

[1] 図 1 は板厚が十分に薄い弾性体のある点における応力状態を示したものである．なお，図 1(c)は図 1(a)，(b)の応力状態を重ね合わせた時の様子を示している．このとき，以下の問いに答えよ．ただし， z 方向は板厚方向とし，十分に薄いため平面応力状態と考えることができる．

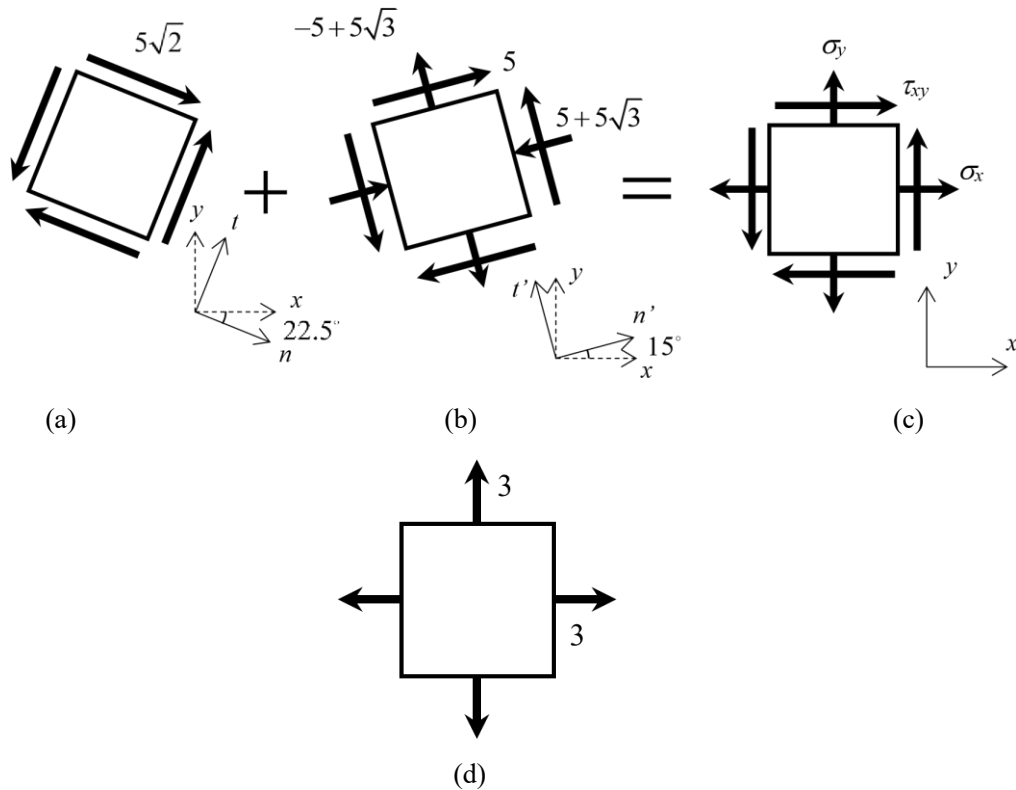


Fig. 1 微小要素における応力状態.

図 1(a)について以下の問いに答えよ．

- (1) $n-t$ 座標系において，モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．
- (2) $x-y$ 座標系における応力テンソルを求めよ．

図 1(b)について以下の問いに答えよ．

- (3) $n'-t'$ 座標系において，モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．
- (4) $x-y$ 座標系における応力テンソルを求めよ．

