

## 材料の力学 1 第 6 回演習問題 (2023/5/22 実施)

[1] 平面応力状態にある弾性体において、せん断応力  $\tau = 32$  [MPa] が図1のように作用している。その結果、弾性体の表面に描かれた正方形 OABC (一辺の長さ  $a = 50$  [mm]) が  $n$  軸に関して対称である平行四辺形 OAB'C' に変形した。ただし、A, B 点の  $y$  方向の変位, B, C 点の  $x$  方向の変位はともに  $b = 1 \times 10^{-2}$  [mm] であり、正方形の一辺の長さに対し十分小さいものである。 $n$ - $t$  座標系は  $x$ - $y$  座標系を反時計回りに  $45^\circ$  回転した座標系である。弾性体の材料定数を縦弾性係数  $E$ , ポアソン比  $\nu = 0.3$  とし、以下の設問に答えよ。

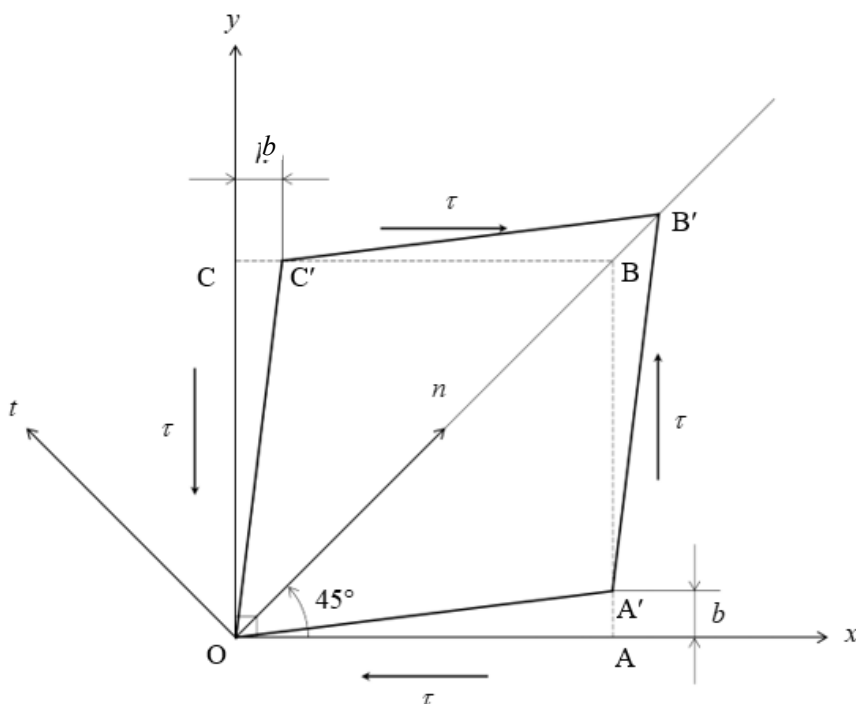


Fig. 1 平面応力状態にある弾性体.

- (1)  $x$  方向の垂直ひずみ  $\varepsilon_x$ ,  $y$  方向の垂直ひずみ  $\varepsilon_y$ , せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  を求め,  $\mu$  を含む形式で表せ. ただし,  $\mu$  は  $10^{-6}$  を表す.
- (2) 点  $B(a,a)$  が変形後に  $B'(a+b, a+b)$  になったとして,  $n$  方向の垂直ひずみ  $\varepsilon_n$  を求め,  $\mu$  を含む形式で表せ.
- (3) (1)の結果を用いて,  $x$ - $y$  座標系のひずみテンソルを求め, モールのひずみ円を描き, 中心と半径を明記せよ.
- (4) (3)で描いたモールのひずみ円から  $n$ - $t$  座標系におけるひずみテンソルを求め,  $\mu$  を含む形式で表せ.
- (5)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルからモールの応力円を描き, 中心と半径を明記せよ. さらに,  $n$ - $t$  座標系における応力テンソルを求めよ. (単位は書かなくてよい)
- (6) 平面応力状態下の応力-ひずみの関係式  $\varepsilon_n = \frac{1}{E}(\sigma_n - \nu\sigma_t)$  に対して, (2)で求めたひずみと, (5)で求めた応力を適用することで, 弾性体の縦弾性係数  $E$  を求めよ.

