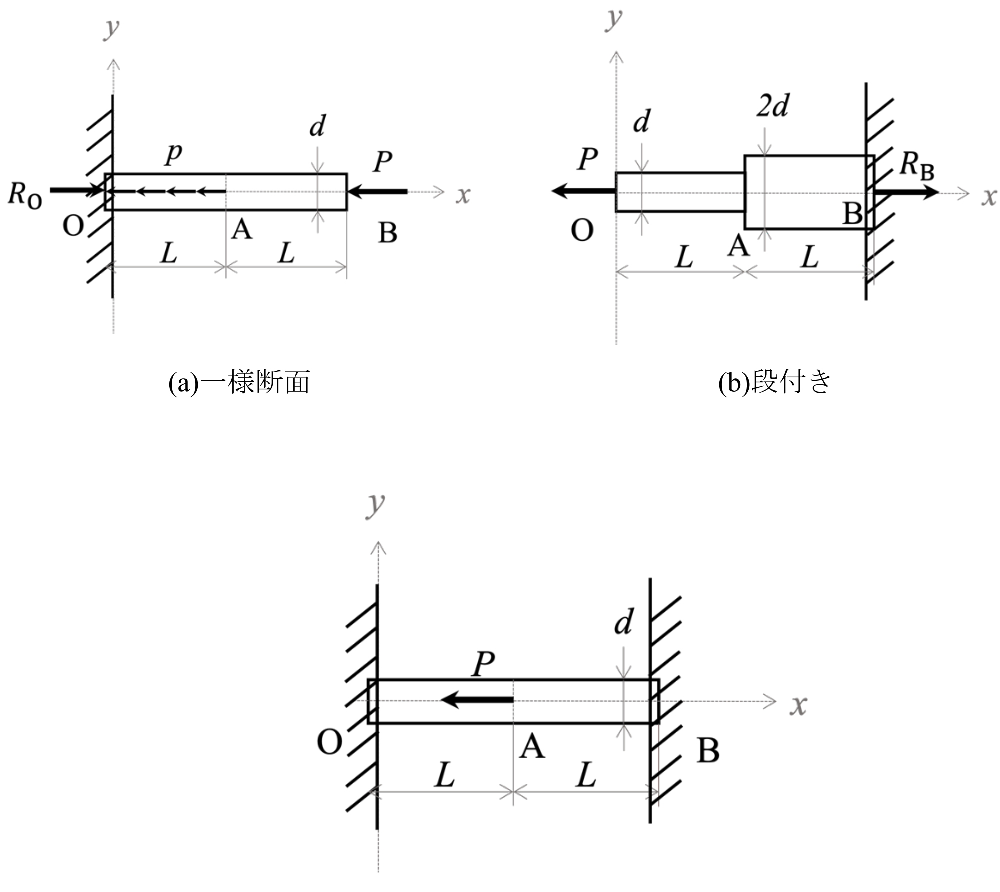
材料の力学 1　第 2 回演習問題（2023/4/29 実施）

[1]　図 1 に示すような一端が壁に固定された一様断面の丸棒(a)，段付き丸棒(b)と両端が壁に固定された丸棒(c)がある．(a)は長さ$2L$，直径dの丸棒の左端が固定されておりBC間に分布荷重p，外力Pが図のように作用している．(b)は長さL，直径dの丸棒(OA間)と長さL，直径$2d$の丸棒(AB間)からなる段付き丸棒が右端で固定されている．(c)は長さL，直径dの丸棒の両端が固定されており点Aで荷重Pが左向きに作用している．点O，Bでの壁からの反力をR_O，R_B(右向き正)，丸棒のヤング率をEとして，以下の問いに答えよ．



