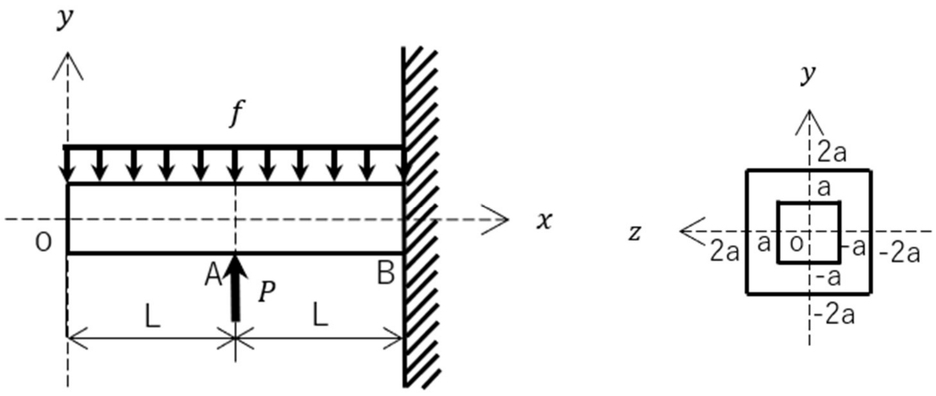
材料の力学 1　第 11 回演習問題

[1] 図 1(a)に示すような中空の片持ちはりに分布荷重fと集中荷重Pが作用している．はりの断面形状は図 1(b)のようになっている．このとき以下の問いに答えよ．



(a)　(b)

Fig.1

(1) このはりのz軸に関する断面 2 次モーメントI_zを求めよ．

(2) はり全体のFBDを描き，壁から受ける反力R_Bと反モーメントM_Bを求めよ．

(3) 位置xの仮想断面において，はりに作用するせん断力$Q(x)$及び曲げモーメント$M(x)$を求めよ．

(4) 点Aに生じる最大曲げ応力$\sigma_{A\,max}$の大きさを求めよ．

(5) このはりは，$\sigma_{A\,max}$より大きい応力に耐えられないという．はりが壊れないようにするためには荷重Pをどのように制御すればよいか．荷重の満たすべき条件を求めよ．

(1) **このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント$\boldsymbol{I_z}$を求めよ.**

z 軸に関する断面 2 次モーメントI_zは以下のように求められる.

$$I_z = \frac{4a(4a)^3}{12} - \frac{2a(2a)^3}{12} = 20a^4$$

(2) **はり全体のFBDを描き，壁から受ける反力$\boldsymbol{R_B}$と反モーメント$\boldsymbol{M_B}$を求めよ.**

はり全体の FBD を図 1.1 に示す.

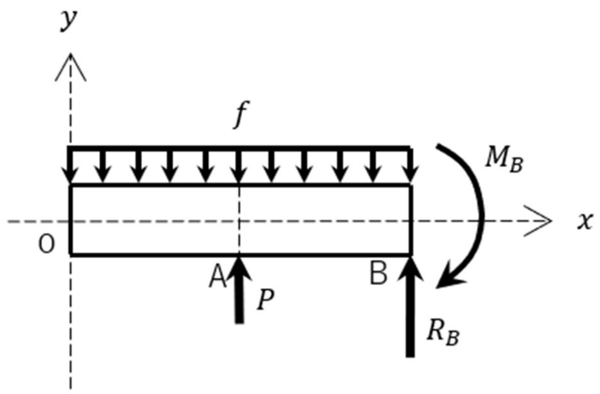


Fig. 1.1 はり全体の FBD

つり合い式より,

$$-\int_0^{2L} f dx' + P + R_B = 0$$

$$R_B = -P + 2fL$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より,

$$-\int_0^{2L} f x' dx' + PL + 2R_B L - M_B = 0$$

$$M_B = -PL + 2fL^2$$

(3) 位置$\boldsymbol{x}$の仮想断面において，はりに作用するせん断力$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$及び曲げモーメント$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$を求めよ.

