[1] 微小弾性体のある一点の応力を図 1.1 の微小三角形 ABC に示す．このとき以下の問いに答えよ．ただしこの三角形は平面応力状態にあり，$0° \leq \theta \leq 180°$，AB の面積を S，z 軸方向厚さを単位長さとする．

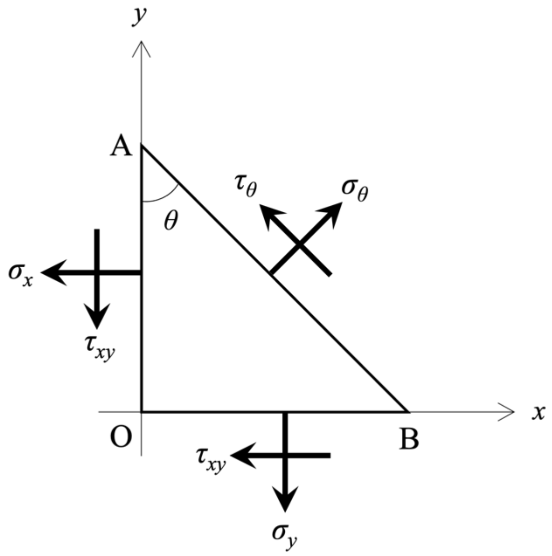

Fig.1 微小弾性体の応力状態

(1) 図 1 の θ 方向とその法線方向について力のつり合い式を立てることにより，σ_θ，τ_θ をそれぞれ σ_x，σ_y ，τ_{xy}，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ を用いて表せ．

(2) (1)で求めた σ_θ，τ_θ を表す 2 式より θ を消去して，モールの応力円を表す以下の式を導出せよ．

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta{}^2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}{}^2$$

(3) $\sigma_x = 3\sigma$，$\sigma_y = \sigma$，$\tau_{xy} = \sqrt{3}\sigma$ のとき，応力テンソル$[\sigma]$ を求め，図 1 におけるモールの応力円をσ-τ平面上に描け．

(4) (3)で描いたモールの応力円を用いて，主応力(σ_1, σ_2) を求めよ．ただし，$\sigma_1 < \sigma_2$とする．

(1) 図 1 の $\boldsymbol{\theta}$ 方向とその法線方向について力のつり合い式を立てることにより，$\boldsymbol{\sigma_\theta}$，$\boldsymbol{\tau_\theta}$ をそれぞれ $\boldsymbol{\sigma_x}$，$\boldsymbol{\sigma_y}$ ，$\boldsymbol{\tau_{xy}}$，**sin2**$\boldsymbol{\theta}$，**cos2**$\boldsymbol{\theta}$ を用いて表せ.

θ 方向の力のつり合いより，次式が得られる.

$$\tau_\theta \cdot S + \sigma_x \sin\theta \cdot S\cos\theta - \tau_{xy} \cos\theta \cdot S\cos\theta - \sigma_y \cos\theta \cdot S\sin\theta + \tau_{xy} \sin\theta \cdot S\sin\theta = (\quad (1.1)$$

θ 方向に対する法線方向の力のつり合いより，次式が得られる.

$$\sigma_\theta \cdot S - \sigma_x \cos\theta \cdot S\cos\theta - \tau_{xy} \sin\theta \cdot S\cos\theta - \sigma_y \sin\theta \cdot S\sin\theta - \tau_{xy} \cos\theta \cdot S\sin\theta = (\quad (1.2)$$

上式を 2 倍角の公式を用いてそれぞれ表すと

$$\tau_\theta = -\frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\theta + \frac{1}{2}\sigma_y \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (1.3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_x \left(\cos 2\theta + 1\right) + \frac{1}{2}\sigma_y \left(1 - \cos 2\theta\right) + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1.4)$$

それぞれ整理すると

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma_y - \sigma_x\right)\sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (1.5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1.6)$$

(2) (1)で求めた $\boldsymbol{\sigma_\theta}$，$\boldsymbol{\tau_\theta}$ を表す 2 式より $\boldsymbol{\theta}$ を消去して，モールの応力円を表す以下の式を導出せよ.