(a)一様断面　(b)段付き

(c)両端固定

Fig.1 様々な丸棒

(1)　一様断面の丸棒に対して，

(i)　FBD を描き(R_{O}の向きに注意)，力のつり合い式を立式して反力R_{O}を求めよ．

(ii)　座標xにおける軸力$N(x)$を求めよ．また，x方向に変位，y軸方向に軸力を取り図示せよ．

(iii)　応力－ひずみの関係から，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ．

(iv)　点Bにおけるx方向変位δ_{B}を求めよ(※)．

(2)　段付き丸棒に対して，

(i)　FBDを描き(R_{B}の向きに注意)，力のつり合い式を立式して反力R_{B}を求めよ．

(ii)　座標xにおける軸力$N(x)$を求めよ．また，x方向に変位，y軸方向に軸力を取り図示せよ．

(iii)　応力－ひずみの関係から，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ．

(iv)　点Oにおけるx方向変位δ_{O}を求めよ(※)．

(3)　両端固定の丸棒に対して，反力R_{O}，R_{B}を用いて力のつり合い式を立式せよ．また，FBDを描け．ここで，$|R_{\mathrm{O}}| < P$，$|R_{\mathrm{B}}| < P$であることに注意せよ．

(※)微小部分dxの伸びをdl，ひずみをεとすると以下の式が成り立つ．

$$\mathrm{d}l = \varepsilon \mathrm{d}x$$

(1)　一様断面の丸棒に対して，

(i)　　FBD を描き($\boldsymbol{R_O}$の向きに注意)，力のつり合い式を立式して反力$\boldsymbol{R_O}$を求めよ．

図の外力から反力の方向を判断する．圧縮方向(x軸負方向)に外力が作用しているため反力R_Oの向きはx軸正方向となる．従って，FBDは下図のようになる．

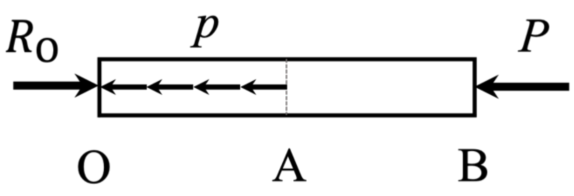


Fig.1.1 FBD

上図から力のつりあいの式は

$$R_o - p\cdot L - P = 0$$
$$\therefore R_O = pL + P \tag{1.1}$$

となる．

(ii)　　座標$\boldsymbol{x}$における軸力$\boldsymbol{N(x)}$を求めよ．また，$\boldsymbol{x}$方向に変位，$\boldsymbol{y}$軸方向に軸力を取り図示せよ．

