材料の力学1　第6回演習問題

[1]平面応力状態にある十分に薄い弾性体において, 図1のように x-y 座標系から反時計回りに $\theta(0<\theta<90^\circ)$ 傾いた n-t 座標系に沿う正方形微小要素を考える. 薄い弾性体に対して x 方向に応力 σ_1, y 方向に応力 σ_2 が作用している($\sigma_1>\sigma_2$, $\sigma_1>0$). 弾性体の縦弾性係数を E, 横弾性係数を G, ポアソン比を ν として, 以下の設問に答えよ. なお, 指示が無ければ解答には σ_1, σ_2, θ, E, G, ν のうち必要なものを用いよ.

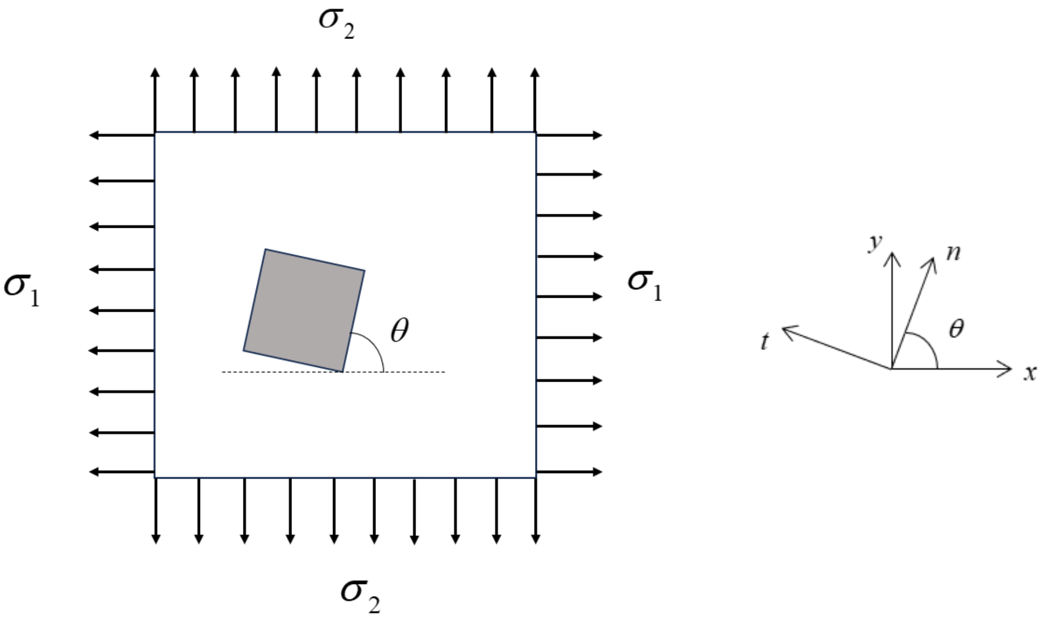

Fig.1 平面応力状態にある弾性体

(1)x-y 座標系における応力テンソルを求めよ.

(2)n-t 座標系における応力テンソルを求めよ.

(3)x-y 座標系におけるひずみテンソルを求めよ.

(4)n-t 座標系におけるひずみテンソルを求めよ. (ここでは G を用いないこと)

(5)n-t 座標系におけるせん断応力 τ_{nt} とせん断ひずみ γ_{nt} の関係を踏まえ, 横弾性係数 G を E, ν を用いて表せ.

(1)*x-y* 座標系における応力テンソルを求めよ.

図から応力テンソルは

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

となる.

(2)*n-t* 座標系における応力テンソルを求めよ.

モールの応力円を描くと図 1.1 のようになる.