(i) $0 \leq x < \mathrm{L}$のとき

はりの FBD を図 1.2 に示す.

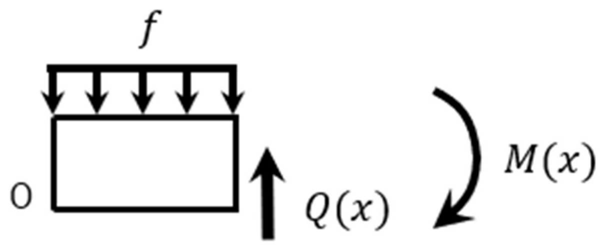


Fig. 1.2 はりの FBD($0 \leq x < \mathrm{L}$)

力のつり合い式より,

$$Q(x) - \int_0^x f dx' = 0$$

$$Q(x) = fx$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より,

$$-M(x) + Q(x) \cdot x - \int_0^x f x' dx' = 0$$

$$M(x) = \frac{1}{2} f x^2$$

(ii) $\mathrm{L} < x \leq 2\mathrm{L}$のとき

はりの FBD を図 1.3 に示す.

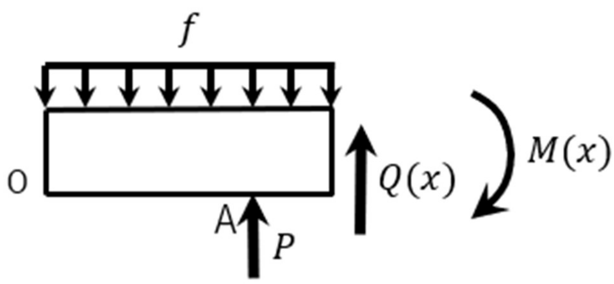


Fig. 1.3 はりの FBD($\mathrm{L} < x \leq 2\mathrm{L}$)

力のつり合い式より，

$$Q(x) + P - \int_0^x f dx' = 0$$
$$Q(x) = -P + fx$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より，

$$-M(x) + Q(x) \cdot x + PL - \int_0^x f x' dx' = 0$$
$$M(x) = -P(x - L) + \frac{1}{2} f x^2$$

(4) 点**A**に生じる最大曲げ応力$\boldsymbol{\sigma_{A\,max}}$の大きさを求めよ．

$x = L$における曲げモーメントは

$$M_A = \frac{1}{2} f L^2$$

最大曲げ応力は図心から最も離れた点，$y = \pm 2a$に生じるので，

$$\sigma_{Amax} = \left| \frac{\frac{1}{2} f L^2}{20a^4} (\pm 2a) \right| = \frac{fL^2}{20a^3}$$

(5) このはりは，$\boldsymbol{\sigma_{A\,max}}$より大きい応力に耐えられないという．はりが壊れないようにするためには荷重$\boldsymbol{P}$をどのように制御すればよいか．荷重の満たすべき条件を求めよ．

求める条件は

$$|M(x)| \leq M_A$$

が$0 \leq x \leq 2\mathrm{L}$で成り立つことである．$0 \leq x \leq \mathrm{L}$において式(1.10)は常に成り立つので，$\mathrm{L} \leq x \leq 2\mathrm{L}$を考えると

$$-\frac{1}{2}fL^2 \leq -P(x-L) + \frac{1}{2}fx^2 \leq \frac{1}{2}fL^2$$

すなわち

$$\frac{1}{2}fg(x) \leq P \leq \frac{1}{2}fh(x)$$

$$\begin{cases} g(x) = x + L \\ h(x) = \dfrac{x^2 + L^2}{x - L} \end{cases}$$

が常に成り立てばよい．ここで，gの最大値は

$$g(2L) = 3L$$

であり，hの最小値は

$$h'(x) = 1 - \frac{L^2}{(x-L)^2} \leq 1 - 1 = 0$$

ゆえ

$$h(2L) = 5L$$

である．よって求める条件は

$$\frac{3}{2}fL \leq P \leq \frac{5}{2}fL$$

[2] 図のように左端を壁に固定された長さ $2l$ のはりがある．はりの中央部（A 点）で荷重 P が上向きで作用し，はりの右端部分(B 点)に剛体レバーが取り付けられ、上部に分布荷重 p が作用している．はりの断面形状は図 2.2 のような長方形になっており，左側（O 点）の支点反力を R_O，反モーメントを M_O として，以下の各設問に解答せよ．

