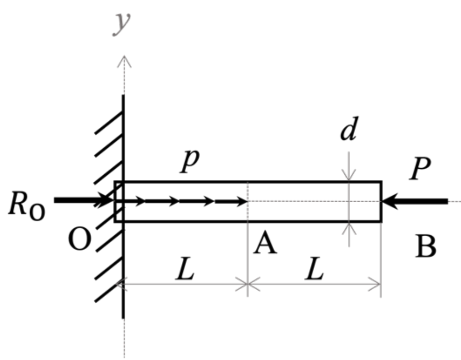
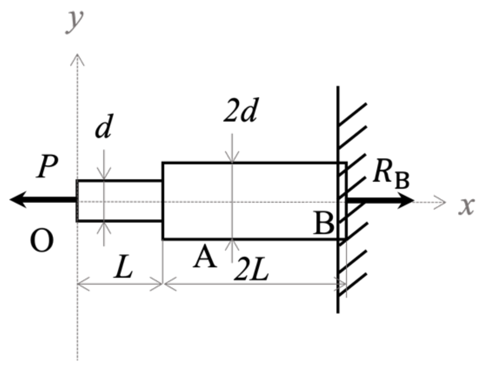
材料の力学 1　第 2 回演習問題（2024/4/22 実施）

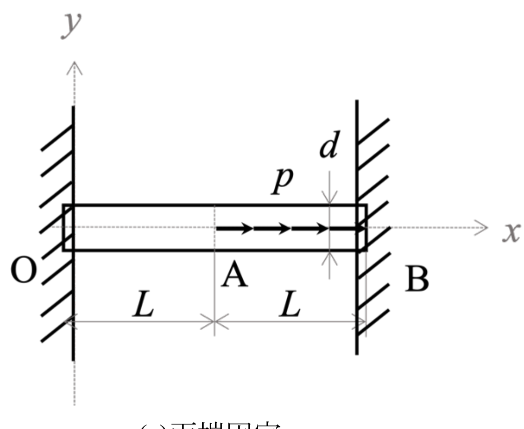
[1]　図 1 に示すような一端が壁に固定された一様断面の丸棒(a)，段付き丸棒(b)と両端が壁に固定された丸棒(c)がある．(a)は長さ$2L$，直径dの丸棒の左端が固定されておりBC間に分布荷重p，外力Pが図のように作用している．(b)は長さL，直径dの丸棒(OA間)と長さ$2L$，直径$2d$の丸棒(AB間)からなる段付き丸棒が右端で固定されている．(c)は長さL，直径dの丸棒の両端が固定されており点Aで分布荷重pが右向きに作用している．点O，Bでの壁からの反力をR_O，R_B(右向き正)，丸棒のヤング率をEとして，以下の問いに答えよ．



(a)一様断面



(b)段付き



(c)両端固定

Fig.1 様々な丸棒

(1)　一様断面の丸棒(a)に対して，

- (i)　FBD を描き(R_Oの向きに注意)，力のつり合い式を立式して反力R_Oを求めよ．
- (ii)　座標xにおける軸力$N(x)$を求めよ．また，x方向に変位，y軸方向に軸力を取り図示せよ．ただし$P > pL$であることに注意せよ．
- (iii)　応力－ひずみの関係から，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ．

(iv)　点Bにおけるx方向変位δ_Bを求めよ(※).

(2)　段付き丸棒(b)に対して,

(i)　FBDを描き(R_Bの向きに注意), 力のつり合い式を立式して反力R_Bを求めよ.

(ii)　座標xにおける軸力$N(x)$を求めよ．また, x方向に変位, y軸方向に軸力を取り図示せよ.

(iii)　応力－ひずみの関係から, 垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ.

(iv)　点Oにおけるx方向変位δ_Oを求めよ(※).

(3)　両端固定の丸棒(c)に対して,

(i)　反力R_O, R_Bを用いて力のつり合い式を立式せよ．また, FBD を描け. $|R_O| < pL$, $|R_B| < pL$であることに注意せよ

(ii)　座標xにおける軸力$N(x)$を求めよ.

