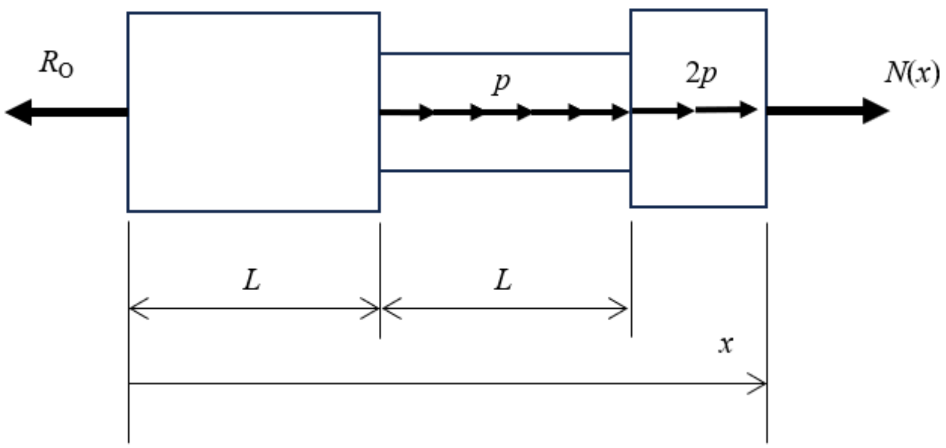


Fig.1.4 FBD ($2L \le x \le 3L$).

図 1.4 から力のつり合い式を立式すると，

$$
\begin{aligned}
-R_O + pL + 2p(x-2L) + N(x) = 0 \\
N(x) = R_O + 3pL - 2px
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

(3)点 C の変位 δ_C=0 となることから，壁からの反力 R_O，R_C を求めよ．

変位 δ_C は以下のように求められる．

$$
\begin{aligned}
\delta_C &= \int \varepsilon(x) dx \\
&= \int_0^L \frac{N(x)}{2EA} dx + \int_L^{2L} \frac{N(x)}{EA} dx + \int_{2L}^{3L} \frac{N(x)}{2EA} dx \\
&= \frac{1}{2EA}\left[\int_0^L R_O dx + \int_L^{2L} 2\left\{R_O - p(x-L)\right\} dx + \int_{2L}^{3L} \left\{R_O - 2px + 3pL\right\} dx\right] \\
&= \frac{1}{2EA}\left(R_O L + 2R_O L - pL^2 + R_O L - 2pL^2\right) \\
&= \frac{1}{2EA}\left(4R_O L - 3pL^2\right)
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

点 O，C は固定端であるから δ_C=0 となるので，

$$\frac{1}{2EA}\left(4R_{\mathrm{O}}L-3pL^2\right)=0 \tag{1.6}$$

$$R_{\mathrm{O}}=\frac{3}{4}pL \tag{1.7}$$

よって，式(1.1)の力のつり合い式から，

$$R_{\mathrm{C}}=\frac{9}{4}pL \tag{1.8}$$

(4)(3)の結果を用いて部材に作用している軸力 $N(x)$と垂直応力 $\sigma(x)$を求めよ．また，$N(x)$と $\sigma(x)$の x 方向の変化を図示せよ．

(3)で求めた R_{O} を式(1.2)，式(1.3)，式(1.4)に代入して軸力 $N(x)$，垂直応力 $\sigma(x)$を求める．

(i) $0 \le x \le L$ のとき

$$\begin{aligned} N(x) &= R_{\mathrm{O}} \\ &= \frac{3}{4}pL \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{N(x)}{A_{\mathrm{OA}}} \\ &= \frac{3pL}{8A} \end{aligned}$$

(1.10)

(ii) $L \le x \le 2L$ のとき

$$\begin{aligned} N(x) &= R_{\mathrm{O}}-p(x-L) \\ &= -px+\frac{7}{4}pL \end{aligned}$$

(1.11)

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_{\mathrm{AB}}} = \frac{-4px + 7pL}{4A}$$

(1.12)

(ii) $2L \le x \le 3L$ のとき

$$N(x) = R_{\mathrm{O}} - 2px + 3pL = \frac{-8px + 15pL}{4} \tag{1.13}$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_{\mathrm{BC}}} = \frac{-8px + 15pL}{8A} \tag{1.14}$$