(5) 図 1(c)の $x-y$ 座標系において，モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

(6) 図 1(d) の $x-y$ 座標系において，モールの応力円を描け．

(1) n - t 座標系において，モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

n - t 座標系における応力テンソルは以下の通りである．

$$\begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

よって，このときのモールの応力円は以下の図 1.1 のようになる．

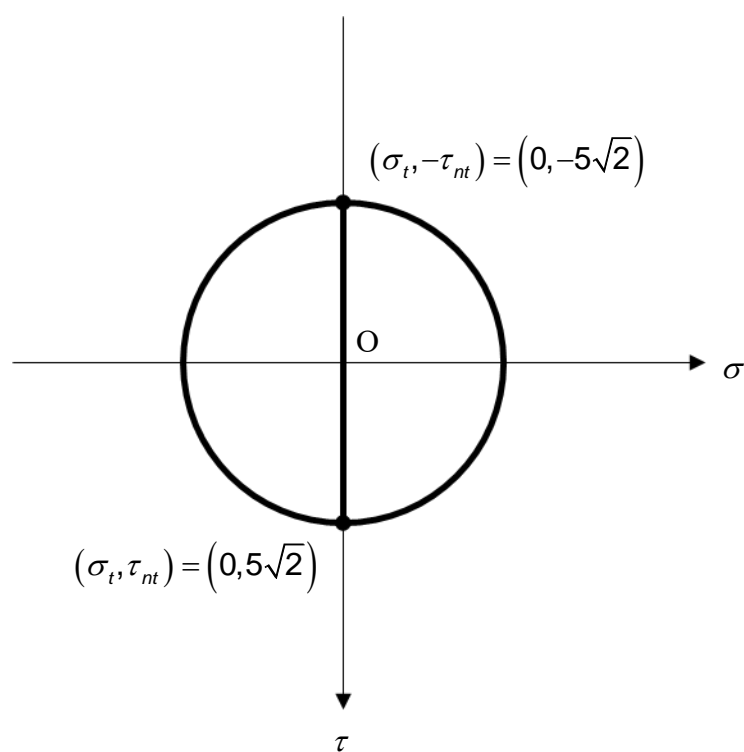


Fig. 1.1 図 1(a)におけるモールの応力円．

また，応力テンソルより，モールの応力円の中心と半径は以下のように求められる．

$$\begin{aligned} \text{中心: } \sigma_c &= \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t) = 0 \\ \therefore (\sigma_c, 0) &= (0, 0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \text{半径: } r &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_n - \sigma_t)^2 + 4\tau_{nt}^2} = 5\sqrt{2} \\ \therefore r &= 5\sqrt{2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

(2) x - y 座標系における応力テンソルを求めよ.

図 1(a)より, n - t 座標系は x - y 座標系を時計回りに 22.5° 回転させたものとわかるので, x - y 座標系に変換するには, モールの応力円上で反時計回りに 45° 回転させればよい.

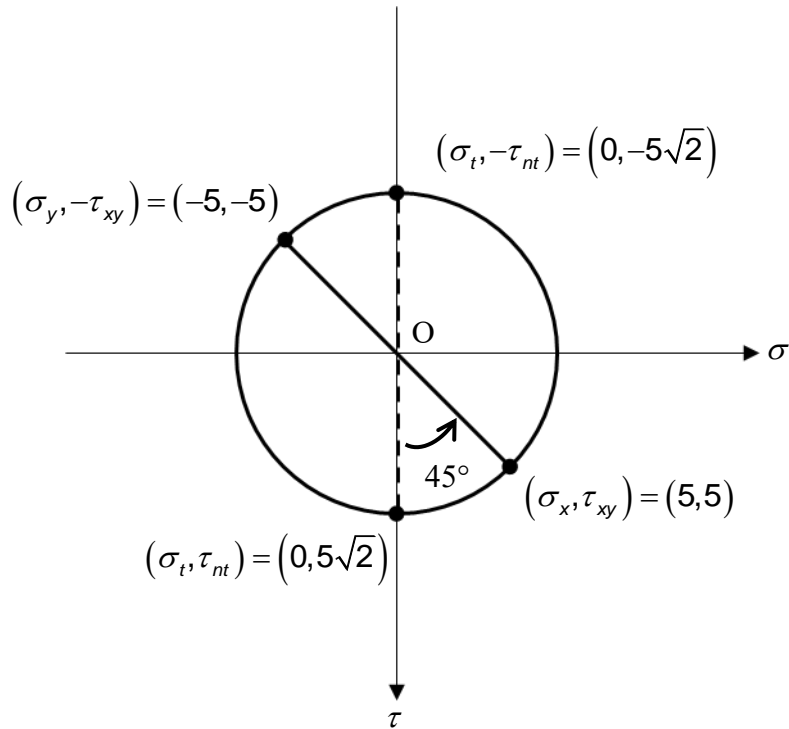


Fig. 1.2 図 1(a)におけるモールの応力円.

