[1]　図 1 に示すような不静定はりについて考える．点 O にて壁に固定，点 B にて単純支持されており，A 点に集中荷重 P が作用している．はりの断面二次モーメントを I，弾性係数は E とする．このとき以下の問いに答えよ．

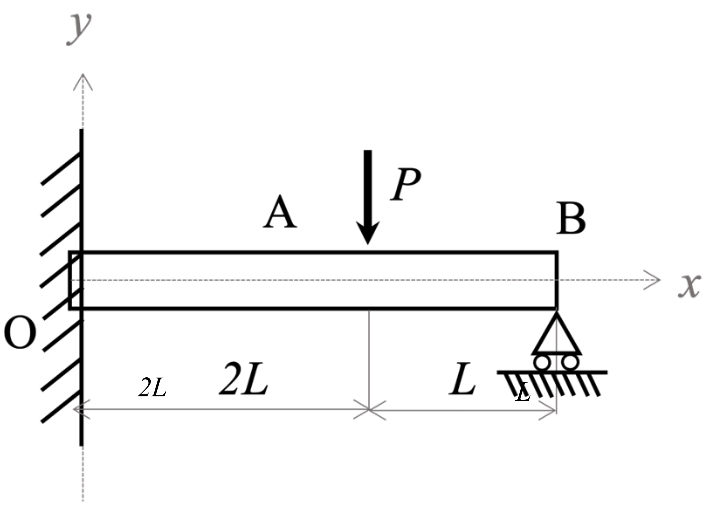

Fig. 1　片方固定，片方支持の不静定はり

(1)　点 O および点 B に作用する反力をそれぞれ R_O，R_B，また点 O に作用する反モーメントを M_O とする．このときのはりに関する力のつり合い式，および点 B まわりの力のモーメントのつり合い式をそれぞれ求めよ．

(2)　はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$を R_O，P，L，x のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

(3)　はりが点 O で固定され，また点 A で連続であることを用いて、たわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$を R_O，P，L，x，E，I のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

(4)　はりが点 B で支持されていることを用いて，反力 R_O，R_A，反モーメント M_O を P，L のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

(5)　(1)〜(4)の結果を用いてはり全体の SFD，BMD を示せ．

(1)　点 O および点 B に作用する反力をそれぞれ R_O，R_B，また点 O に作用する反モーメントを M_O とする．このときのはりに関する力のつり合い式，および点 B まわりの力のモーメントのつり合い式をそれぞれ求めよ．

はり全体の FBD は以下の通り．

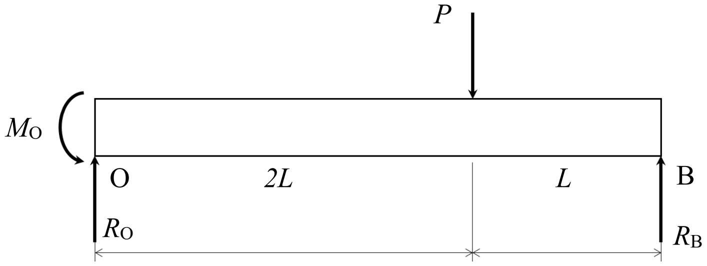

Fig. 1.1　はり全体の FBD

図 1.1 より，力のつり合い式および点 B まわりの力のモーメントのつり合い式はそれぞれ，

$$R_O + R_B - P = 0 \tag{1.1}$$

$$-M_O + R_O \cdot 3L - PL = 0 \tag{1.2}$$

(2)　はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$を R_O，P，L，x のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

$x = 2L$ に集中荷重 P が負荷されていることから，場合分けする．

(i) $0 \le x < 2L$ のとき

任意の仮想断面におけるせん断力を $Q_1(x)$，曲げモーメントを $M_1(x)$とすると，FBD は，

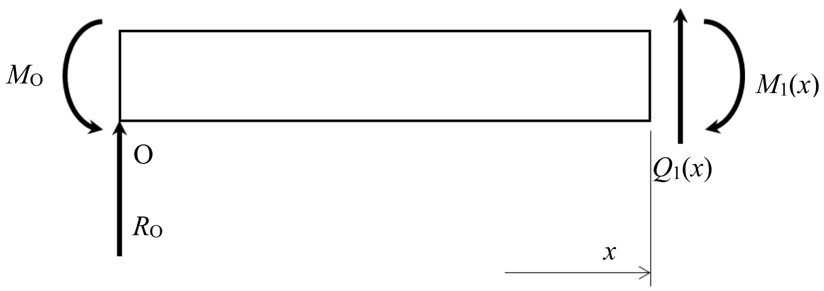

Fig. 1.2　$0 \le x < 2L$ におけるはりの FBD

となる．

図 1.2 において力のつり合い式を考えると

$$Q_1(x) + R_O = 0 \tag{1.3}$$

$$Q_1(x) = -R_O \tag{1.4}$$

また、点 O まわりのモーメントのつり合い式より

$$M_O + Q_1(x)x - M_1(x) = 0 \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \therefore M_1(x) &= M_O + Q_1(x)x \\ &= M_O - R_O x \\ &= R_O(3L - x) - PL \end{aligned} \tag{1.6}$$

となる.