(i)と同様に位置xにおけるFBDを考える．点A(x=L)前後で分布荷重が変化するため場合分けする．

0≤ $x \le L$のとき

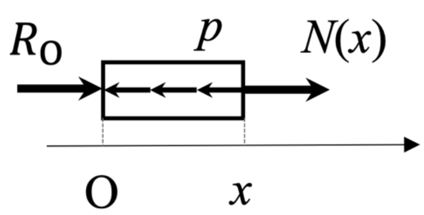


Fig.1.2 FBD

よって，力のつりあいの式は

$$R_o - p\cdot x + N(x) = 0$$
$$\therefore N(x) = p(x-L) - P \tag{1.2}$$

となる．

$L \leq x \leq 2L$のとき

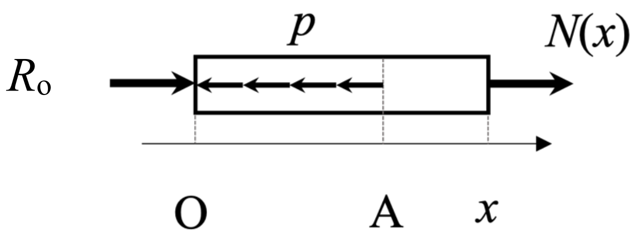


Fig.1.3 FBD

よって，力のつりあいの式は

$$R_o - p \cdot L + N(x) = 0$$
$$\therefore N(x) = -P \tag{1.3}$$

となる．

以上より，グラフは次のようになる．

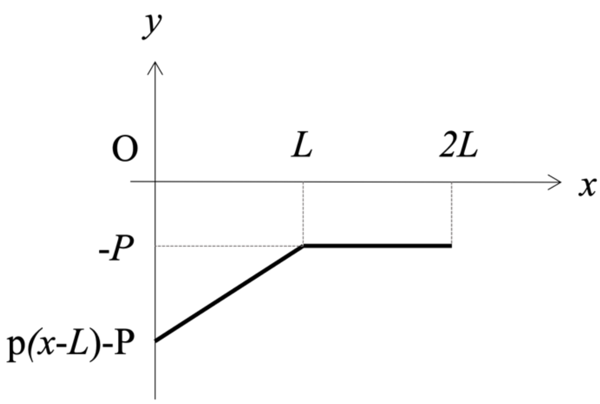


Fig.1.4 軸力ー変位線図

(iii) **応力－ひずみの関係から，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ．**

応力$\sigma(x)$は断面積$A(x)$とすると

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \tag{1.4}$$

となる．応力ーひずみの関係

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.5}$$

より，

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(x) &= \frac{N(x)}{EA(x)} \\
&= \begin{cases} \dfrac{4\{p(x-L)-P\}}{\pi E d^2} & (0 \le x \le L) \\ -\dfrac{4P}{\pi E d^2} & (L \le x \le 2L) \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

を得る.

(iv)　　点Bにおけるx方向変位$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{B}}$を求めよ(※).

点Bでの変位は微小変位dδを点OからBまで積分することで得られることから、

$$
\begin{aligned}
\delta_B &= \int_0^{2L} \varepsilon(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{L} \frac{4\{p(x-L)-P\}}{\pi E d^2}\mathrm{d}x + \int_L^{2L} -\frac{4P}{\pi E d^2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2pL^2}{\pi E d^2} - \frac{8PL}{\pi E d^2}
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

となる.

(2)　段付き丸棒に対して，

(i)　　FBDを描き(R_Bの向きに注意)，力のつり合い式を立式して反力R_Bを求めよ．

図から反力の方向を判断する．今回は引張方向(x軸負方向)に外力が作用しているため，反力R_{B}はx軸正方向となる．従って，FBDは下図のようになる．

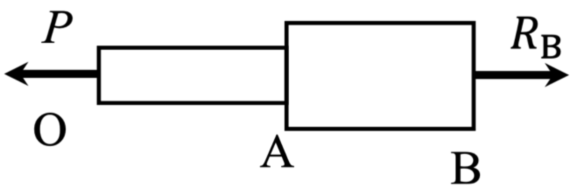


Fig.1.5 FBD

上図より力のつりあいの式は

$$
\begin{gathered}
-P + R_{\mathrm{B}} = 0 \\
\therefore R_{\mathrm{B}} = P
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

となる．

(ii)　　座標xにおける軸力$N(x)$を求めよ．また，x方向に変位，y軸方向に軸力を取り図示せよ．

(1)と同様に位置xにおけるFBDを考える．点A(x=L)前後で断面形状が変化するため場合分けする．

$0 \le x \le L$のとき

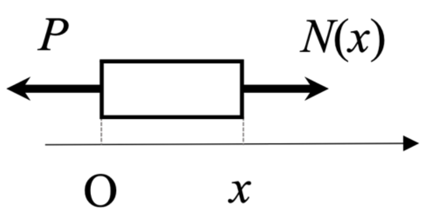


Fig.1.6 FBD

上図より力のつりあいの式は

$$
\begin{gathered}
-P + N(x) = 0 \\
\therefore N(x) = P
\end{gathered}
\tag{1.9}
$$

となる．

$L \leq x \leq 2L$のとき

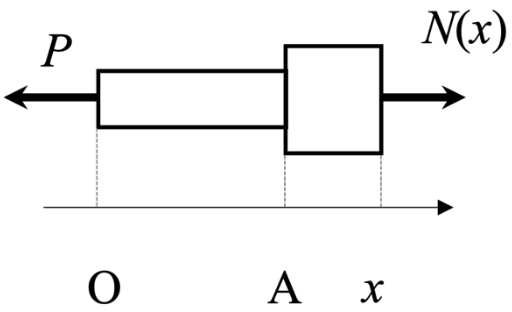


Fig.1.7 FBD

上図より力のつりあいの式は

$$
\begin{aligned}
-P + N(x) &= 0 \\
\therefore N(x) &= P
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