このとき、点 A の座標は以下のようにして求まる。

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \tau_{xy}) &= (r \cos 45^\circ, r \sin 45^\circ) = (5, 5) \\ 2\theta &= 45^\circ \end{aligned} \quad (1.4)$$

同様にして

$$(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (-5, -5) \quad (1.5)$$

よって x-y 座標系での応力テンソルが求まる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

(3) $n'-t'$ 座標系において、モールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。

$n'-t'$ 座標系における応力テンソルは以下の通りである。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{n'} & \tau_{n't'} \\ \tau_{n't'} & \sigma_{t'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-5\sqrt{3} & 5 \\ 5 & -5-5\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

よって、このときのモールの応力円は以下の図 1.3 のようになる。

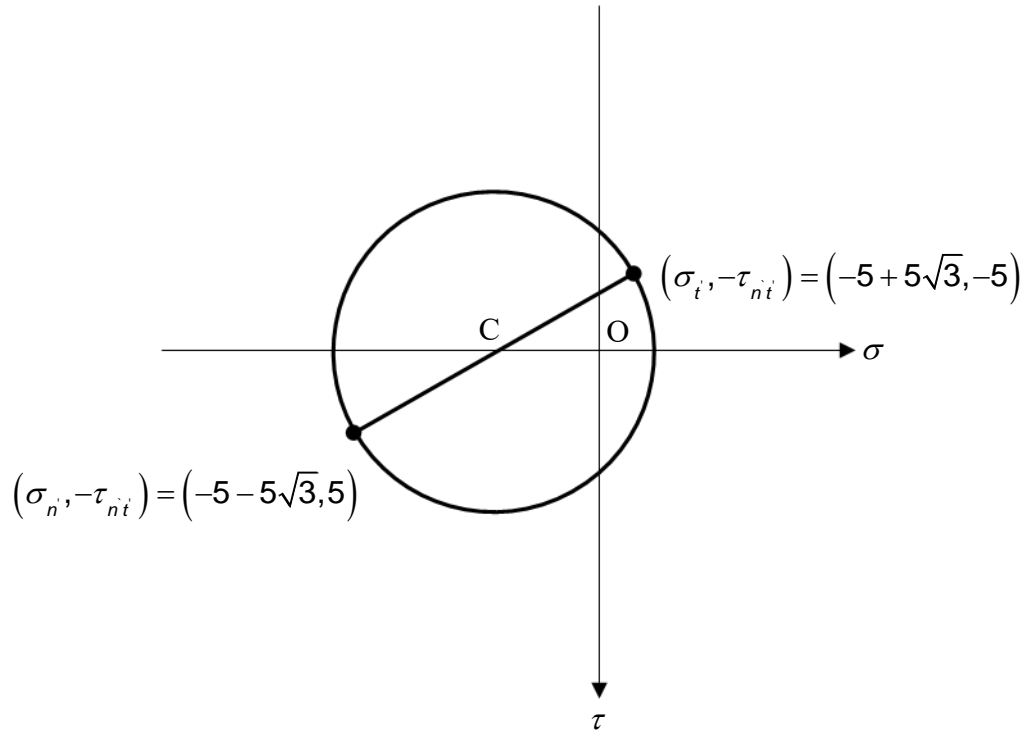


Fig. 1.3 図 1(b)におけるモールの応力円.

応力テンソルより，モールの応力円の中心と半径は以下のように求められる．

$$\begin{aligned} \text{中心: } \sigma_c &= \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t) = -5 \\ \therefore (\sigma_c, 0) &= (-5, 0) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\text{半径: } r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_n - \sigma_t)^2 + 4\tau_{nt}^2} = 10 \quad (1.9)$$

(4) x - y 座標系における応力テンソルを求めよ．

図 1(b)より， n '- t '座標系は x - y 座標系を反時計回りに 15° 回転させたものとわかるので， x - y 座標系に変換するには，モールの応力円上で時計回りに 30° 回転させればよい．