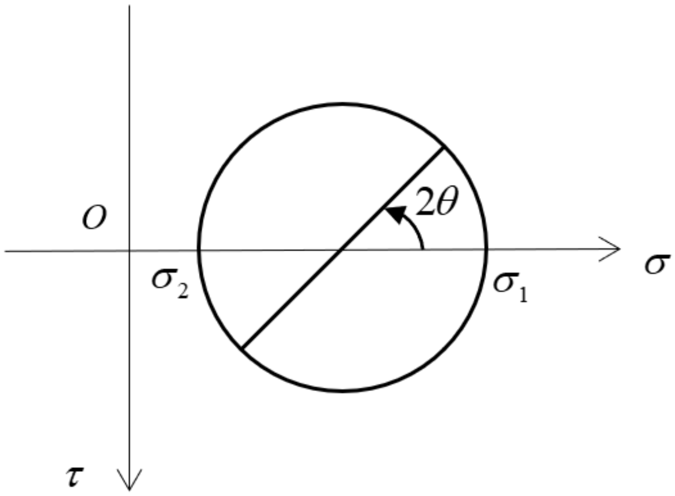

Fig.1.1 モールの応力円

モールの応力円から *n-t* 座標系における応力テンソルは,

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta & -\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta \\ -\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta & \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

となる.

また，行列計算でも求められる.

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta & -\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta \\ -\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta & \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

(3)*x-y* 座標系におけるひずみテンソルを求めよ．

平面応力状態より， $\sigma_Z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ なので，応力とひずみの関係から

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \upsilon\sigma_y\right) \\
&= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \upsilon\sigma_2\right)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \upsilon\sigma_x\right) \\
&= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \upsilon\sigma_1\right)
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

よって，ひずみテンソルは

$$
\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{E}\left(\sigma_1 - \upsilon\sigma_2\right) & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{E}\left(\sigma_2 - \upsilon\sigma_1\right) \end{pmatrix}
\tag{1.7}
$$

となる．

(4)*n-t* 座標系におけるひずみテンソルを求めよ．(ここでは *G* を用いないこと)

モールのひずみ円を描くと図 1.2 のようになる．

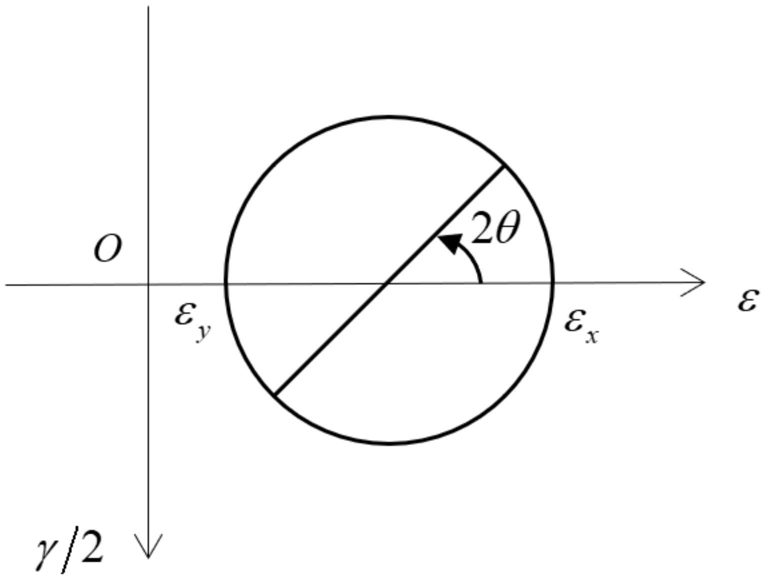

Fig.1.2 モールのひずみ円

モールのひずみ円から *n-t* 座標系におけるひずみテンソルは

$$
\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{E}\left\{(1-\upsilon)\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+(1+\upsilon)\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta\right\} & -\dfrac{1}{E}(1+\upsilon)\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta \\ -\dfrac{1}{E}(1+\upsilon)\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta & \dfrac{1}{E}\left\{(1-\upsilon)\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-(1+\upsilon)\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta\right\} \end{pmatrix}
\tag{1.8}
$$

となる．

また，行列計算でも求められる．

$$
\begin{pmatrix} \varepsilon_n & \gamma_{nt}/2 \\ \gamma_{nt}/2 & \varepsilon_t \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \upsilon\sigma_2\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \upsilon\sigma_1\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{1}{E}\left\{(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \left(1+\upsilon\right)\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta\right\} & -\frac{1}{E}\left(1+\upsilon\right)\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta \\ -\frac{1}{E}\left(1+\upsilon\right)\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{E}\left\{(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \left(1+\upsilon\right)\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta\right\} \end{pmatrix} \tag{1.9}
$$