(1)  $x$ 方向の垂直ひずみ方向の垂直ひずみ $\epsilon_x$ ,  $y$ 方向の垂直ひずみ $\epsilon_y$ , せん断ひずみ $\gamma_{xy}$ を求め, $\mu$ を含む形式で表せ.ただし, $\mu$ は  $10^{-6}$ を表す.

ひずみの定義から以下のように求められる.

$$\epsilon_x = \frac{OA' - OA}{OA} = 0 \mu \quad (1.1)$$

$$\epsilon_y = \frac{OC' - OC}{OC} = 0 \mu \quad (1.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{AA'}{OA} + \frac{CC'}{OC} = \frac{b}{a} + \frac{b}{a} = \frac{2b}{a} = \frac{2 \times 1 \times 10^{-2}}{50} = 400 \mu \quad (1.3)$$

(2) 点 $B(a, a)$ が変形後に $B'(a+b, a+b)$ になったとして, $n$ 方向の垂直ひずみ $\epsilon_n$ を求め, $\mu$ を含む形式で表せ.線分 $OB$ の長さ $L_n$ は,三平方の定理より以下のように求められる.

$$L_n = \sqrt{(a+b)^2 + (a+b)^2} = \sqrt{2}(a+b) \quad (1.4)$$

よって, $n$ 方向の垂直ひずみ $\epsilon_n$ は以下のように求められる.

$$\epsilon_n = \frac{L_n - \sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}(a+b) - \sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{b}{a} = \frac{1 \times 10^{-2}}{50} = 200 \mu \quad (1.5)$$

(3) (1)の結果を用いて, $x$ - $y$ 座標系のひずみテンソルを求め,モールのひずみ円を描き,中心と半径を明記せよ.

(1)の結果から,ひずみテンソルは以下のように求められる.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 200 \\ 200 & 0 \end{pmatrix} \mu \quad (1.6)$$

したがって,モールのひずみ円は以下のように描くことができる.

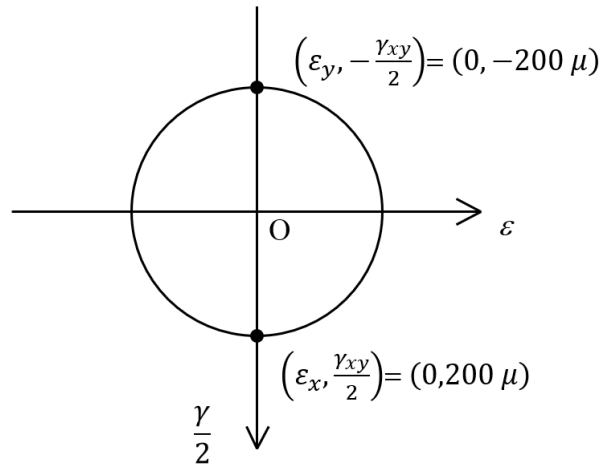


Fig.1.1  $x$ - $y$ 座標におけるモールのひずみ円

モールのひずみ円の中心( $\epsilon_c, 0$ )と半径  $r$  は以下のように求められる.

$$\epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) = 0 \quad (1.7)$$

$$(\epsilon_c, 0) = (0, 0)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = 200 \mu \quad (1.8)$$

(4) (3)で描いたモールのひずみ円から $n$ - $t$ 座標系におけるひずみテンソルを求め, $\mu$ を含む形式で表せ.  
 $n$ - $t$ 座標は $x$ - $y$ 座標を反時計回りに $45^\circ$ 回転させたものである. モールのひずみ円では, 反時計回りに2倍の $90^\circ$ 回転させればよい. したがって, モールのひずみ円は以下のように描くことができる.