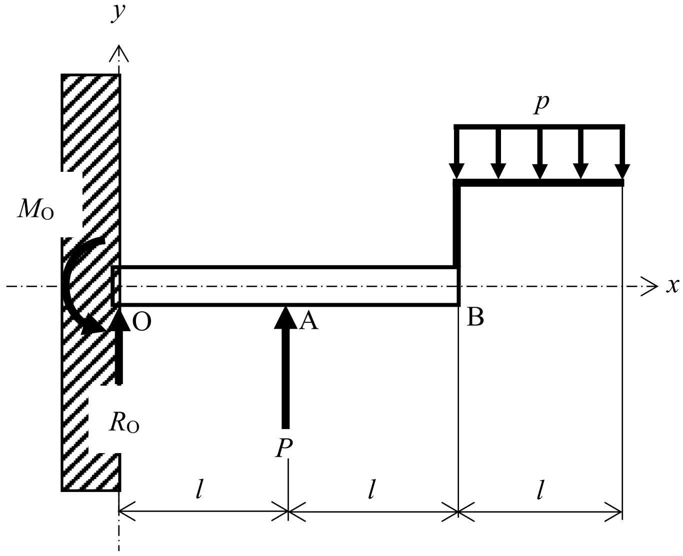


Fig.2.1 剛体レバーの付いたはり

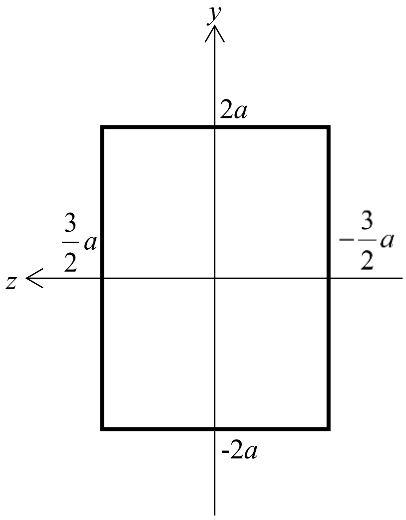


Fig.2.2 はりの断面形状

(1) はりの z 軸に関する断面二次モーメント I_Z を求めよ．

(2) 剛体レバーの FBD を描き，B 点での反力 R_B，反モーメント M_B を求めよ．ただし，反力は y 軸方向を正，反モーメントは半時計回りを正とする．

(3) はり全体の FBD を描き，壁が受ける反力 R_O，および反モーメント M_O を求めよ．ただし B 点に生じる力と反モーメントを考慮せよ．

以下の問題では $P = 2pl$ として，p のみを用いて答えよ．

(4) はりに生じるせん断力 $Q(x)$ と曲げモーメント $M(x)$ を求め，$Q(x)$ と $M(x)$ の x 方向変化をそれぞれ図示せよ．

(5) はりの曲げモーメントが最大になる最大曲げ応力 σ_{max} を求めよ．

(1) はりの z 軸に関する断面二次モーメント I_Z を求めよ．

長方形形状の断面二次モーメントの公式より

$$I_Z = \frac{1}{12} \cdot 3a \cdot (4a)^3 = 16a^4 \tag{2.1}$$

である．

(2) 剛体レバーの FBD を描き，B 点での反力 R_B，反モーメント M_B を求めよ．ただし，反力は y 軸方向を正，反モーメントは半時計回りを正とする．

