材料の力学１　Step１　第 2 回演習問題

[1]　図 1 のように壁に固定された棒状部材がある．直径がそれぞれ $4d$，$2d$ からなる段付き丸棒が両端を壁で固定され，AB 間に分布荷重 p が x 軸正方向に一様に作用している．壁からの反力 R_O，R_B を図のように仮定し，以下の問いに答えよ．ただし，部材のヤング率を E とする．

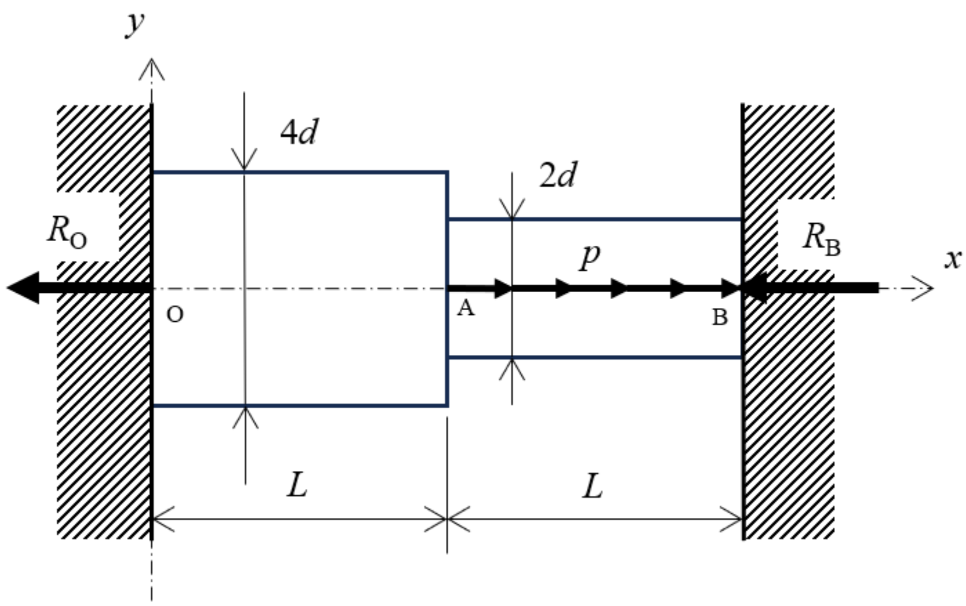

Fig.1 両端固定された棒状部材.

(1)FBD を描き，力のつり合い式を立式せよ．

(2)反力 R_o を用いて座標 x における軸力 $N(x)$を求めよ．

(3)点 B の変位 δ_B=0 となることから，壁からの反力 R_o，R_B を求めよ．

(4)(3)の結果を用いて部材に作用している軸力 $N(x)$と垂直応力 $\sigma(x)$を求めよ．また，$N(x)$と $\sigma(x)$の x 方向の変化を図示せよ．

(1)FBD を描き，力のつり合い式を立式せよ．

丸棒の FBD を描くと，図 1.1 のようになる．

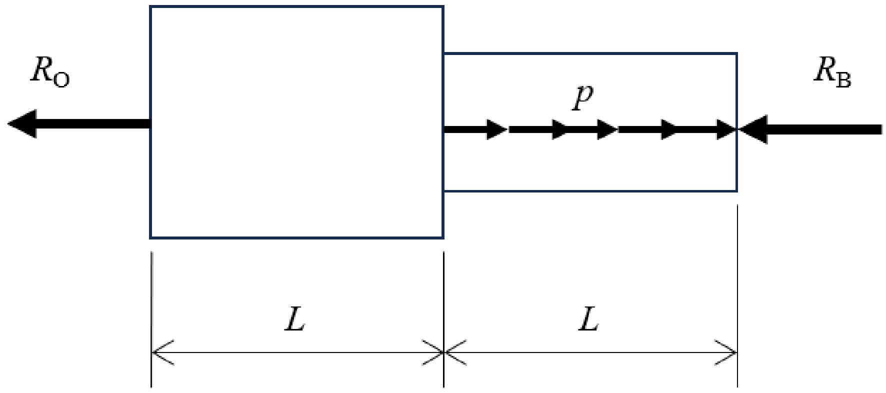

Fig.1.1 FBD.