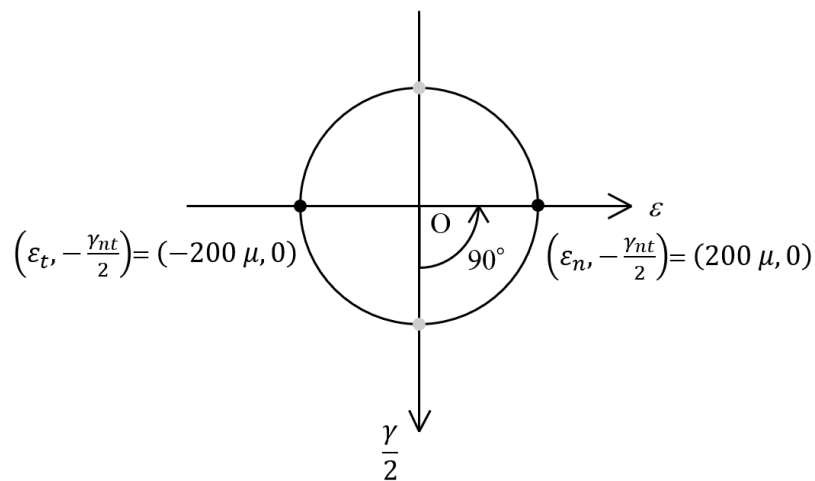


Fig.1.2.  $n$ - $t$ 座標におけるモールのひずみ円

よって,  $n$ - $t$ 座標におけるひずみテンソルは以下のように求められる.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_n & \frac{\gamma_{nt}}{2} \\ \frac{\gamma_{nt}}{2} & \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 0 & -200 \end{pmatrix} \mu \quad (1.9)$$

以上より, 垂直ひずみ  $\varepsilon_n$  は(2)の結果と一致することが確認された.

(5)  $x$ - $y$ 座標系における応力テンソルからモールの応力円を描き, 中心と半径を明記せよ. さらに,  $n$ - $t$ 座標系における応力テンソルを求めよ. (単位は書かなくてよい)

応力テンソルは以下のように表せる.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 32 \\ 32 & 0 \end{pmatrix} [\text{MPa}] \quad (1.10)$$

したがって, モールの応力円は以下のように描くことができる.

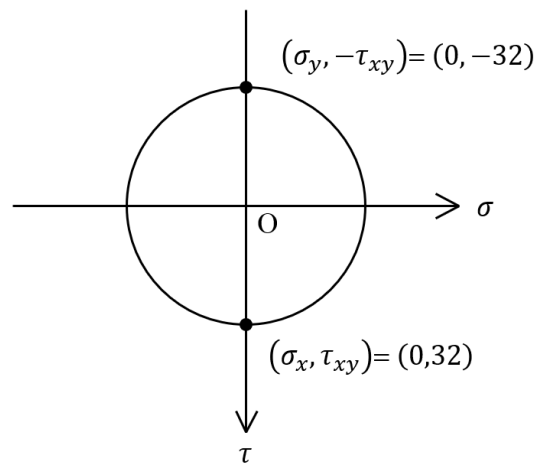


Fig.1.3.  $x$ - $y$ 座標におけるモールの応力円

モールの応力円の中心  $(\sigma_c, 0)$  と半径  $r$  は以下のように求められる.

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \\ (\sigma_c, 0) &= (0, 0) [\text{MPa}] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 32[\text{MPa}] \quad (1.12)$$

さらに,  $n$ - $t$ 座標におけるモールの応力円は反時計回りに $90^\circ$ 回転させればよいから, 以下のように描くことができる.

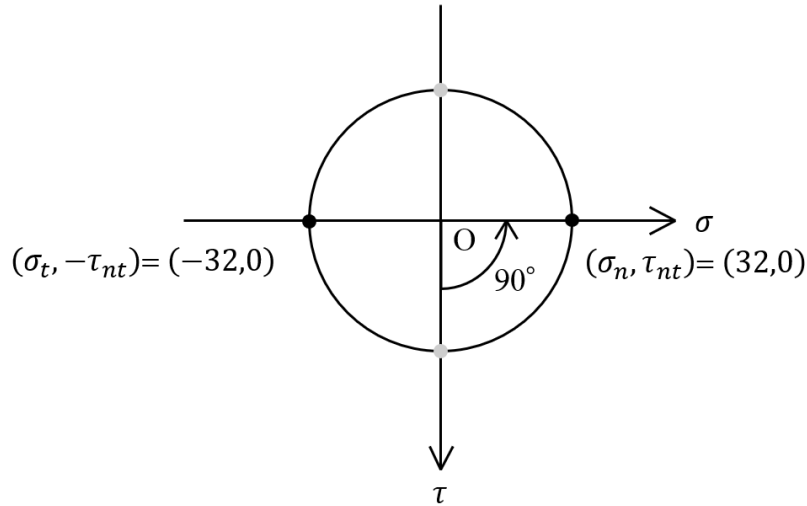


Fig.1.4.  $n$ - $t$ 座標におけるモールの応力円

よって,  $n$ - $t$ 座標における応力テンソルは以下のように求められる.