(ii) $2L \leq x < 3L$ のとき

任意の仮想断面におけるせん断力を $Q_2(x)$，曲げモーメントを $M_2(x)$とすると，FBD は以下の通り.

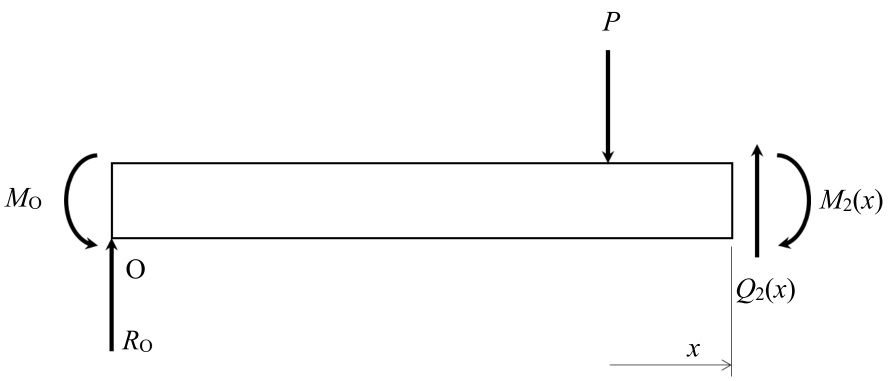

Fig. 1.3　$2L \leq x \leq 3L$ におけるはりの FBD

図 1.3 において力のつり合い式を考えると

$$Q_2(x) + R_O - P = 0 \tag{1.9}$$

$$Q_2(x) = P - R_O \tag{1.10}$$

また、点 O まわりのモーメントのつり合い式より

$$M_O + Q_2(x)x - P \cdot 2L - M_2(x) = 0 \tag{1.11}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore M(x) &= M_O + Q_2(x)x - 2PL \\
&= M_O + (P - R_O)x - 2PL \\
&= (P - R_O)x - (P - R_O)3L \\
&= (P - R_O)(x - 3L)
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

となる.

(3)　はりが点 O で固定され，<u>また点 A で連続であることを用いて</u>、たわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$を R_O，P，L，x，E，I のみを含んだ形でそれぞれ求めよ.

不静定問題であることから，R_O を用いたつつ，たわみ角やたわみを求め，境界条件より R_O を消去する．曲げモーメントとたわみの関係式より，

$$
-EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = \begin{cases} R_O(3L - x) - PL & (0 \leq x < 2L) \\ (P - R_O)(x - 3L) & (2L \leq x \leq 3L) \end{cases}
\tag{1.13}
$$

したがってこれらを区間に分けて積分し，境界条件を適用させる．なお C_1～C_4 は積分定数.

(i) $0 \leq x < 2L$ のとき

式(1.15)より

$$
-EIv_1''(x) = R_O(3L - x) - PL
\tag{1.14}
$$

$$
-EIv_1'(x) = -\frac{1}{2}R_O x^2 + (3R_O L - PL)x + C_1
\tag{1.15}
$$

$$
-EIv_1(x) = -\frac{1}{6}R_O x^3 + \frac{1}{2}(3R_O L - PL)x^2 + C_1 x + C_2
\tag{1.16}
$$

となる.

(ii) $2L \leq x < 3L$ のとき

同様に,

$$
-EIv_2''(x) = (P - R_O)x - (P - R_O)3L
\tag{1.17}
$$

$$
-EIv_2'(x) = \frac{1}{2}(P - R_O)x^2 - (P - R_O)3Lx + C_3
\tag{1.18}
$$

$$-EIv_2(x) = \frac{1}{6}(P - R_O)x^3 - \frac{1}{2}(P - R_O)3Lx^2 + C_3x + C_4 \tag{1.19}$$

ここで，はりは点 O で固定されていることから，$x = 0$ においてたわみ角およびたわみはそれぞれ 0 である．このことより，

$$EIv_1'(0) = C_1 = 0 \therefore C_1 = 0 \tag{1.20}$$

$$EIv_1(0) = C_2 = 0 \therefore C_2 = 0 \tag{1.21}$$

また，はりは点 A で連続であることから，$v_1'(2L) = v_2'(2L)$，$v_1(2L) = v_2(2L)$が成り立つため，

$$-\frac{1}{2}R_Ox^2 + (3R_OL - PL)x = \frac{1}{2}(P - R_O)x^2 - (P - R_O)3Lx + C_3 \tag{1.22}$$

$$\therefore C_3 = 2PL^2 \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{6}R_Ox^3 + \frac{1}{2}(3R_OL - PL)x^2 \\ &= \frac{1}{6}(P - R_O)x^3 - \frac{1}{2}(P - R_O)3Lx^2 + C_3x + C_4 \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\therefore C_4 = -\frac{4}{3}PL^3 \tag{1.25}$$