(※)微小部分dxの伸びをdl, ひずみをεとすると以下の式が成り立つ.

$$dl = \varepsilon dx$$

(1)　一様断面の丸棒(a)に対して，

(i)　FBD を描き(R_Oの向きに注意)，力のつり合い式を立式して反力R_Oを求めよ．

図の外力から反力の方向を判断する．圧縮方向(x軸負方向)に外力が作用しているため反力R_Oの向きはx軸正方向となる．従って，FBDは下図のようになる．

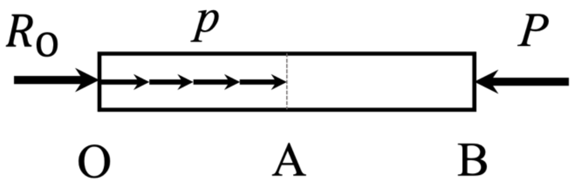


Fig.1.1 FBD

上図から力のつりあいの式は

$$R_O + p \cdot L - P = 0$$
$$\therefore R_O = -pL + P \tag{1.1}$$

となる．

(ii)　座標xにおける軸力$N(x)$を求めよ．また，x方向に変位，y軸方向に軸力を取り図示せよ．ただし$P > pL$であることに注意せよ．

(i)と同様に位置xにおいて仮想断面を設定し，FBDを考える．点A(x=L)前後で分布荷重が変化するため場合分けする．

$0 \leq x \leq L$のとき

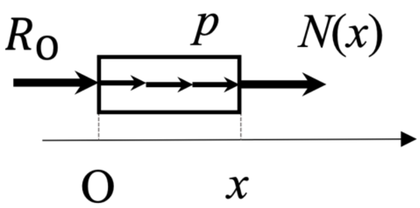


Fig.1.2 FBD

よって，力のつりあいの式は

$$R_O + p \cdot x + N(x) = 0$$
$$\therefore N(x) = -p(x - L) - P \tag{1.2}$$

となる．

$L \leq x \leq 2L$のとき

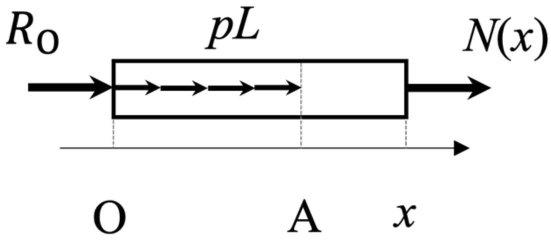


Fig.1.3 FBD

よって，力のつりあいの式は

$$
\begin{aligned}
&R_O + p \cdot L + N(x) = 0 \\
&\therefore N(x) = -P
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

となる．

以上より，グラフは次のようになる．y切片が負になることに注意．

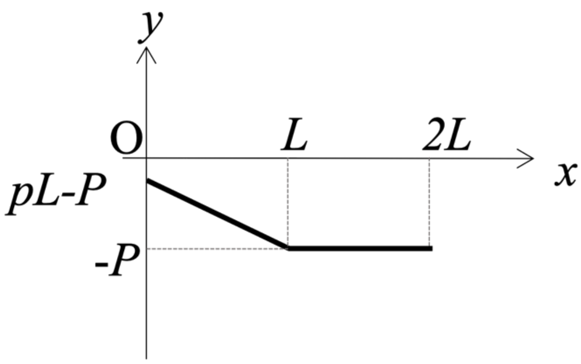


Fig.1.4 軸力ー変位線図

(iii) **応力－ひずみの関係から，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ．**

応力$\sigma(x)$は断面積$A(x)$とすると

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \tag{1.4}$$

となる．応力ーひずみの関係

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.5}$$

より，

$$
\varepsilon = \frac{N(x)}{EA(x)}
$$

$$
= \begin{cases} -\dfrac{4\{P + p(x-L)\}}{\pi E d^2} & (0 \le x \le L) \\ -\dfrac{4P}{\pi E d^2} & (L \le x \le 2L) \end{cases} \tag{1.6}
$$

を得る.

(iv)　点Bにおけるx方向変位δ_Bを求めよ(※).