(5)*n-t* 座標系におけるせん断応力 τ_{nt} とせん断ひずみ γ_{nt} の関係を踏まえ，横弾性係数 *G* を *E*，ν を用いて表せ.

n-t 座標系において次の関係式が成り立つ.

$$
\gamma_{nt} = \frac{1}{G}\tau_{nt} \tag{1.10}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{\tau_{nt}}{\gamma_{nt}} \\
&= \frac{-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta}{-2\frac{1}{E}\left(1+\upsilon\right)\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta} \\
&= \frac{E}{2\left(1+\upsilon\right)}
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

となる.

[2]Fig.2 のように弾性体表面に描かれた△ABC が以下のような応力状態にある．弾性体には面内荷重が作用しているものとし，辺の三か所にはひずみゲージが貼り付けられていて，すべての辺方向のひずみを求めることが出来る．

三角形の辺の長さは全て a，厚さは単位厚さ=1，部材のヤング率を E=40/3[GPa]，ポアソン比を ν=1/3 として以下の問いに答えよ．

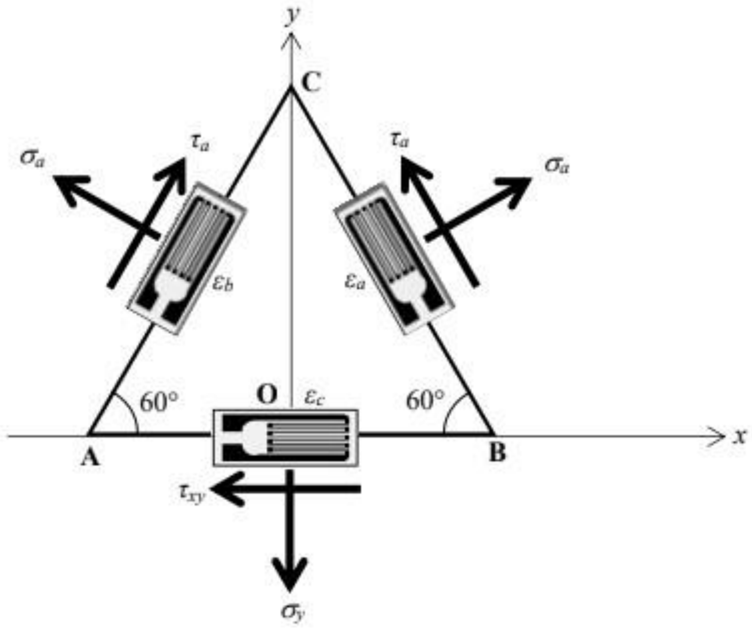

Fig.2 弾性体表面に描かれた正三角形の応力状態

(1) Fig.2 を参考にして，x 方向及び y 方向の力のつり合い式から垂直応力 σ_y，せん断応力 τ_{xy} を σ_a，τ_a を用いて表せ．

(2) 垂直応力 σ_x を σ_a，τ_a を用いて表せ．

以下の設問より σ_a=3[MPa]，τ_a=$\sqrt{3}$[MPa]とする．

(3) 応力成分(σ_x，σ_y，τ_{xy})を求めよ．

(4) この時のモールの応力円を描け．

(5) xy 平面の主応力(σ_1，σ_2)を求めよ．但し σ_1>σ_2 とする．

(6) 応力とひずみの関係式から主ひずみ(ε_1，ε_2)を求めよ．但し ε_1>ε_2 とする．

(7) この時のモールのひずみ円を描け．

(1) Fig.2 を参考にして，x 方向及び y 方向の力のつり合い式から垂直応力 σ_y，せん断応力 τ_{xy} を σ_a，τ_a を用いて表せ.

x 方向，y 方向それぞれのつり合いは以下のようである.

x: $\boldsymbol{\sigma_a}\cos30°\cdot a - \boldsymbol{\tau_a}\cos60°\cdot a - \boldsymbol{\sigma_a}\cos30°\cdot a + \boldsymbol{\tau_a}\cos60°\cdot a - \boldsymbol{\tau_{xy}}\cdot a = 0$

y: $\boldsymbol{\sigma_a}\sin30°\cdot a + \boldsymbol{\tau_a}\sin 60°\cdot a + \boldsymbol{\sigma_a}\sin30°\cdot a + \boldsymbol{\tau_a}\sin 60°\cdot a - \boldsymbol{\sigma_y}\cdot a = 0$

整理することで

$$\tau_{xy} = 0 \tag{2.3}$$

$$\sigma_y = \sigma_a + \sqrt{3}\tau_a \tag{2.4}$$

(2) 垂直応力 σ_x を σ_a，τ_a を用いて表せ.