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta^{\,2} = \frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2} \quad (1.7)$$

与式の左辺に(1)で求めた二式を代入する

$$
\begin{aligned}
&\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta{}^2 \\
&= \left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right\}^2 \\
&\quad + \left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_y - \sigma_x\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right\}^2 \\
&= \left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_y - \sigma_x\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right\}^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2\cos^2 2\theta + \tau_{xy}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}{}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\sigma_y - \sigma_x\right)^2\sin^2 2\theta + \tau_{xy}\left(\sigma_y - \sigma_x\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}{}^2\cos^2 2\theta \\
&= \frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}{}^2 \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

(3) $\sigma_x = 3\sigma$，$\sigma_y = \sigma$，$\tau_{xy} = \sqrt{3}\sigma$ のとき，応力テンソル$[\sigma]$ を求め，図 1.1 におけるモールの応力円をσ-τ平面上に描け．

応力テンソルは以下のように表される．

$$
[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \qquad (1.9)
$$

それぞれ値を代入すると

$$
[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sigma & \sqrt{3}\sigma \\ -\sqrt{3}\sigma & \sigma \end{pmatrix} \qquad (1.10)
$$

これより，モールの応力円は以下の図のようになる．

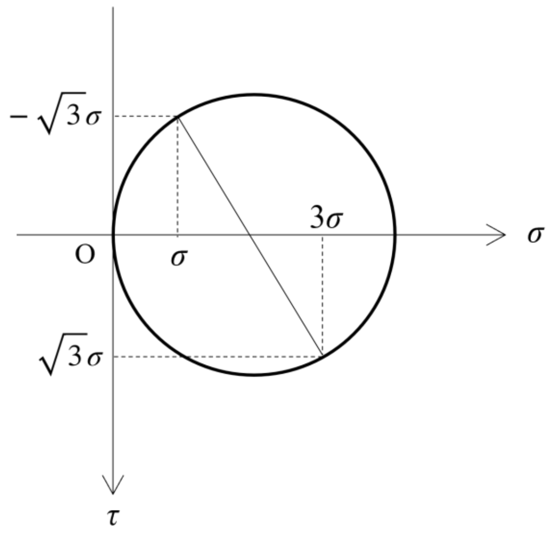

Fig. 1.1 モールの応力円

(4) (3) で描いたモールの応力円を用いて，主応力 (σ_1, σ_2) を求めよ．ただし，$\sigma_1 < \sigma_2$ とする．

本題は，平面応力状態であり，板厚方向の荷重は 0 である．
主応力はモールの応力円と σ 軸との交点であるから，モールの応力円の中心の σ 座標，及び半径を求めることで，2 つの主応力が求められる．

中心の σ 座標は

$$\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{2}(3\sigma + \sigma) = 2\sigma \tag{1.11}$$

半径は

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}{}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(3\sigma - \sigma)^2 + 4\left(\sqrt{3}\sigma\right)^2} = 2\sigma \tag{1.12}$$

以上より，主応力 σ_1, σ_2 は

$$\sigma_1 = \sigma_c - r = 2\sigma - 2\sigma = 0 \tag{1.13}$$

$$\sigma_2 = \sigma_c + r = 2\sigma + 2\sigma = 4\sigma \tag{1.14}$$

[2] 図 1 は板厚が十分に薄い弾性体のある点における応力状態を示し，図 1(c)は図 1 (a), (b)の応力状態を重ね合わせた様子を示している．このとき以下の設問に答えよ．ただし z 方向は板厚方向とし，板厚が十分薄いため平面応力状態と仮定する．また図において力の向きは矢印の向きとし，正負に注意して答えよ．

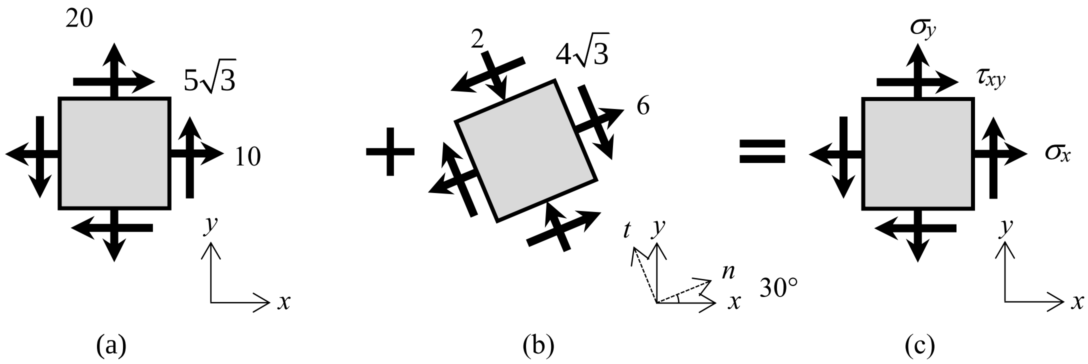

Fig.1 弾性体のある点における応力状態

図 1(a)について，以下の設問に答えよ．

(1) x-y 座標系における応力テンソルを求めよ．

(2) x-y 座標系におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を記せ．
(※図中には「x-y 座標系における応力テンソル」の座標も明記すること)