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix} [\text{MPa}] \quad (1.13)$$

(6) 平面応力状態下の応力-ひずみの関係式  $\varepsilon_n = \frac{1}{E}(\sigma_n - \nu\sigma_t)$  に対して, (2) で求めたひずみと, (5) で求めた応力を適用することで, 弾性体の縦弾性係数  $E$  を求めよ.

(2), (5) より, 縦弾性係数  $E$  は次のように求められる.

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}(\sigma_n - \nu\sigma_t) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_n \quad (1.14)$$

$$E = \frac{1+\nu}{\varepsilon_n}\sigma_n = \frac{1+0.3}{200 \times 10^{-6}} \times 32 \times 10^{-3} = 208 [\text{GPa}] \quad (1.15)$$

[2] 3次元微小弾性体が図2に示すような3次元応力状態にあるとき, 以下の問いに答えよ.  
 なお, ヤング率を  $E=210 \text{ GPa}$ , ポアソン比を  $\nu=0.3$  とし, 微小弾性体は等方性材料とする.  
単位が必要な場合は明記し, 指定がない場合は有効数字3桁とすること.

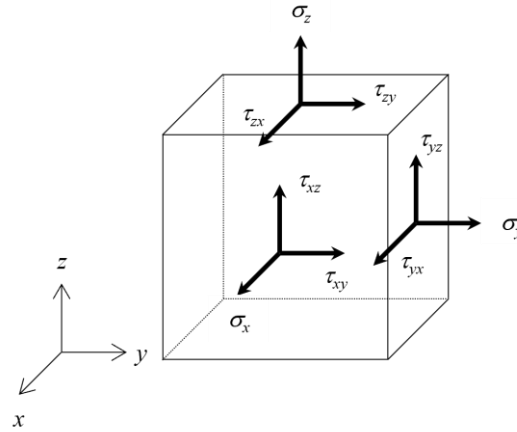


Fig. 2 3次元微小弾性体

- (1) 上図において  $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$  の場合における応力状態を何というか.  
 (2) 部材内の応力テンソルが次のように表されるとき,

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

- (i) 各方向のひずみ  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  を求めよ.  
 (ii) せん断ひずみ  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  を求めよ. (以下, 四捨五入した値を用いよ)  
 (iii)  $xy$  座標系におけるモールのひずみ円を描き(中心・半径明記せよ), 主ひずみ  $\epsilon_1, \epsilon_2$  ( $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ) および最大せん断ひずみ  $\gamma_{\max}$  を求めよ. (有効数字2桁)  
 (iv)  $xy$  座標系におけるモールの応力円を描き(中心・半径明記せよ), 主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) を求め, 主ひずみ  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  ( $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$ ) を求めよ (有効数字2桁)  
 (v) 最大せん断応力  $\tau_{\max}$  を求めよ. (有効数字2桁).  
 (3) 部材内の応力テンソルが次のように表されるとき,

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -1 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

- (i) 各方向のひずみ  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  を求めよ.  
 (ii) せん断ひずみ  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  を求めよ.

(1) 上図において $\sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$ の場合における応力状態を何というか。  
平面応力状態(2次元応力状態)

(2) 部材内の応力テンソルが次のように表されるとき,

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad (2.1)$$

(i) 各方向のひずみ $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ を求めよ。

以下の式(2.2)に示す応力とひずみの関係式に代入して計算することで求めることができる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{210 \times 10^9} \{ 4 \times 10^6 - 0.3 (-3 \times 10^6 + 0) \} = 2.333 \dots \times 10^{-5} = 23.3 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{210 \times 10^9} \{ -3 \times 10^6 - 0.3 (0 + 4 \times 10^6) \} = -20.0 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{210 \times 10^9} \{ 0 - 0.3 (4 \times 10^6 - 3 \times 10^6) \} = 0.1428 \dots \times 10^{-5} = 1.43 \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(ii) せん断ひずみ $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ を求めよ。

はじめに、横弾性係数を計算する。等方性材料であるから、式(2.4)のように求めることができる。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80.76 \dots = 80.8 [\text{GPa}] \quad (2.4)$$

よって、せん断ひずみは以下の式(2.5)のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = 2.476 \dots \times 10^{-5} = 24.8 \times 10^{-6} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = 0 \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

(iii)  $xy$  座標系におけるモールのひずみ円を描き(中心・半径明記せよ), 主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ )および最大せん断ひずみ $\gamma_{\max}$ を求めよ。(有効数字2桁)

式(2.3)および式(2.5)より,  $xy$  座標系ひずみテンソルは以下の式(2.6)のように表すことができる.