となる．

以上のことより，たわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$は

$0 \leq x < 2L$ のとき

$$\begin{aligned} v_1'(x) &= -\frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{2}R_Ox^2 + (3R_OL - PL)x\right\} \\ v_1(x) &= -\frac{1}{EI}\left\{-\frac{1}{6}R_Ox^3 + \frac{1}{2}(3R_OL - PL)x^2\right\} \end{aligned} \tag{1.26}$$

$2L \leq x < 3L$ のとき

$$\begin{aligned} v_2'(x) &= -\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}(P - R_O)x^2 - (P - R_O)3Lx + 2PL^2\right\} \\ v_2(x) &= -\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}(P - R_O)x^3 - \frac{1}{2}(P - R_O)3Lx^2 + 2PL^2x - \frac{4}{3}PL^3\right\} \end{aligned} \tag{1.27}$$

となる．

(4) はりが点Bで支持されていることを用いて，反力 R_O，R_B，反モーメント M_O を P，L のみを含んだ形でそれぞれ求めよ．

はりは点Bにおいて単純支持されていることから，$x = 3L$ におけるたわみは0である．これより，

$$-EIv_2(3L) = \left\{\frac{1}{6}(R_O - P)(3L)^3 + \frac{1}{2}(R_O - P)3L(3L)^2 - 2PL^2(3L) + \frac{4}{3}PL^3\right\} = 0 \tag{1.28}$$

式(1.1)，(1.2)，(1.31)より，

$$R_O = \frac{13}{27}P \tag{1.29}$$

$$R_B = \frac{14}{27}P \tag{1.30}$$

$$M_O = \frac{4}{9}PL \tag{1.31}$$

(5) (1)～(4)の結果を用いてはり全体のSFD，BMDを示せ．

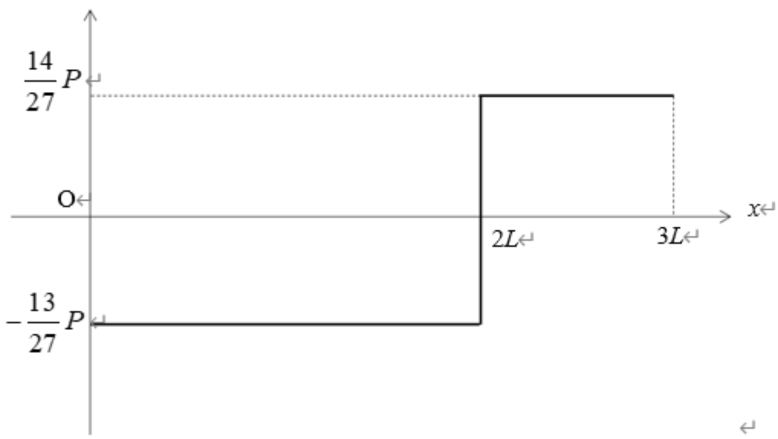

Fig. 1.4　はりのSFD

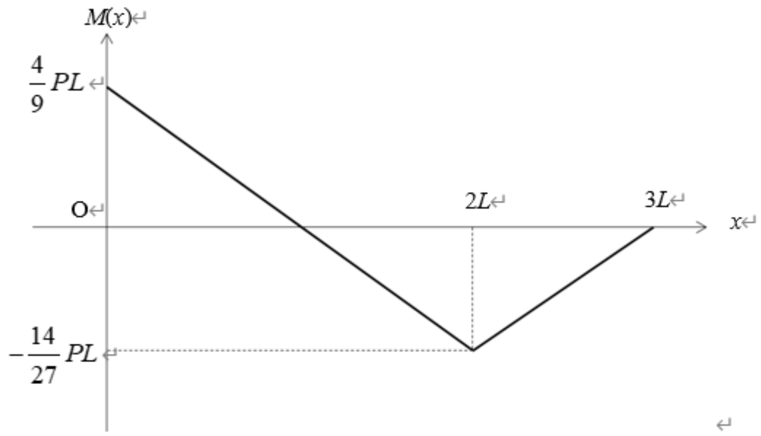

Fig. 1.5　はりの BMD

なお，$Q(x)$と $M(x)$は(1)〜(4)の結果から導いた以下の式を用いた．

$$Q(x) = \begin{cases} -R_O = -\dfrac{13}{27}P & (0 \le x < 2L) \\ P - R_O = \dfrac{14}{27}P & (2L \le x \le 3L) \end{cases} \tag{1.32}$$

$$M(x) = \begin{cases} R_O(3L - x) - PL = \dfrac{4}{9}PL - \dfrac{13}{27}Px & (0 \le x < 2L) \\ -(P - R_O)(3L - x) = -\dfrac{14}{9}PL + \dfrac{14}{27}Px & (2L \le x \le 3L) \end{cases} \tag{1.33}$$