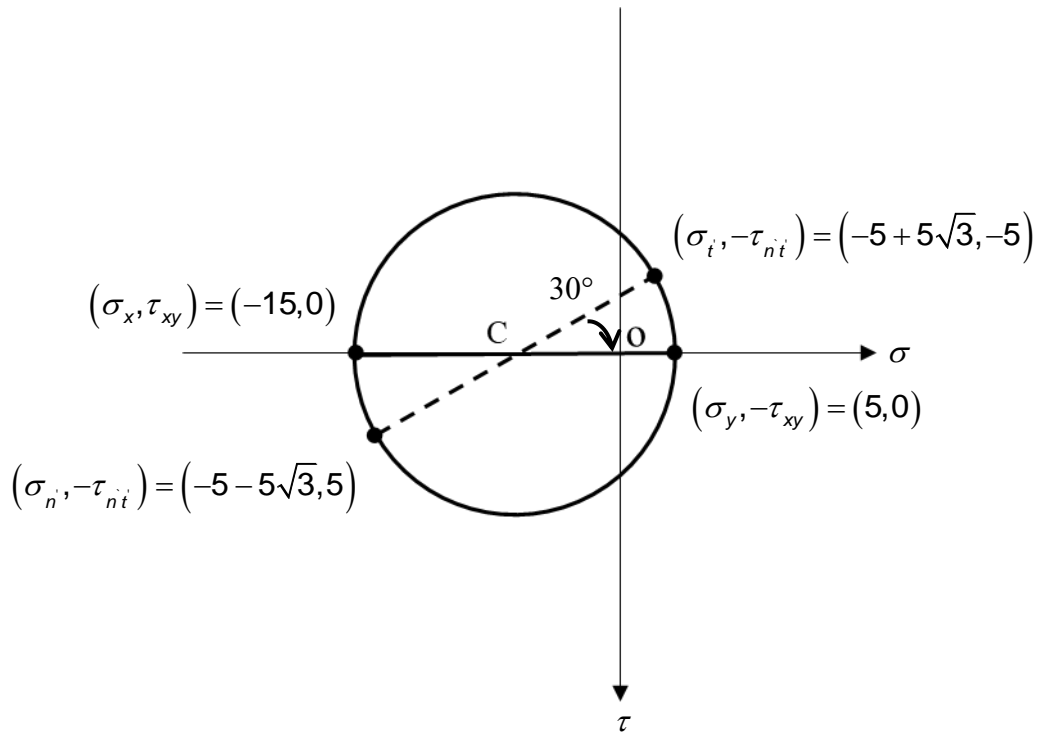


Fig. 1.4 図 1(b)におけるモールの応力円．

図 1.4 より， x - y 座標での応力テンソルは次式のようになる．

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

(5) x - y 座標系において，モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

(c)の応力テンソルは，(a)と(b)の x - y 座標での応力テンソルを重ね合わせればよい．よって，式(1.6)と式(1.10)より，次式のようになる．

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

式(1.11)より，モールの応力円は以下の図 1.5 のようになる．

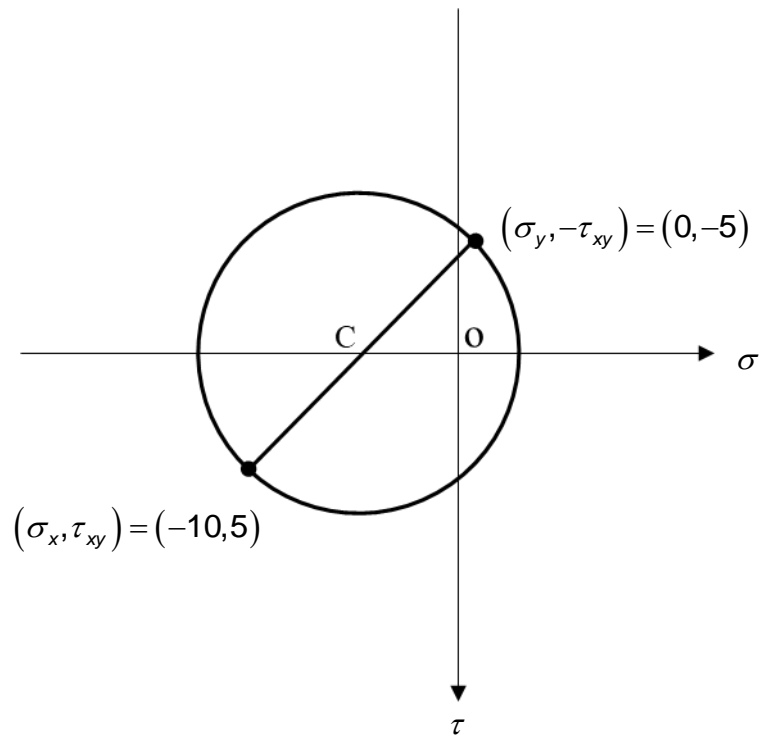


Fig. 1.5 (c)におけるモールの応力円．

応力テンソルより，モールの応力円の中心と半径 r は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} \text{中心: } \sigma_c &= \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t) = -5 \\ \therefore (\sigma_c, 0) &= (-5, 0) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\text{半径: } r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_n - \sigma_t)^2 + 4\tau_{nt}^2} = 5\sqrt{2} \quad (1.13)$$