図 1.1 から力のつり合い式を立式すると，

$$-R_O + pL - R_B = 0 \tag{1.1}$$

となる．

(2)反力 R_0 を用いて座標 x における軸力 $N(x)$を求めよ．

$0 \le x \le L$，$L \le x \le 2L$ の 2 つの範囲に分けて軸力 $N(x)$を求める．

(i) $0 \le x \le L$ のとき

FBD を描くと，図 1.2 のようになる．

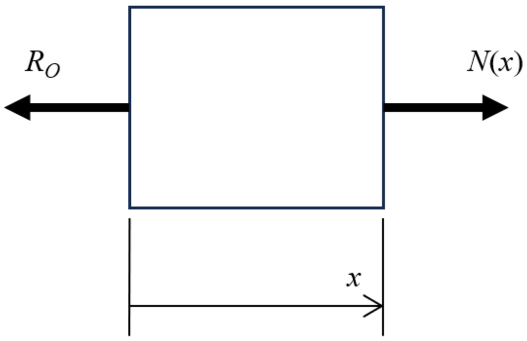

Fig.1.2 FBD ($0 \le x \le L$).

図 1.2 から力のつり合い式を立式すると，

$$
\begin{aligned}
-R_{\mathrm{O}}+N(x)&=0 \\
N(x)&=R_{\mathrm{O}}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

となる．

(ii)$L \le x \le 2L$ のとき

FBD を描くと，図 1.3 のようになる．

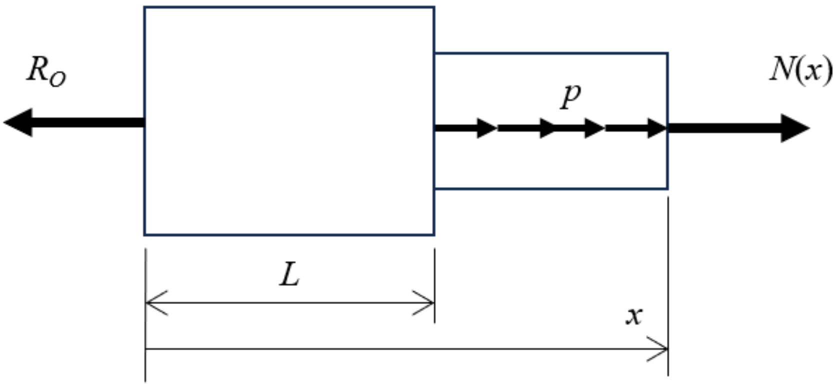

Fig.1.3 FBD ($L \le x \le 2L$).

図 1.3 から力のつり合い式を立式すると，

$$
\begin{aligned}
-R_{\mathrm{O}}+p(x-L)+N(x)&=0 \\
N(x)&=R_{\mathrm{O}}-p(x-L)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

となる．

(3)点 B の変位 $\delta_{\mathrm{B}}=0$ となることから，壁からの反力 R_{o}，R_{B} を求めよ．

OA 間の直径はそれぞれ $4d$，$2d$ であるので，断面積 A_{OA}，A_{OB} は

$$
A_{\mathrm{OA}}=\pi(2d)^2=4\pi d^2 \tag{1.4}
$$

$$A_{\mathrm{OB}} = \pi\left(d\right)^2 = \pi d^2 \tag{1.5}$$

となり，変位 δ_{B} は以下のように求められる．

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{B}} &= \int \varepsilon\left(x\right)dx \\
&= \int_0^L \frac{N\left(x\right)}{EA_{\mathrm{OA}}}dx + \int_L^{2L} \frac{N\left(x\right)}{EA_{\mathrm{AB}}}dx \\
&= \frac{1}{\pi Ed^2}\left[\int_0^L \frac{R_{\mathrm{O}}}{4}dx + \int_L^{2L}\left\{R_{\mathrm{O}} - p\left(x-L\right)\right\}dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi Ed^2}\left(\frac{R_{\mathrm{O}}L}{4} + R_{\mathrm{O}}L - \frac{pL^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi Ed^2}\left(5R_{\mathrm{O}}L - 2pL^2\right)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