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.3 & 12.4 \\ 12.4 & -20.0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \quad (2.6)$$

式(2.6)より, モールのひずみ円は以下の図 2.1 のように描くことができる.

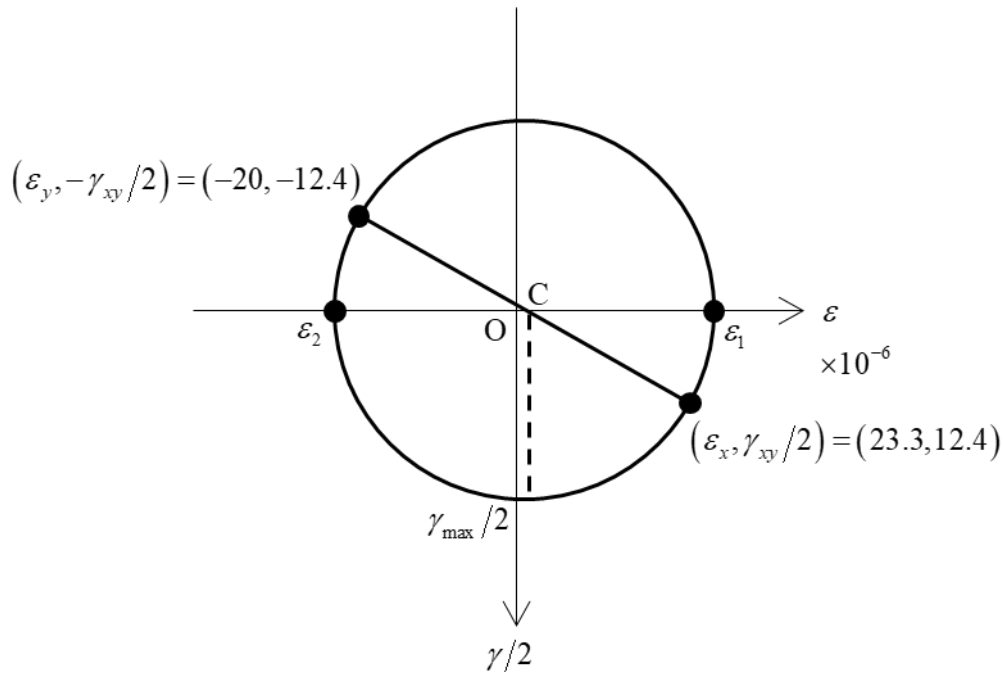


Fig. 2.1 モールのひずみ円

中心と半径は以下の式(2.2), 式(2.3)のように求めることができる.

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{1}{2}(23.3\mu + 20.0\mu) = 1.65\mu \\ \text{中心} \quad &\therefore (\varepsilon_c, 0) = (1.65, 0) \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4(\gamma_{xy}/2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(43.3\mu)^2 + 4 \times (12.4\mu)^2} \\ \text{半径} \quad &= 24.94 \dots \times 10^{-6} = 24.9 \times 10^{-6} \\ &\therefore r = 24.9 \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (2.8)$$

図 2.1 より, 主ひずみと最大せん断ひずみは有効数字2桁に注意して, 以下の式(2.9), 式(2.10)のように求めることができる.



$$\text{主ひずみ} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_c + r \\ \varepsilon_c - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.6 \\ -23.3 \end{bmatrix} \times 10^{-6} = \begin{bmatrix} 2.7 \\ -2.3 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \quad (2.9)$$

$$\text{最大せん断ひずみ} \quad \gamma_{\max} = 2r = 49.8 \times 10^{-6} = 5.0 \times 10^{-5} \quad (2.10)$$

(iv)  $xy$  座標系におけるモールの応力円を描き(中心・半径明記せよ), 主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ )を求め, 主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  ( $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ )を求めよ。(有効数字2桁)

式(2.1)より,  $xy$  座標系におけるモールの応力円は以下の図 2.2 のように描くことができる.