(3) モールの応力円より主応力σ_1 ,σ_2，及び主方向θ_1, θ_2を求めよ．
ただし，主応力は$\sigma_1 > \sigma_2$, 主方向は$-90° \leq \theta_2 < \theta_1 \leq 90°$ とする．

図 1(b)について，以下の設問に答えよ．

(4) n-t 座標系における応力テンソルを求めよ．

(5) n-t 座標系におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を記せ．
(※図中には「n-t 座標系における応力テンソル」の座標も明記すること)

(6) x-y 座標系における応力テンソルを求めよ．

図 1(c)について，以下の設問に答えよ．

(7) x-y 座標系におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を図に記せ．
(※図中には「x-y 座標系における応力テンソル」の座標も明記すること)

(8) 板に作用する主応力(σ_1, σ_2)を求めよ．ただし主応力は$\sigma_1 > \sigma_2$ とする．

(9) 最大せん断応力τ_{max} を求めよ．**(平面応力状態に着目)**

図 1(a)について，以下の設問に答えよ．

(1) *x-y* 座標系における応力テンソルを求めよ．

図 1(a)における応力テンソルは以下の式(2.1)のように表すことができる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 20 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

(2) *x-y* 座標系におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を記せ．

(※図中には「*x-y* 座標系における応力テンソル」の座標も明記すること)

式(2.1)より，モールの応力円は以下の図 2.1 のように描くことができる．

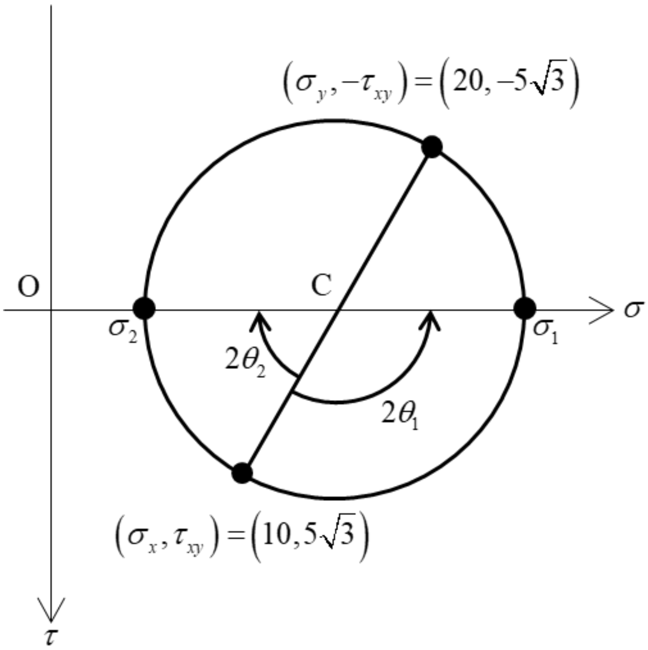

Fig. 2.1 (a)のモールの応力円

中心と半径は以下の式(2.2)，式(2.3)のように求めることができる．

中心
$$\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{2}\left(10 + 20\right) = 15$$
$$\therefore \left(\sigma_c, 0\right) = \left(15, 0\right) \tag{2.2}$$

半径
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-10\right)^2 + 4\times\left(5\sqrt{3}\right)^2} = 10$$
$$\therefore r = 10 \tag{2.3}$$

(3) モールの応力円より主応力σ_1,σ_2，及び主方向θ_1,θ_2を求めよ．

ただし，主応力は$\sigma_1>\sigma_2$，主方向は$-90°\leqq\sigma_2<\sigma_1\leqq 90°$とする．

図 2.1 より，主応力と主方向は以下の式(2.4)，式(2.5)のように求めることができる．

主応力
$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_c+r\\ \sigma_c-r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\ 5\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

主方向
$$\tan 2\theta_1=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=-\sqrt{3}$$
$$\therefore \theta_1=\frac{\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)}{2}=60° \tag{2.5}$$
$$\therefore \theta_2=\theta_1-90°=-30°$$

図 1(b)について，以下の設問に答えよ．

(4) *n-t* 座標系における応力テンソルを求めよ．

図 1(b)における応力テンソルは以下の式(2.6)のように表すことができる．

$$\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -4\sqrt{3}\\ -4\sqrt{3} & -2\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

(5) *n-t* 座標系におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を記せ.