となる．

以上より，軸力は断面形状に依存しない．グラフは次のようになる．

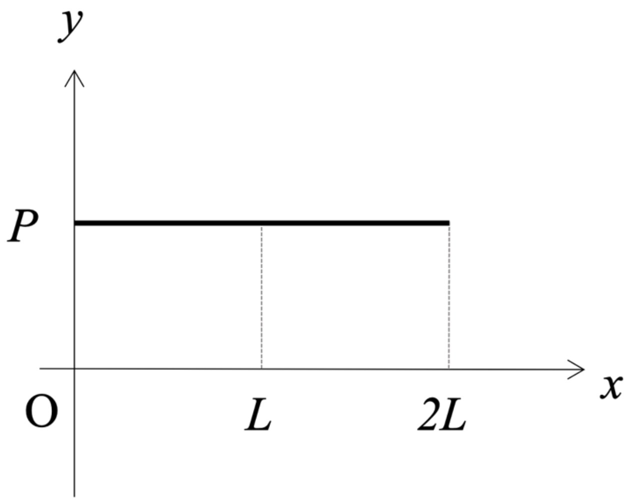


Fig.1.8 軸力ー変位線図

(iii) 応力－ひずみの関係から，垂直ひずみ$\varepsilon(x)$を求めよ．

応力は式(1.4)で表される．ここで，断面積$A(x)$は

$$
A(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi d^2}{4} & (0 \leq x \leq L) \\ \pi d^2 & (L \leq x \leq 2L) \end{cases}
\tag{1.10}
$$

である．式(1.5)で表される応力ーひずみの関係式を用いて，

$$
\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA(x)}
$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{4P}{\pi E d^2} & (0 \leq x \leq L) \\ \dfrac{P}{\pi E d^2} & (L \leq x \leq 2L) \end{cases} \tag{1.11}
$$

となる.

(iv) 点Oにおける*x*方向変位$\boldsymbol{\delta_0}$を求めよ(※).

点Oでの変位は微小変位dδをx軸負方向に伸びることを考慮し点BからOまで積分することで得られることから、

$$
\begin{aligned}
\delta_0 &= \int_{2L}^{0} \varepsilon(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{L}^{0} \frac{4P}{\pi E d^2} \mathrm{d}x + \int_{2L}^{L} \frac{P}{\pi E d^2} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{5PL}{\pi E d^2}
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

となる.

(3)　両端固定の丸棒に対して，反力R_{O}，R_{B}を用いて力のつり合い式を立式せよ．また，FBD を描け．ここで，$|R_{\mathrm{O}}| < P$，$|R_{\mathrm{B}}| < P$であることに注意せよ．

x軸負方向に外力が作用しているため，点Oでの反力R_{O}はx軸正方向(圧縮方向)，点Bでの反力R_{B}もx軸負方向(引張方向)となる．よってFBDは下図のようになる．

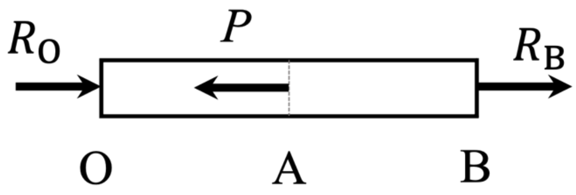


Fig.1.9 FBD

よって力のつりあいの式は

$$R_{\mathrm{O}} - P + R_{\mathrm{B}} = 0 \tag{1.13}$$

となる．

[2] 図に示すように，3 枚の鋼板が直径 d の鋼材製ボルトに締結され，外力 P が作用している．この時，以下の問いに答えよ．ただしボルトの締結力によって発生する部材間の摩擦力は無視できるものとする．