点Bでの変位は微小変位dδを点OからBまで積分することで得られることから、
となる.

$$
\begin{aligned}
\delta_B &= \int_0^{2L} \varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^L -\frac{4\{P + p(x-L)\}}{\pi E d^2}\,\mathrm{d}x + \int_L^{2L} -\frac{4P}{\pi E d^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{4}{\pi E d^2}\left[Px + \frac{1}{2}p(x-L)^2\right]_0^L - \frac{4PL}{\pi E d^2} \\
&= \frac{2L}{\pi E d^2}(-4P + pL)
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

(2)　段付き丸棒(b)に対して,

(i)　FBDを描き(R_Bの向きに注意), 力のつり合い式を立式して反力R_Bを求めよ.

図から反力の方向を判断する. 今回は引張方向(x軸負方向)に外力が作用しているため, 反力R_Bはx軸正方向となる. 従って, FBDは下図のようになる.

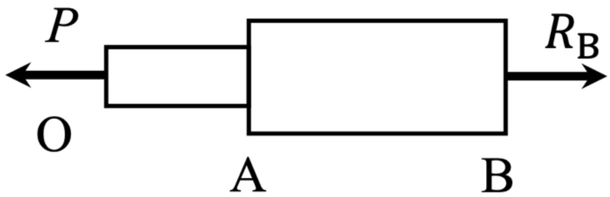


Fig.1.5 FBD

上図より力のつりあいの式は

$$
\begin{aligned}
&-P+R_{\mathrm{B}}=0 \\
&\therefore R_{\mathrm{B}}=P
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

となる．

(ii)　座標xにおける軸力$N(x)$を求めよ．また，x方向に変位，y軸方向に軸力を取り図示せよ．

(1)と同様に位置xにおけるFBDを考える．点A(x=L)前後で断面形状が変化するため場合分けする．

$0 \leq x \leq L$のとき

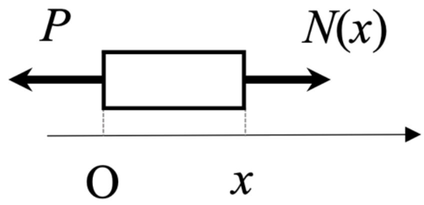


Fig.1.6 FBD

上図より力のつりあいの式は

$$
\begin{aligned}
&-P+N(x)=0 \\
&\therefore N(x)=P
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

となる．

$L \leq x \leq 3L$のとき

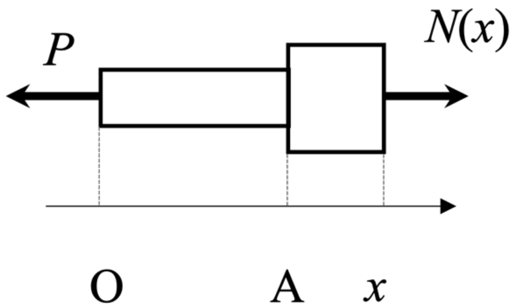


Fig.1.7 FBD

上図より力のつりあいの式は

$$
\begin{aligned}
&-P+N(x)=0 \\
&\therefore N(x)=P
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

となる．

以上より，軸力は断面形状に依存しない．グラフは次のようになる．

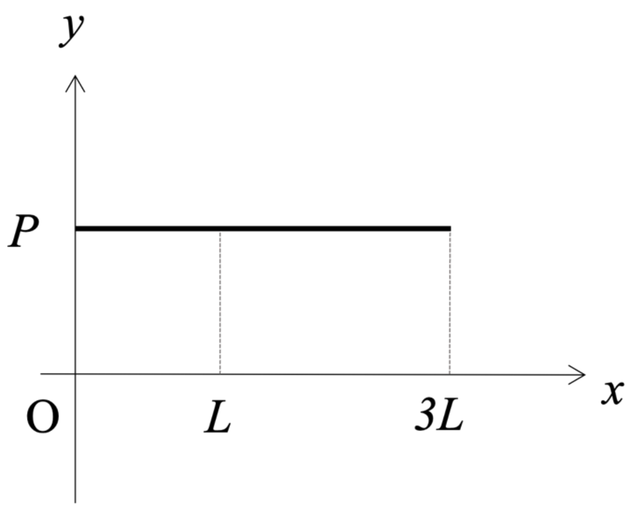


Fig.1.8 軸力ー変位線図

(iii)　応力－ひずみの関係から，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ．

応力は式(1.4)で表される．ここで，断面積$A(x)$は

$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi d^2}{4} & (0\leq x\leq L)\\ \pi d^2 & (L\leq x\leq 3L)\end{cases} \tag{1.11}$$