以上より，$N(x)$と $\sigma(x)$の x 方向の変化を図示すると，それぞれ図 1.5，1.6 のようになる．

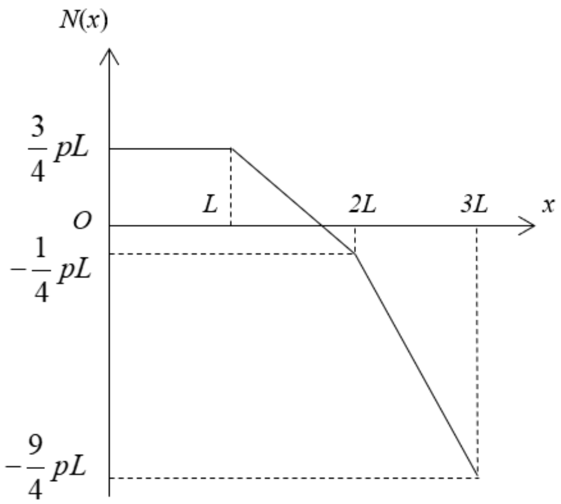


Fig.1.5 $N(x)$の x 方向の変化.

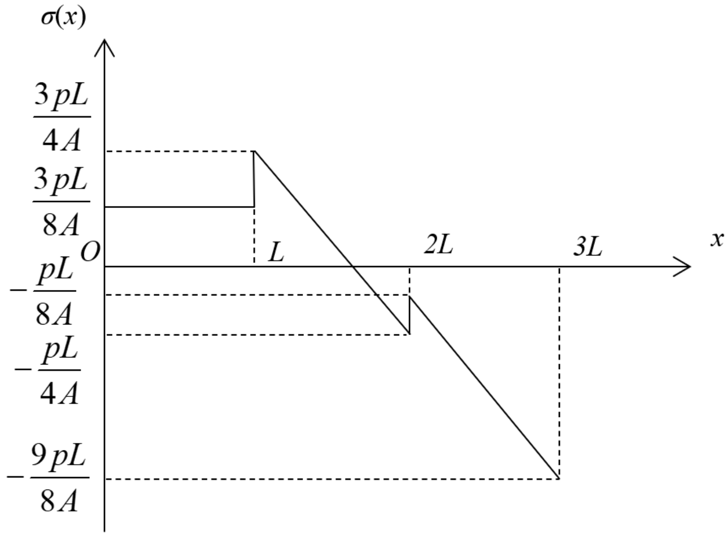


Fig.1.6 $\sigma(x)$の x 方向の変化

[2]　図１に示すような一端が壁に固定された一様断面の丸棒1, 2と，反対の右端を剛体板で並列に接合した部材がある. 剛体板は単純指示されており, 回転せずに平行(x軸方向)にのみ移動可能である．丸棒1, 2はともに長さLであり，伸び剛性がそれぞれE_1A_1, E_2A_2である．また，丸棒1に対してx軸正方向に分布荷重pが作用している．壁からの丸棒1, 2に対する反力をR_1，R_2と仮定して，以下の問いに答えよ．

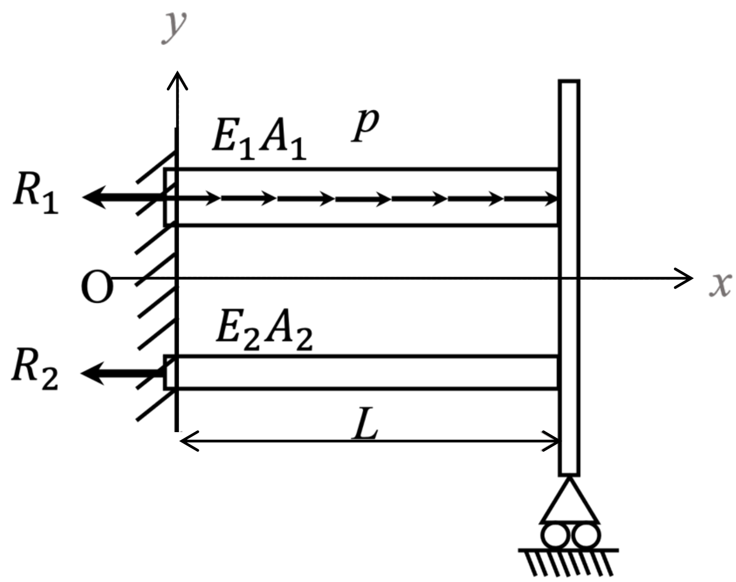


Fig.1 様々な丸棒

(1)　一様断面の丸棒1, 2と剛体板を含めた全体のFBDを図示せよ．また，分布荷重p，反力R_1，R_2による力のつりあい式を求めよ．

(2)　丸棒1, 2に作用する軸力N_1(x), N_2(x)を求めよ．

(3)　丸棒1, 2に生じるひずみε_1(x)，ε_2(x)を求めよ．

(4)　丸棒の右端(点 B)における変位δ_1，δ_2を求めよ．

(5)　右端の剛体板による拘束条件$\delta_1 = \delta_2$を利用して反力R_1，R_2を求めよ．

(1) 一様断面の丸棒1, 2と剛体板を含めた全体のFBDを図示せよ．また，分布荷重p，反力R_1，R_2による力のつりあい式を求めよ.