(6) 図 1 (d) の x - y 座標系において、モールの応力円を描け

x - y 座標系における応力テンソルは以下の通りである.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

式(1.14)より、中心及び半径が求まる.

$$\begin{aligned} \text{中心: } \sigma_c &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = 3 \\ \therefore (\sigma_c, 0) &= (3, 0) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\text{半径: } r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = 0 \quad (1.16)$$

モールの応力円は以下のように 1 点となる.

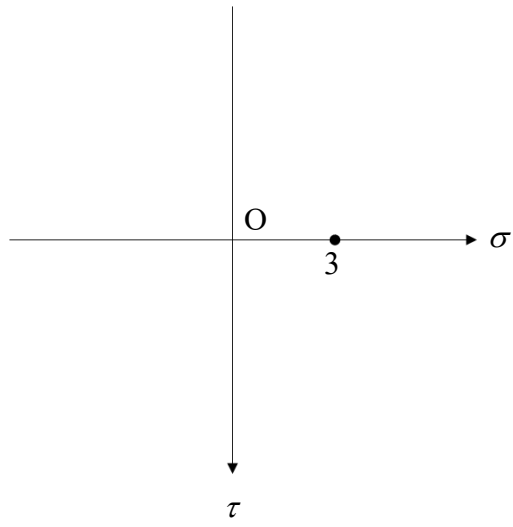


Fig. 1.6 (d)におけるモールの応力円.

[2] 図2のようにAとEにおいて壁に固定された段付き丸棒があり、AB間、DE間に分布荷重 p が図のように作用している。丸棒の断面積を AB 間、DE 間では $2A$ 、BD 間では A とし、丸棒のヤング率は E として以下の問いに答えよ。但し、壁の変形は考慮しないものとする。