剛体レバーの FBD は以下のように表される．

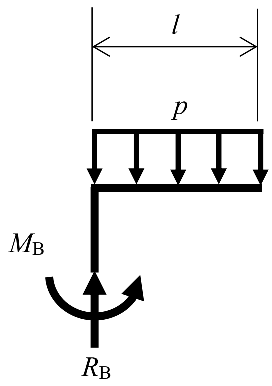


Fig. 2.3 剛体レバーの FBD

力のつり合い式より

$$R_B - pl = 0 \tag{2.2}$$

$$R_B = pl \tag{2.3}$$

B 点まわりのモーメントのつり合い式より

$$-M_B + \int_0^l px\,dx = -M_B + \frac{1}{2}pl^2 = 0 \tag{2.4}$$

$$M_B = \frac{1}{2}pl^2 \tag{2.5}$$

である．

(3) はり全体の FBD を描き，壁が受ける反力 Ro，および反モーメント Mo を求めよ．ただし B 点に生じる力と反モーメントを考慮せよ．

はり全体の FBD は図 2.4 である．

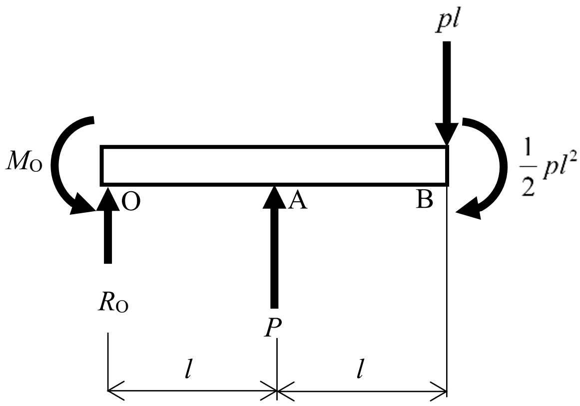


Fig.2.4 はり全体の FBD

力のつり合い式より

$$R_O + P - pl = 0 \tag{2.6}$$
$$R_O = -P + pl \tag{2.7}$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より

$$M_O + P \times l - pl \times 2l - \frac{1}{2}pl^2 = 0 \tag{2.8}$$

$$M_O = -Pl + \frac{5}{2}pl^2 \tag{2.9}$$

である．

(4) はりに生じるせん断力 $Q(x)$と曲げモーメント $M(x)$を求め，$Q(x)$と $M(x)$の x 方向変化をそれぞれ図示せよ．

(i) $0 \le x \le l$ のとき

図 2.5 に FBD を示す．

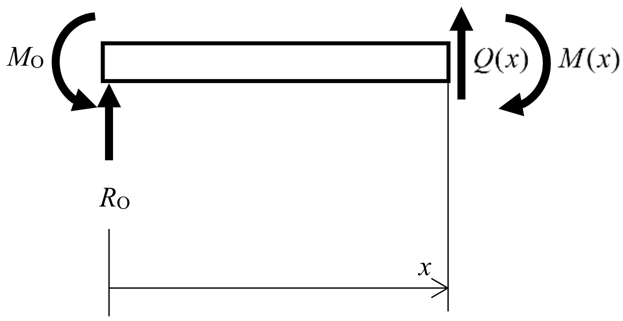


Fig.2.5 はりの FBD($0 \le x \le l$).

力のつり合い式より

$$R_O + Q(x) = 0 \tag{2.10}$$

$$Q(x) = -R_O = P - pl = pl \tag{2.11}$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より

$$-M_O - Q(x) \times x + M(x) = 0 \tag{2.12}$$

$$M(x) = M_O + Q(x)x = \frac{1}{2}pl^2 + plx = pl(x + \frac{1}{2}l) \tag{2.13}$$

(ii) $l \leq x \leq 2l$ のとき

図 2.6 に FBD を示す.