(※図中には「*n-t* 座標系における応力テンソル」の座標も明記すること)

式(1.1)より，モールの応力円は以下の図 2.2 のように描くことができる.

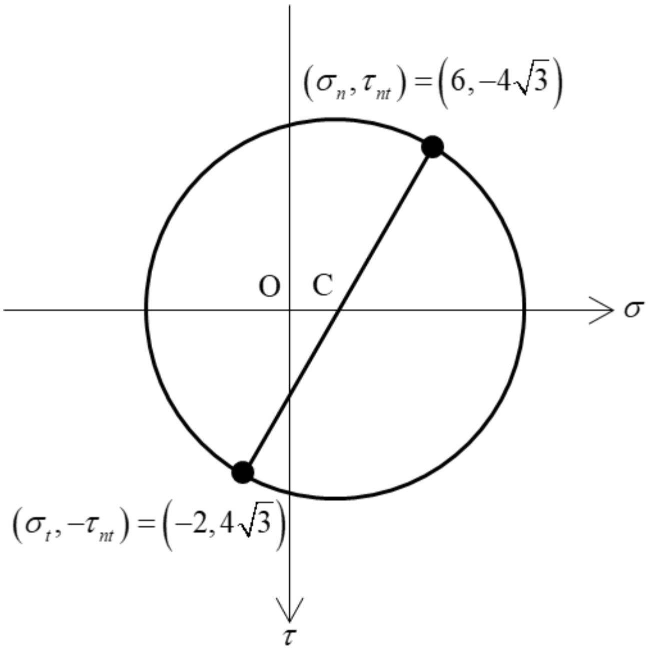

Fig. 2.2 (b)のモールの応力円

中心と半径は以下の式(2.7)，式(2.8)のように求めることができる.

中心

$$\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{2}(6-2) = 2$$
$$\therefore (\sigma_c, 0) = (2, 0) \tag{2.7}$$

半径

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 4\times\left(-4\sqrt{3}\right)^2} = 8$$
$$\therefore r = 8 \tag{2.8}$$

(6) *x-y* 座標系における応力テンソルを求めよ.

図 1(b)を見ると，*n-t* 座標系は *x-y* 座標系を 30°回転させたものだとわかるため，*n-t* 座標系から *x-y* 座標系に変換するためには-30°回転させればよいこととなる．すなわち，モールの応力円上では-60°回転させればよい.

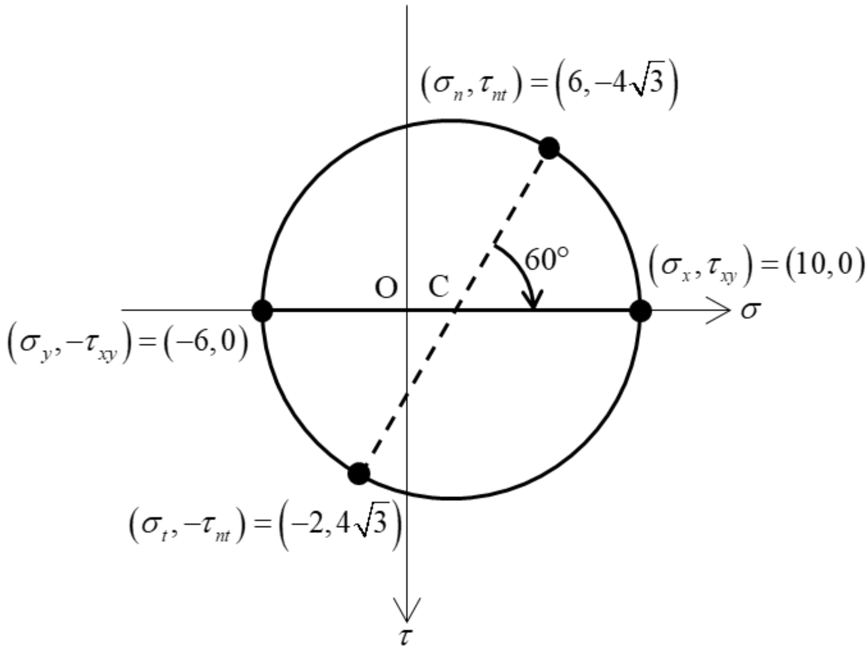

Fig. 2.3 (b)の *x*-*y* 座標系のモールの応力円

図 1(c)について，以下の設問に答えよ．

(7) *x*-*y* 座標系におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を図に記せ．

(※図中には「*x*-*y* 座標系における応力テンソル」の座標も明記すること)

図 1(c)における応力テンソルは，式(2.1)と式(2.6)を利用して以下の式(2.9)のように表すことができる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 14 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