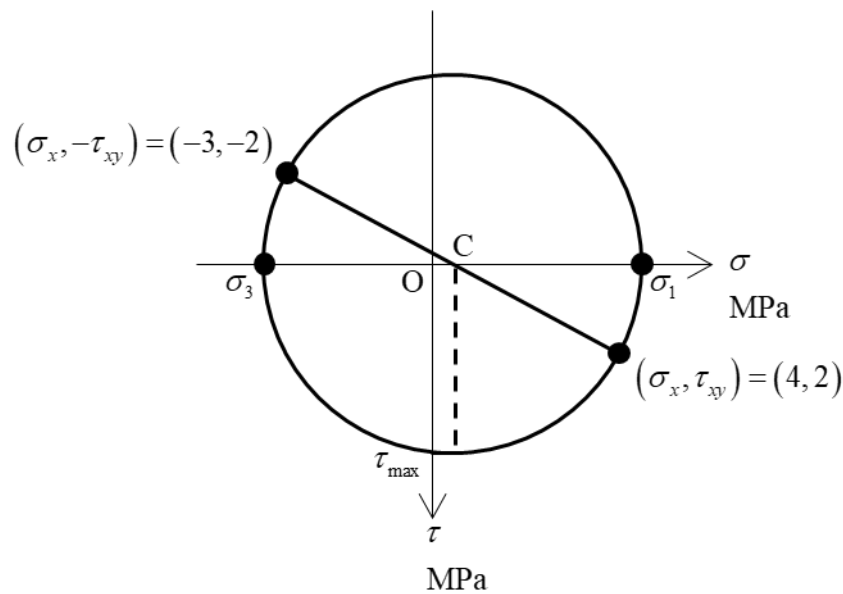


Fig. 2.2 モールの応力円

中心と半径は以下の式(2.11), 式(2.12)のように求めることができる.

$$\text{中心} \quad \sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(4 - 3) = 0.5 \quad (2.11)$$

$$\therefore (\sigma_c, 0) = (0.50, 0) [\text{MPa}]$$

$$\text{半径} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{7^2 + 4 \times 2^2} = 4.031 \dots = 4.03 \quad (2.12)$$

$$\therefore r = 4.03 [\text{MPa}]$$

図 2.2 より, 主応力は以下の式(2.13)のように求めることができる. 平面応力状態であることに注意する.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_c + r \\ 0 \\ \sigma_c - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.53 \\ 0 \\ -3.53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 0 \\ -3.5 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad (2.13)$$

式(2.2)より，主ひずみは以下の式(2.14)のように求めることができる．

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \{ \sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3) \} \\ &= \frac{1}{210 \times 10^3} \{ 4.53 - 0.3(0 - 3.53) \} = 2.7 \times 10^{-5} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \{ \sigma_2 - \nu (\sigma_3 + \sigma_1) \} \\ &= \frac{1}{210 \times 10^3} \{ 0 - 0.3(4.53 - 3.53) \} = -1.4 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \{ \sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2) \} \\ &= \frac{1}{210 \times 10^3} \{ -3.53 - 0.3(4.53 + 0) \} = -2.3 \times 10^{-5} \end{aligned} \quad (2.14)$$

式(2.9)と式(2.14)から，両者の結果が一致することが確かめられた．一般に主応力方向と主ひずみ方向は一致するため，主応力から主ひずみを求めることができる．

(v) 最大せん断応力 $\tau_{\max}$ を求めよ．(有効数字2桁)

図 2.2 より，最大せん断応力は以下の式(2.15)のように求めることができる．

$$\tau_{\max} = r = 4.0 [\text{MPa}] \quad (2.15)$$

(3) 部材内の応力テンソルが次のように表されるとき，

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -1 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad (2.16)$$

(i) 各方向のひずみ $\varepsilon_x$ ， $\varepsilon_y$ ， $\varepsilon_z$ を求めよ．

式(2.2)を利用して計算することで以下の式(2.17)のように求めることができる．

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{210 \times 10^3} \{ 3 - 0.3(-1 + 1.5) \} = 1.357 \cdots \times 10^{-5} = 13.6 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{210 \times 10^3} \{ -1 - 0.3(1.5 + 3) \} = -1.119 \cdots \times 10^{-5} = -11.2 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{210 \times 10^3} \{ 1.5 - 0.3(3 - 1) \} = 0.4285 \cdots \times 10^{-5} = 4.29 \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (2.17)$$

(ii) せん断ひずみ $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ を求めよ.

式(2.4)で求めた横弾性係数を利用すると, せん断ひずみは以下の式(2.18)のように求めることができる.

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = 0.6191 \cdots \times 10^{-5} = 6.19 \times 10^{-6} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = -6.19 \times 10^{-6} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = 1.238 \cdots \times 10^{-5} = 12.4 \times 10^{-6}\end{aligned}\tag{2.18}$$