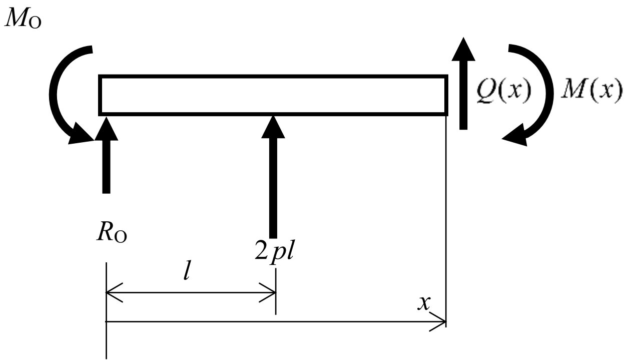


Fig.2.6 はりの FBD($l \leq x \leq 2l$).

力のつり合い式より

$$R_O + 2pl + Q(x) = 0 \tag{2.14}$$

$$Q(x) = -R_O - 2pl = -pl \tag{2.15}$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より

$$-M_O - 2pl \times l - Q(x) \times x + M(x) = 0 \tag{2.16}$$

$$M(x) = M_O + 2pl^2 + Q(x)x = \frac{5}{2}pl^2 - plx = -pl(x - \frac{5}{2}l) \tag{2.17}$$

よってせん断力の x 方向変化の図(せん断力線図：SFD)と曲げモーメントの x 方向変化の図(曲げモーメント線図：BMD)はそれぞれ次のようになる.

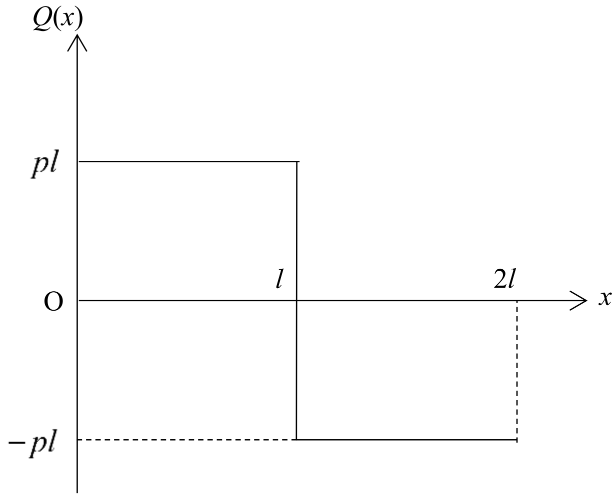


Fig.2.7 SFD.

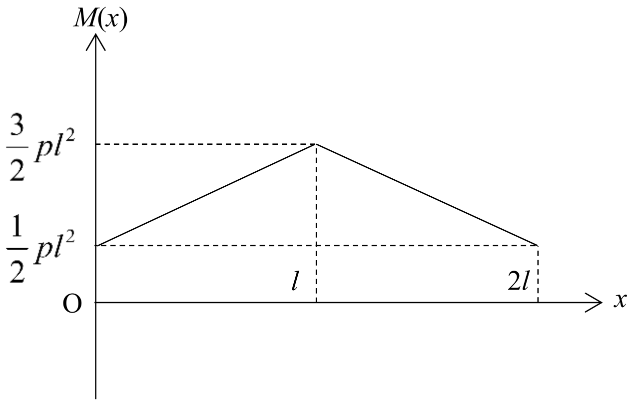


Fig.2.8 BMD.

(5) はりの曲げモーメントが最大になる最大曲げ応力$\sigma_{\max}$を求めよ.

図 2.8 の BMD より $x = l$ のときに曲げモーメントは最大となり，曲げモーメント $M_{\max}$ は以下のようになる.

$$M_{\max} = \frac{3}{2} pl^2 \tag{2.18}$$

最大曲げ応力は図心から最も離れた点，$y = \pm 2a$ に生じるので最大曲げ応力は以下のようになる．

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{\max}}{I_Z} y \right| = \left| \frac{\frac{3}{2} pl^2}{16a^4} 2a \right| = \frac{3pl^2}{16a^3} \tag{2.18}$$