図の外力と反力から下図のようなFBDを描く.

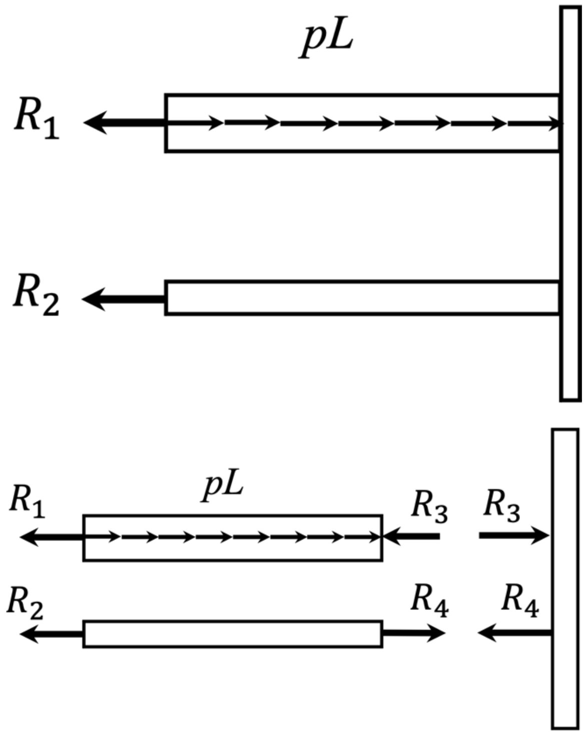


Fig.1.1 FBD

上図から力のつりあいの式は

$$-R_1 - R_2 + pL = 0 \tag{1.1}$$

となる.

厳密には，剛体板による反力R_3，R_4も作用する．しかし剛体板の力のつりあいより，R_3=R_4が成立し相殺されるため，全体のFBDでは省略した.

(2) 丸棒1, 2に作用する軸力$N_1(x)$, $N_2(x)$を求めよ.

丸棒1, 2に対してそれぞれ任意の位置xにおける仮想断面を考え，下図のようなFBDを描く.

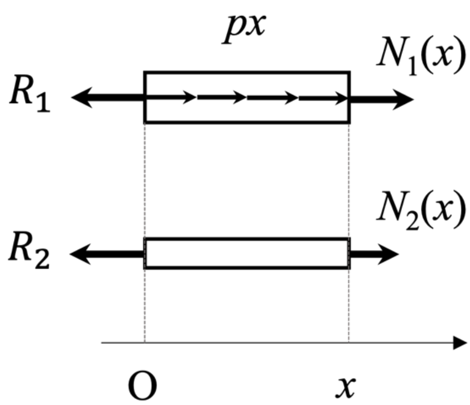


Fig.1.2 FBD

よって，力のつりあい式は,

$$
\begin{aligned}
&-R_1+p\cdot x+N_1(x)=0\\
&\therefore N_1(x)=-px+R_1\\
&-R_2+N_2(x)=0\\
&\therefore N_2(x)=R_2
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

となる.

(3)　丸棒1, 2に生じるひずみ$\boldsymbol{\varepsilon_1}$(x)，$\boldsymbol{\varepsilon_2}$(x)を求めよ.

丸棒1, 2の伸び剛性はそれぞれE_1A_1, E_2A_2であることから，ひずみε_1(x)，ε_2(x)は,

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1(x)=\frac{-px+R_1}{E_1A_1}\\
&\varepsilon_2(x)=\frac{R_2}{E_2A_2}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

となる.

(4)　丸棒の右端(点 B)における変位$\boldsymbol{\delta_1}$，$\boldsymbol{\delta_2}$を求めよ.

まずは丸棒1の変位δ_1を求める.