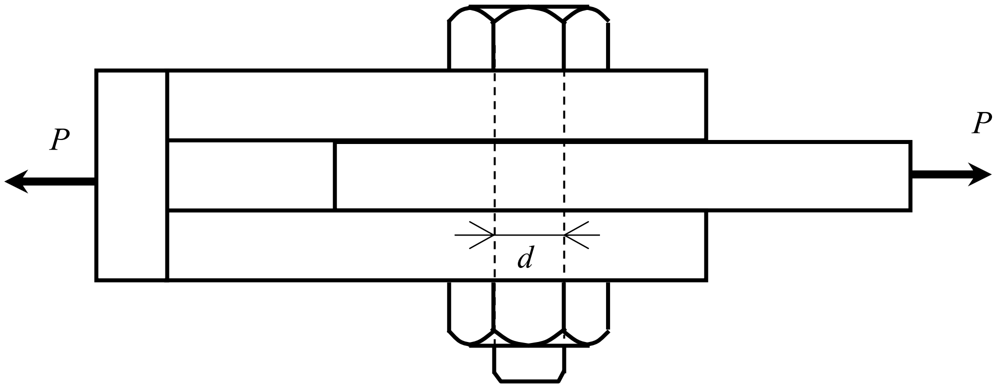


Fig. ボルトに固定された鋼板

(1) ボルトの FBD を描け．

(2) ボルトに生じるせん断応力 τ を求めよ．

(3) ボルトの許容せん断応力が τ_a=200[MPa] のとき，外力はいくらまで耐えられるか．有効数字3桁で求めよ．ただしボルトの直径は d=10[mm]とする．

(1) ボルトの FBD を描け.

FBD は次のように表される.

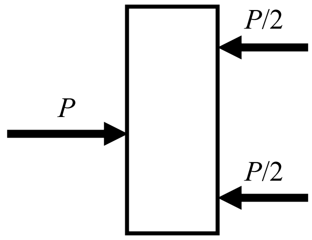


Fig.2.1 FBD

(2) ボルトに生じるせん断応力 $\boldsymbol{\tau}$ を求めよ.

ボルトに働く力は図 2.2 である.

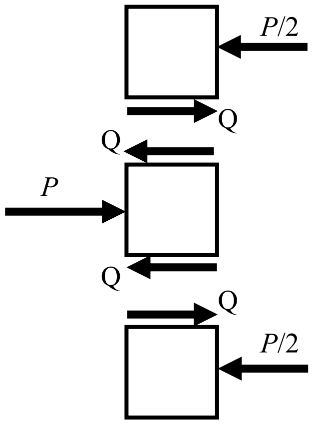


Fig.2.2 ボルトに作用する力

力のつり合いより

$$Q = \frac{P}{2} \tag{2.1}$$

である.

ここで，ボルトの断面積を A とすると，生じるせん断応力 τ は，以下の式で表される.

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{P}{2A} \tag{2.2}$$

断面積 A は,

$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \tag{2.3}$$

である．よって，ボルトに生じるせん断応力 τ は，

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{Q}{A} \\ &= \frac{P}{2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2P}{\pi d^2}\end{aligned} \tag{2.4}$$

である．

(3) ボルトの許容せん断応力が τ_a= 200 [MPa]のとき，外力はいくらまで耐えられるか．有効数字 3 桁で求めよ．ただしボルトの直径は d=10[mm]とする．

ボルトに生じるせん断応力が，許容せん断応力よりも小さくなる条件は

$$\begin{aligned}\tau_a &> \tau \\ &= \frac{2P}{\pi d^2}\end{aligned} \tag{2.5}$$

より

$$P < \frac{\pi d^2 \tau_a}{2} \tag{2.6}$$

である．よって，求める量は

$$\begin{aligned}\frac{\pi d^2 \tau_a}{2} &= \frac{3.141\times(10\times10^{-3})^2\times200\times10^6}{2} \\ &= 3.14\times10^4 \\ &= 31.4[\mathrm{kN}]\end{aligned} \tag{2.7}$$

である．