である．式(1.5)で表される応力ーひずみの関係式を用いて，

$$\begin{aligned}\varepsilon(x)&=\frac{N(x)}{EA(x)}\\ &=\begin{cases}\dfrac{4P}{\pi E d^2} & (0\leq x\leq L)\\ \dfrac{P}{\pi E d^2} & (L\leq x\leq 3L)\end{cases}\end{aligned} \tag{1.12}$$

となる．

(iv)　点Oにおけるx方向変位δ_0を求めよ(※).

点Oでの変位は微小変位dδをx軸負方向に伸びることを考慮し点BからOまで積分することで得られることから、

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{O}} &= \int_{3L}^{0} \varepsilon(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{L}^{0} \frac{4P}{\pi E d^2} \mathrm{d}x + \int_{3L}^{L} \frac{P}{\pi E d^2} \mathrm{d}x \qquad (1.13) \\
&= -\frac{6PL}{\pi E d^2}
\end{aligned}
$$

となる.

(3)　両端固定の丸棒(c)に対して，

(i)　反力R_O，R_Bを用いて力のつり合い式を立式せよ．また，FBD を描け．ここで，$|R_O| < pL$，$|R_B| < pL$であることに注意せよ．

x軸正方向に外力が作用しているため，点Oでの反力ROはx軸負方向(引張方向)，点Bでの反力RBもx軸負方向(圧縮方向)となる．よってFBDは下図のようになる．

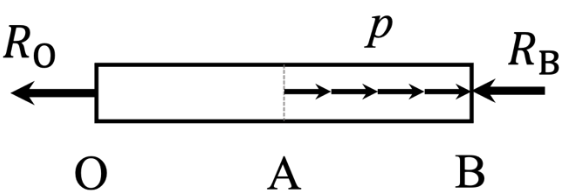


Fig.1.9 FBD

よって力のつりあいの式は

$$-R_O + p \cdot L - R_B = 0 \tag{1.14}$$

となる．

(ii)　座標xにおける軸力$N(x)$を求めよ．

(1)と同様に位置xにおけるFBDを考える．点A(x=L)前後で作用する外力が変化するため場合分けする．

$0 \le x \le L$のとき

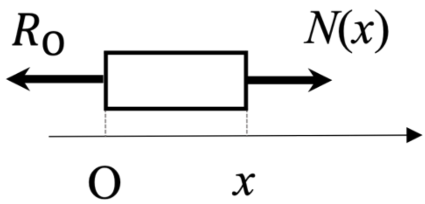


Fig.1.10 FBD

上図より力のつりあいの式から

$$-R_O + N(x) = 0$$
$$\therefore N(x) = R_O \tag{1.15}$$

となる．

$L \le x \le 2L$のとき，分布荷重に関する座標に注意して，

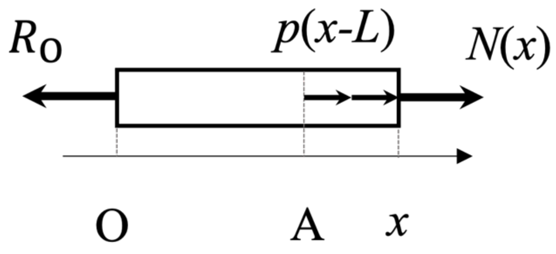


Fig.1.7 FBD

上図より力のつりあいの式から

$$
\begin{aligned}
&-R_O + p\cdot(x-L) + N(x) = 0\\
&\therefore N(x) = R_O - p(x-L)\\
&\qquad \left(= -R_B - p(x-2L)\right)
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

となる．

[2]　図 2 に示すように，先端が平坦な丸棒（パンチ）に荷重 P を加えることで，厚さ t=0.5mm の鋼板に直径 d=10mm の円形の穴をあけたい．このとき，パンチ及び押さえの台は変形しないものとして，以下の問いに答えよ．なお図 2 の鋼板の厚さは誇張して描いてある．