点 O，B は固定端であるから $\delta_{\mathrm{B}}=0$ となるので，

$$\frac{1}{4\pi Ed^2}\left(5R_{\mathrm{O}}L - 2pL^2\right) = 0 \tag{1.7}$$

$$R_{\mathrm{O}} = \frac{2}{5}pL \tag{1.8}$$

よって，式(1.1)の力のつり合い式から，

$$R_{\mathrm{B}} = \frac{3}{5}pL \tag{1.9}$$

(4)(3)の結果を用いて部材に作用している軸力 $N(x)$ と垂直応力 $\sigma(x)$ を求めよ．また，$N(x)$ と $\sigma(x)$ の x 方向の変化を図示せよ．

(3)で求めた R_{O} を式(1.2)，式(1.3)に代入して軸力 $N(x)$，垂直応力 $\sigma(x)$ を求める．

(i) $0 \le x \le L$ のとき

$$N(x) = R_{\mathrm{O}} \\ = \frac{2}{5}pL \tag{1.10}$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_{\mathrm{OA}}} \\ = \frac{pL}{10\pi d^2} \tag{1.11}$$

(ii) $L \leq x \leq 2L$ のとき

$$N(x) = R_{\mathrm{O}} - p(x-L) \\ = -px + \frac{7}{5}pL \tag{1.12}$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A_{\mathrm{AB}}} \\ = \frac{-5px + 7pL}{5\pi d^2} \tag{1.13}$$

以上より，$N(x)$と$\sigma(x)$の x 方向の変化を図示すると，それぞれ図 1.4，1.5 のようになる．

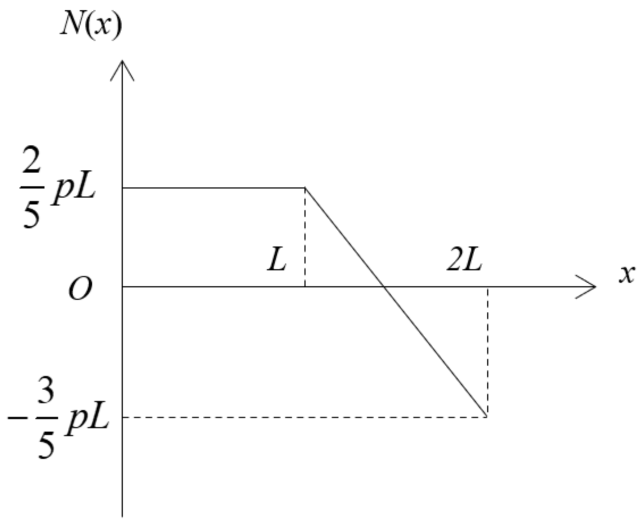

Fig.1.4 $N(x)$の x 方向の変化.

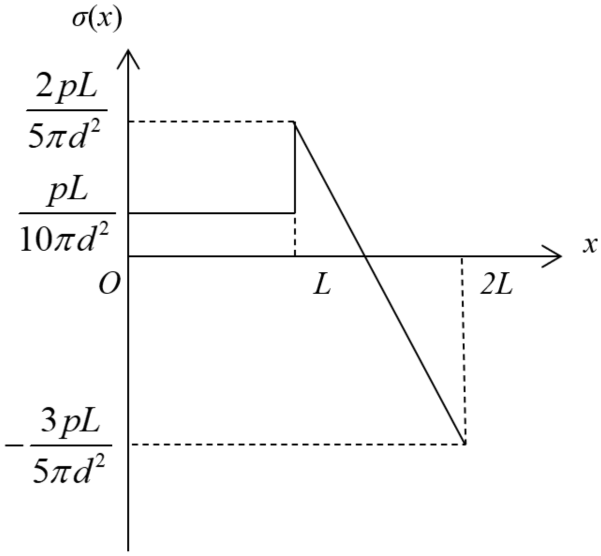

Fig.1.5 $\sigma(x)$の x 方向の変化

[2] 微小弾性体が図 2.1 に示す応力状態にある．ただし，0°≤θ≤180°，AB の面積を S，z 軸方向厚さは単位長さとする．ここで T_x および T_y は T の x 成分，y 成分である．以下の問いに答えよ．