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \int_0^L \varepsilon_1(x)\,dx \\
&= \int_0^L \frac{-px + R_1}{E_1 A_1} dx \\
&= \frac{1}{E_1 A_1}\left[-\frac{1}{2}px^2 + R_1 x\right]_0^L \\
&= \frac{L}{E_1 A_1}\left(-\frac{1}{2}pL + R_1\right)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

となる．同様にして丸棒2の変位δ_2は，

$$
\begin{aligned}
\delta_2 &= \int_0^L \varepsilon_2(x)\,dx \\
&= \int_0^L \frac{R_2}{E_2 A_2} dx \\
&= \frac{R_2 L}{E_2 A_2}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

となる．

(5)　右端の剛体板による拘束条件$\delta_1 = \delta_2$を利用して反力R_1，R_2を求めよ．

拘束条件と式(1.1)を用いて反力R_1，R_2について解くと，

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{2E_1 A_1 + E_2 A_2}{2\left(E_1 A_1 + E_2 A_2\right)} pL \\
R_2 &= \frac{E_2 A_2}{2\left(E_1 A_1 + E_2 A_2\right)} pL
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

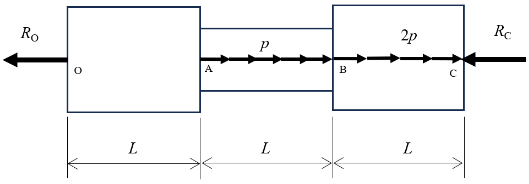
となる．

2024年4月29日	材料の力学 1	学籍番号: 氏名:
	解答用紙(第3回)	

[1]

(1)

FBD



力のつり合い式

$$-R_O + 3pL - R_C = 0$$

(2)

$$N(x) = \begin{cases} R_O & (0 \le x \le L) \\ R_O - p(x-L) & (L \le x \le 2L) \\ R_O + 3pL - 2px & (2L \le x \le 3L) \end{cases}$$

(3)

$$R_O = \frac{3}{4}pL,\quad R_C = \frac{9}{4}pL$$

(4)

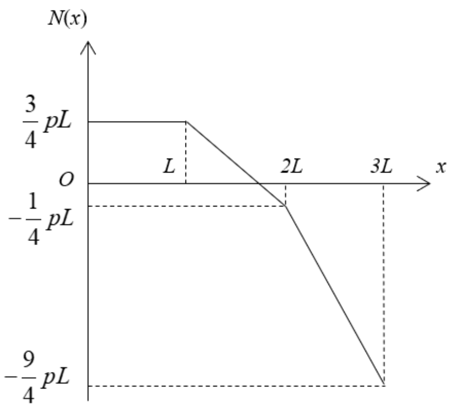
N(x)の式

$$N(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}pL & (0 \le x \le L) \\ -px + \dfrac{7}{4}pL & (L \le x \le 2L) \\ \dfrac{-8px + 15pL}{4} & (2L \le x \le 3L) \end{cases}$$

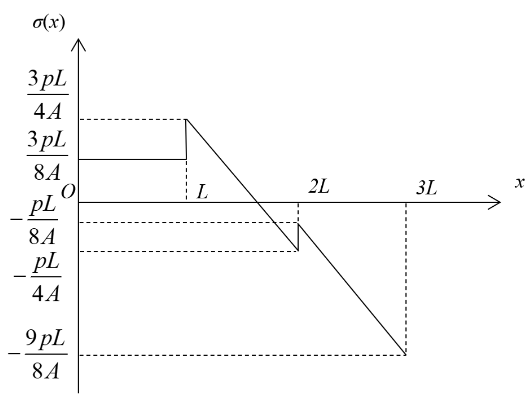
σ (x)の式

$$\sigma(x) = \begin{cases} \dfrac{3pL}{8A} & (0 \le x \le L) \\ \dfrac{-4px + 7pL}{4A} & (L \le x \le 2L) \\ \dfrac{-8px + 15pL}{8A} & (2L \le x \le 3L) \end{cases}$$

N(x)のグラフ



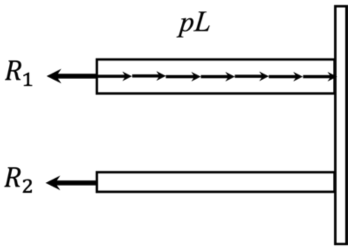
σ (x)のグラフ



[2]

(1)

FBD



力のつり合い式

$$-R_1 - R_2 + pL = 0$$

(2)

$$N_1(x) = -px + R_1$$

$$N_2(x) = R_2$$

(3)

$$\varepsilon_1(x) = \frac{-px + R_1}{E_1 A_1}$$

$$\varepsilon_2(x) = \frac{R_2}{E_2 A_2}$$

(4)

$$\delta_1 = \frac{L}{E_1 A_1}\left(-\frac{1}{2}pL + R_1\right)$$

$$\delta_2 = \frac{R_2 L}{E_2 A_2}$$

(5)

$$R_1 = \frac{2E_1 A_1 + E_2 A_2}{2\left(E_1 A_1 + E_2 A_2\right)} pL$$

$$R_2 = \frac{E_2 A_2}{2\left(E_1 A_1 + E_2 A_2\right)} pL$$