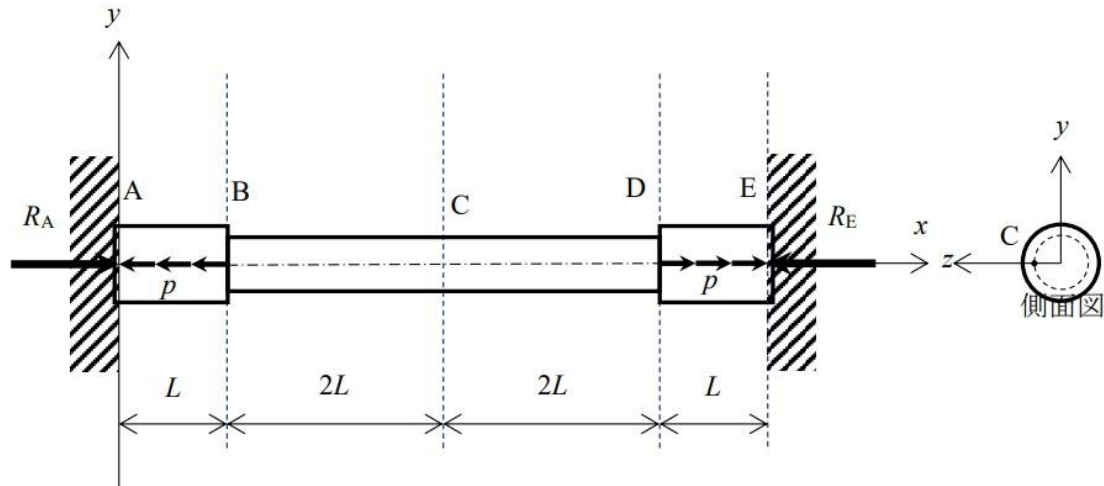


Fig.2 壁に固定された段付き丸棒

- (1) Fig.2 の FBD の図示及び、A、E における壁からの反力 R_A 、 R_E を用いて棒全体の力のつり合い式を示せ。
- (2) AB 間に生じる変位 δ_{AB} 及び、BC 間に生じる変位 δ_{BC} を R_A を用いて示せ。
- (3) 変位の条件とつり合い式から反力 R_A 、 R_E を求めよ。
- (4) 丸棒に作用している軸力 $N(x)$ 、垂直応力 $\sigma(x)$ の x 方向変化をそれぞれ図示せよ。
- (5) 丸棒表面上の点 C におけるモールの応力円を描き、点 C に生じる最大せん断力 τ_{\max} を求めよ。

- (1) Fig.2 の FBD の図示及び, A, E における壁からの反力 R_A , R_E を用いて棒全体の力のつり合い式を示せ.

A, E における壁からの反力 R_A , R_E を用いて FBD を描くと次のようになる.

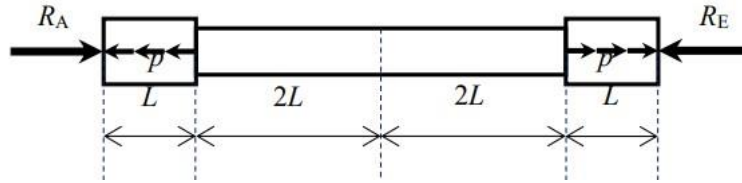


Fig.2.1 FBD

また Fig.2.1 よりつり合い式を求めると

$$R_A + pL - R_E - pL = 0 \quad (2.1)$$

$$\therefore R_A = R_E \quad (2.2)$$

- (2) AB 間に生じる変位 δ_{AB} 及び, BC 間に生じる変位 δ_{BC} を R_A を用いて示せ.

(i) AB 間に関して, $0 \leq x \leq L$ のとき

軸力を $N(x)$ とすると作用する力は Fig.2.2 のようになる.

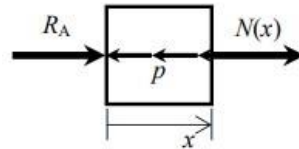


Fig.2.2 FBD($0 \leq x \leq L$)

つり合いの式をたて, 整理することで

$$N(x) = px - R_A \quad (2.3)$$

よって応力 $\sigma(x)$, ひずみ $\varepsilon(x)$, 変位 δ_{AB} を求めれば

$$\sigma(x) = \frac{px - R_A}{2A} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{px - R_A}{2EA} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \delta_{AB} &= \int_0^L \varepsilon(x) dx \\ &= \int_0^L \frac{px - R_A}{2EA} dx \\ &= \frac{1}{2EA} \left(\frac{1}{2} pL^2 - R_AL \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

(ii) BC 間に関して, $L \leq x \leq 3L$ のとき

(i) と同様にして軸力を求める. BC 間の FBD を描くと以下のものであるから,

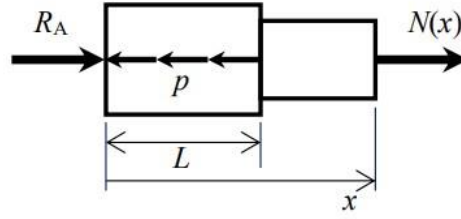


Fig.2.3 FBD($L \leq x \leq 3L$)

軸力は以下のように求められる.

$$N(x) = pL - R_A \quad (2.7)$$

よって応力 $\sigma(x)$, ひずみ $\varepsilon(x)$, 変位 δ_{BC} を求めれば

$$\sigma(x) = \frac{pL - R_A}{A} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{pL - R_A}{EA} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \delta_{BC} &= \int_L^{3L} \varepsilon(x) dx \\ &= \int_L^{3L} \frac{pL - R_A}{EA} dx \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$= \frac{2}{EA} (pL^2 - R_AL)$$

(3) 変位の条件とつり合い式から反力 R_A , R_E を求めよ.