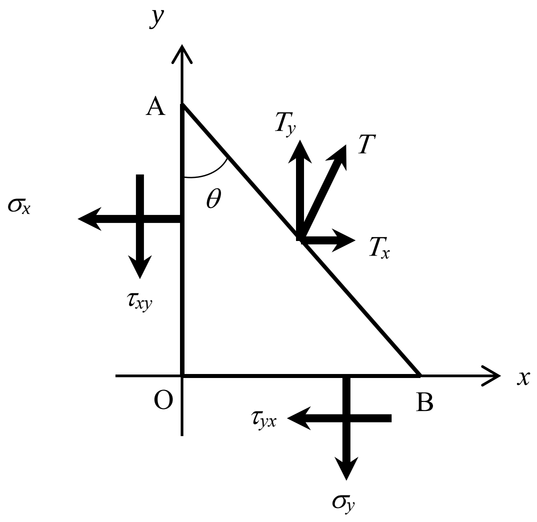

Fig.2.1 微小弾性体の応力状態

(1)図 2.1 において，力のつり合い式を立て，T_x，T_y をそれぞれ σ_x，σ_y，τ_{xy}，τ_{yx}，θを用いて表せ.

(2)斜面 AB の法線ベクトルを求め，応力テンソルと法線ベクトルから斜面にかかる応力を求める式をマトリックス表記で答えよ.

(3)斜面上にはたらくせん断力がゼロの場合，主応力 σ_n を用いて以下の式で表せる.

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n & 0 \\ 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

(2)の解答と上式より主応力 σ_n を σ_x，σ_y，τ_{xy}，τ_{yx} を用いて表せ.

(1) 図 2.2 において，力のつり合い式を立て，T_x，T_y をそれぞれ σ_x，σ_y，τ_{xy}，τ_{yx}，θ を用いて表せ.

微小弾性体に作用する x，y 方向それぞれの力のつり合い式をたてる．それぞれの面の断面積について，断面 AB の面積を $\overline{\mathrm{AB}}$ のように表すと，

$$T_x \cdot \overline{\mathrm{AB}} - \sigma_x \cdot \overline{\mathrm{OA}} - \tau_{yx} \cdot \overline{\mathrm{OB}} = 0 \tag{2.1}$$

$$T_y \cdot \overline{\mathrm{AB}} - \sigma_y \cdot \overline{\mathrm{OB}} - \tau_{xy} \cdot \overline{\mathrm{OA}} = 0 \tag{2.2}$$

それぞれの面の面積は，$\overline{\mathrm{AB}}$=S より，$\overline{\mathrm{OA}}$= S$\cos\theta$，$\overline{\mathrm{OB}}$= S$\sin\theta$ であり，式(2.1)および式(2.2)に代入して整理すると

$$T_x = \sigma_x \cos\theta + \tau_{yx} \sin\theta \tag{2.3}$$

$$T_y = \sigma_y \sin\theta + \tau_{xy} \cos\theta \tag{2.4}$$

これが答えである.

(2) 斜面 AB の法線ベクトルを求め，応力テンソルと法線ベクトルから斜面にかかる応力を求める式を行列表記で答えよ.

AB の法線ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

で表される．したがって斜面にかかる応力はコーシーの関係式より求める行列表記の式は

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

となる.

(3) 斜面上にはたらくせん断力がゼロの場合，主応力 σ_n を用いて以下の式で表せる.

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n & 0 \\ 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

① (2)の解答と上式より σ_x，σ_y，τ_{xy}，τ_{yx}，θ に成り立つ式を行列表示で書け.

問題文の式と式(2.6)より

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n & 0 \\ 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

式(2.7)を以下のように変形する.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

② ①で求めた式が任意の θ で成り立つことを考慮し，主応力 σ_n を σ_x，σ_y，τ_{xy}，τ_{yx} を用いて表せ.

式(2.8)は固有値問題であり，以下の行列式を解くことにより求められる.

$$\det\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \tag{2.9}$$

式(2.9)は以下のように変形でき，$\tau_{xy} = \tau_{yx}$を考慮して，

$$\sigma_n{}^2 - \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\sigma_n + \left(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2\right) = 0 \tag{2.10}$$

よって最終的な答えは σ_n について解くと

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} \tag{2.11}$$

となる.