σ_a を σ_x，σ_y，τ_{xy} を用いて表すと以下のようになる.

$$\sigma_a = \sigma_x cos^2 30° + \sigma_y sin^2 30° + 2\tau_{xy} sin30° cos30° \tag{2.5}$$

(2.5)に(2.3)(2.4)を代入し整理することで

$$\sigma_x = \sigma_a - \frac{\tau_a}{\sqrt{3}} \tag{2.6}$$

(3) 垂直応力 σ_x を σ_a，τ_a を用いて表せ.

(2.3)(2.4)(2.6)に各値を代入することで

$$\left(\sigma_x，\sigma_y，\tau_{xy}\right) = (2，6，0)[\mathrm{MPa}] \tag{2.7}$$

(4) この時のモールの応力円を描け.

(2.7)よりモールの応力円は Fig.2.1 のようになる

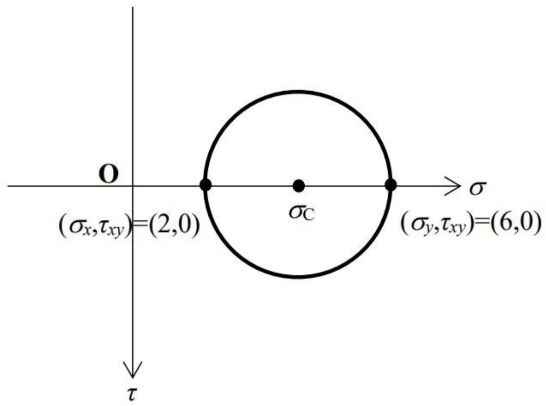

Fig.2.1 モールの応力円

Fig.2.1 よりモールの応力円の中心(σ_c，0)および，半径 r は

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = 4 \tag{2.8}$$

$$r = \sigma_c - \sigma_x = 2 \tag{2.9}$$

(5) xy 平面の主応力(σ_1，σ_2)を求めよ．但し $\sigma_1 > \sigma_2$ とする．

Fig.2.1 より

$$(\sigma_1，\sigma_2) = (6，2)[\mathrm{MPa}] \tag{2.10}$$

(6) 応力とひずみの関係式から主ひずみ(ε_1，ε_2)を求めよ．但し $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ とする．

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2)\\ &= \frac{3}{40\times10^3}\left(6 - \frac{1}{3}\times 2\right)\\ &= 400\mu\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)\\ &= \frac{3}{40\times10^3}\left(2 - \frac{1}{3}\times 6\right)\\ &= 0\end{aligned} \tag{2.12}$$

よって

$$(\varepsilon_1，\varepsilon_2) = (400\mu，0) \tag{2.13}$$

(7) この時のモールのひずみ円を描け．

(2.13)より

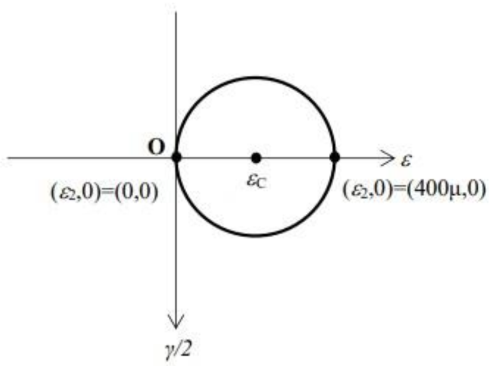

Fig.2.2 モールのひずみ円

また，中心(ε_c，0)および半径 r は

$$(\varepsilon_c，0) = (200\mu，0) \tag{2.14}$$

$$r = 200\mu \tag{2.15}$$