仮定から壁の変形は考慮しないことと, 対称性より

$$\delta_{AC} = \delta_{AB} + \delta_{BC} = 0 \quad (2.11)$$

(2)の結果を考え合わせて,

$$\begin{aligned} \delta_{AC} &= \frac{1}{2EA} \left(\frac{1}{2} pL^2 - R_AL \right) + \frac{2}{EA} (pL^2 - R_AL) \\ &= -\frac{1}{2EA} \left(\frac{9}{2} pL^2 - 5R_AL \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

より,

$$R_A = \frac{9}{10} pL \quad (2.13)$$

(2.2)より

$$R_E = \frac{9}{10} pL \quad (2.14)$$

(4) 丸棒に作用している軸力 $N(x)$, 垂直応力 $\sigma(x)$ の x 方向変化をそれぞれ図示せよ.

求めた反力を代入すると

(i) $0 \leq x \leq L$ のとき

$$N(x) = p \left(x - \frac{9}{10}L \right) \quad (2.15)$$

$$\sigma(x) = \frac{p}{2A} \left(x - \frac{9}{10}L \right) \quad (2.16)$$

(ii) $L \leq x \leq 3L$ のとき

$$N(x) = \frac{pL}{10} \quad (2.16)$$

$$\sigma(x) = \frac{pL}{10A} \quad (2.17)$$

以上より対称性を考慮して図示すると以下のようなになる．