式(2.9)より，モールの応力円は以下の図 2.4 のように描くことができる．

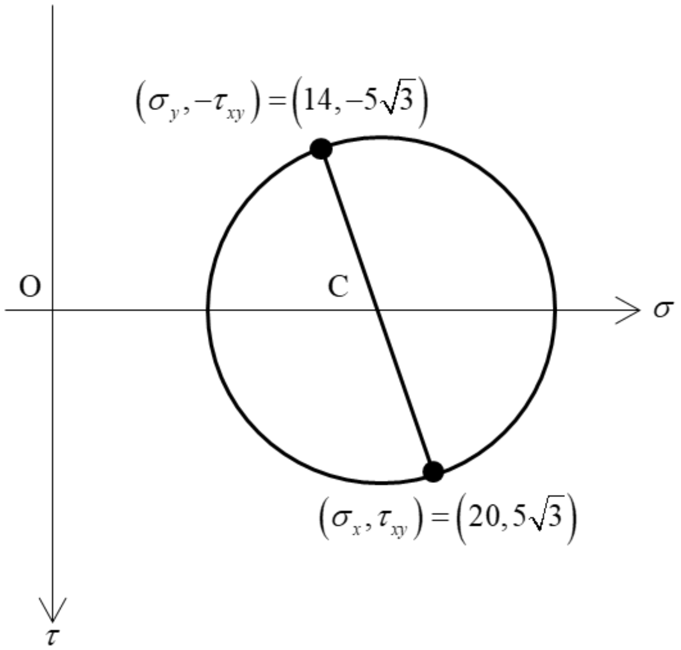

Fig. 2.4 (c)のモールの応力円

中心と半径は以下の式(2.10)，式(2.11)のように求めることができる．

中心
$$\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{2}\left(10+14\right) = 17$$
$$\therefore \left(\sigma_c, 0\right) = \left(17, 0\right) \tag{2.10}$$

半径
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 4\times\left(5\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{21}$$
$$\therefore r = 2\sqrt{21} \tag{2.11}$$

(8) 板に作用する主応力(σ_1,σ_2)を求めよ．ただし，主応力はσ_1>σ_2とする．

図 2.4 より，主応力は以下の式(2.12)のように求めることができる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_c + r \\ \sigma_c - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 + 2\sqrt{21} \\ 17 - 2\sqrt{21} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

(9) 最大せん断応力τ_{max}を求めよ．(平面応力状態に着目)

平面応力状態のため，板厚方向主応力σ_3は 0 となる．よって，3 次元での主応力は以下の式(2.13)のように表すことができる．

$$\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right) = \left(17 + 2\sqrt{21}, 17 - 2\sqrt{21}, 0\right) \tag{2.13}$$

3 次元のモールの応力円を描くと以下の図 2. 5 のようになる.

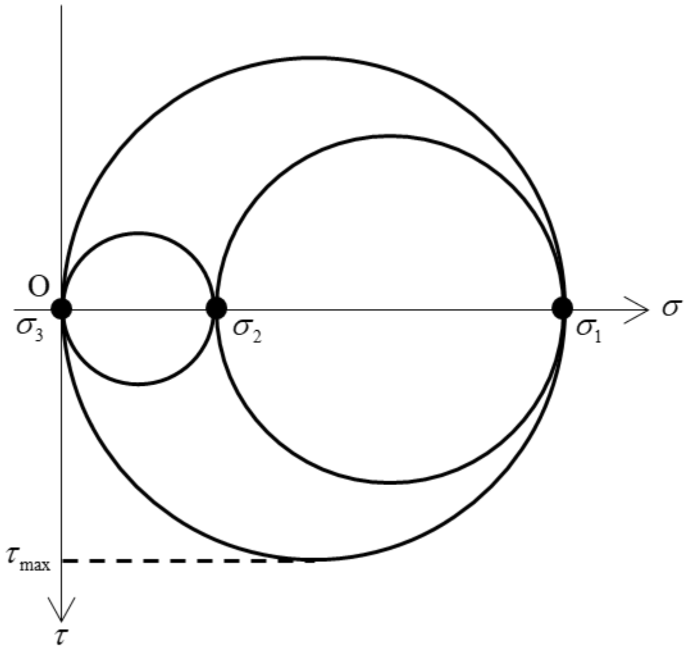

Fig. 2.5 (c)の 3 次元のモールの応力円

よって，最大せん断応力は以下の式(2.14)のように求めることができる.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{17 + 2\sqrt{21} - 0}{2} = \frac{17 + 2\sqrt{21}}{2} \tag{2.14}$$