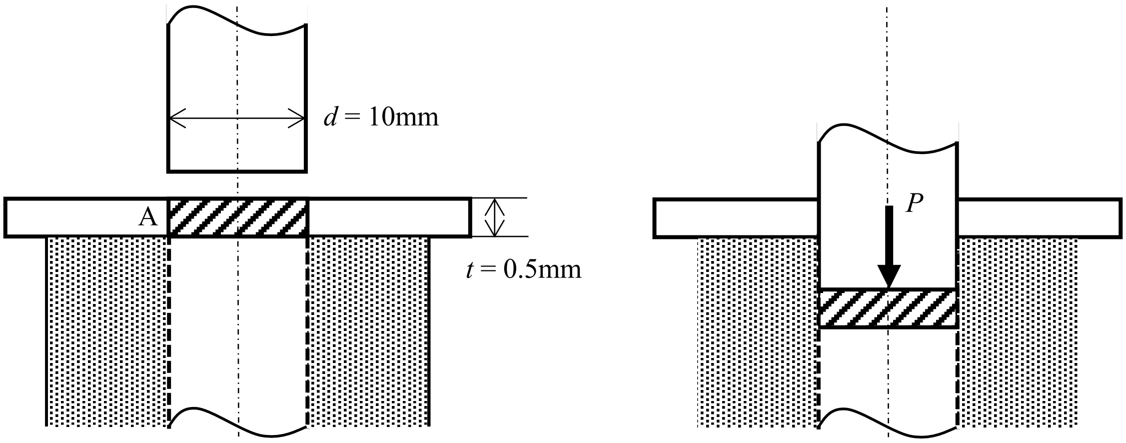


Fig.2 パンチ

(1) 斜線部 A について FBD を描き，斜線部 A の縁に作用するせん断力 Q を求めよ．

(2) 鋼板のせん断強さを t_a=400[MPa]とすると，この鋼板にパンチ穴をあけるために必要な荷重 P[N]はいくら以上か，有効数字 3 桁で求めよ．

(1) 斜線部 A について FBD を描き，斜線部 A の縁に作用するせん断力 Q を求めよ．

図 2.1 に斜線部 A の FBD を示す．

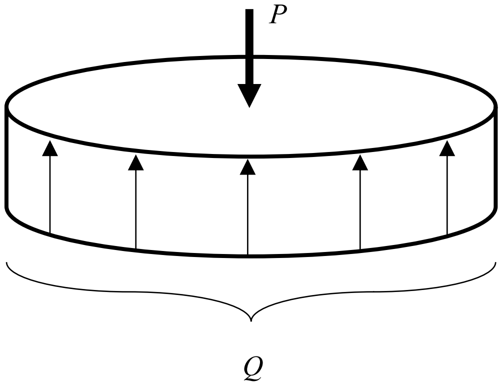


Fig. 2.1 FBD

よって，斜線部 A の縁に作用するせん断力 Q は力のつりあいより

$$\begin{aligned} -P+Q&=0 \\ \therefore Q&=P \end{aligned} \tag{2.1}$$

である．

(3) 鋼板のせん断強さを t_a=400[MPa]とすると，この鋼板にパンチ穴をあけるために必要な荷重 P[N]はいくら以上か，有効数字 3 桁で求めよ．

斜線部 A の縁の部分の面積 S は，

$$S=\pi dt \tag{2.2}$$

であるから，斜線部 A の縁でのせん断応力 τ は

$$\tau=\frac{Q}{S}=\frac{P}{\pi dt} \tag{2.3}$$

と表される．

鋼板にパンチ穴を開けるには以下の条件を満たしていればよい.

$$\tau \geq \tau_a \tag{2.4}$$

式(2.4)に式(2.3)と各値を代入することで，荷重 P の条件は次のように求められる.

$$\begin{gathered} \frac{P}{\pi d t} \geq \tau_a \\ \therefore P \geq 6283 [N] \end{gathered} \tag{2.5}$$

以上より，鋼板にパンチ穴をあけるには荷重が**6.28×10^3[N]**以上であればよい.