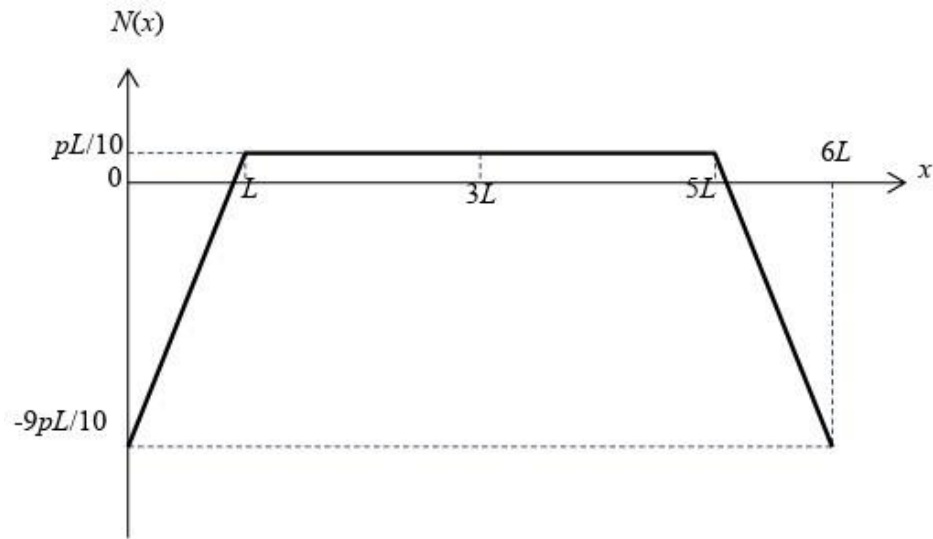


Fig.2.4 軸力の x 軸方向変化

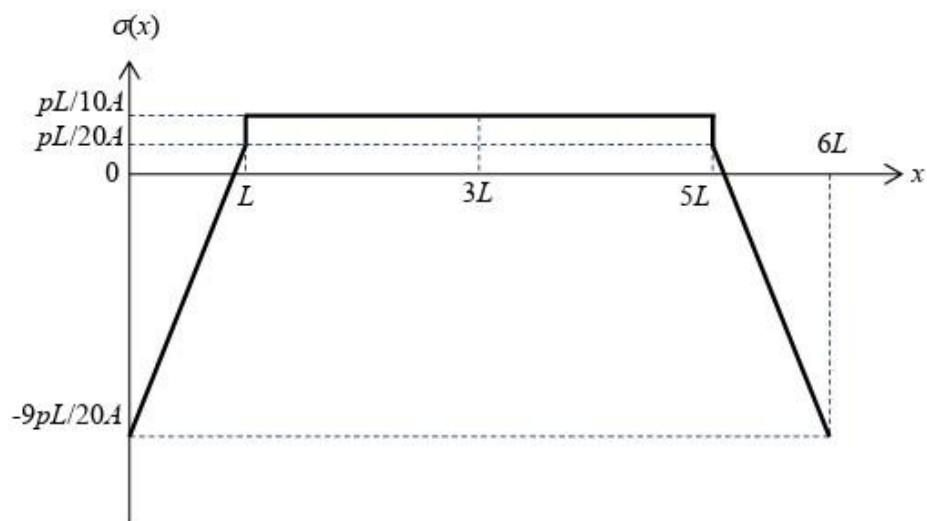


Fig.2.5 応力の x 軸方向変化

- (5) 丸棒表面上の点 C におけるモールの応力円を描き，点 C に生じる最大せん断力 τ_{max} を求めよ．

点 C は $x=3L$ に位置するため，(2.13)より点 C における σ_x は

$$\sigma_x = \frac{pL}{20A} \quad (2.19)$$

と求められる．よって点 C における応力テンソルは以下のようなになる．

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \frac{pL}{20A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

これをもとにモールの応力円を描くと

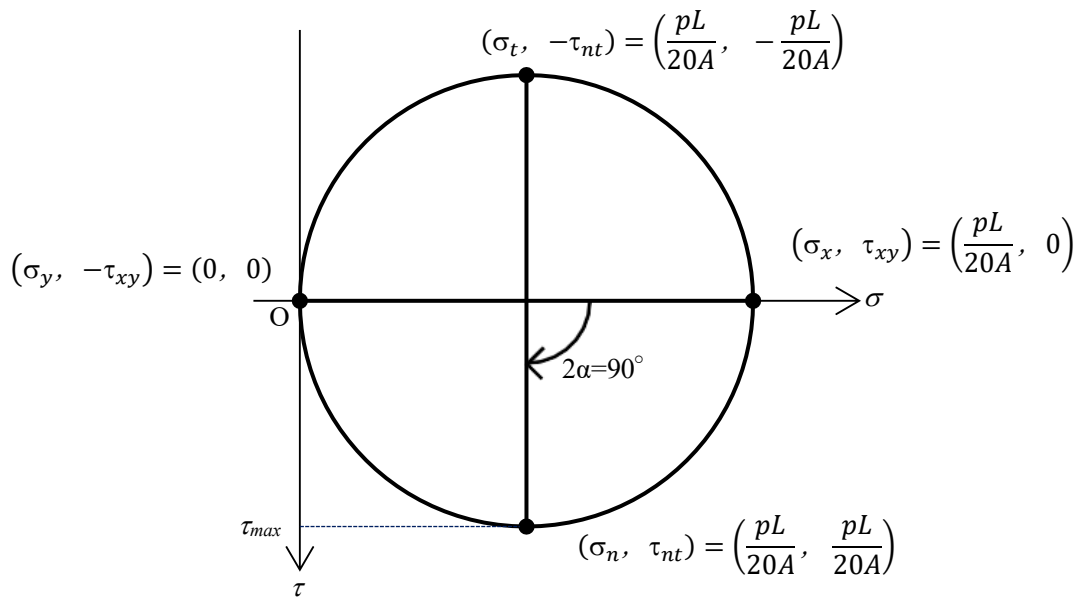


Fig.2.6 モールの応力円

Fig.2.4 より幾何的にモールの応力円の中心 $(\sigma_c, 0)$ および，半径 r は

$$\sigma_c = r = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{pL}{40A} \quad (2.21)$$

よって最大せん断応力 τ_{max} は Fig.2.4 より x 軸から 45° 傾斜した面に生じることがわかり，

$$\tau_{max} = \frac{pL}{40A} \quad (2.22)$$

と求められる．