材料の力学 1　Step 2　第 12 回演習問題（2021/7/13 実施）

[1]　図 1 に示すように，直線的に変化する分布荷重 $f(x)$を受ける長さ $2L$ の片持ちはりを考える（ただし，$f(0)= f_0$，$f(2L)=0$ である）．なお，はりの曲げ剛性は EI_z とする．このとき以下の問いに答えよ．

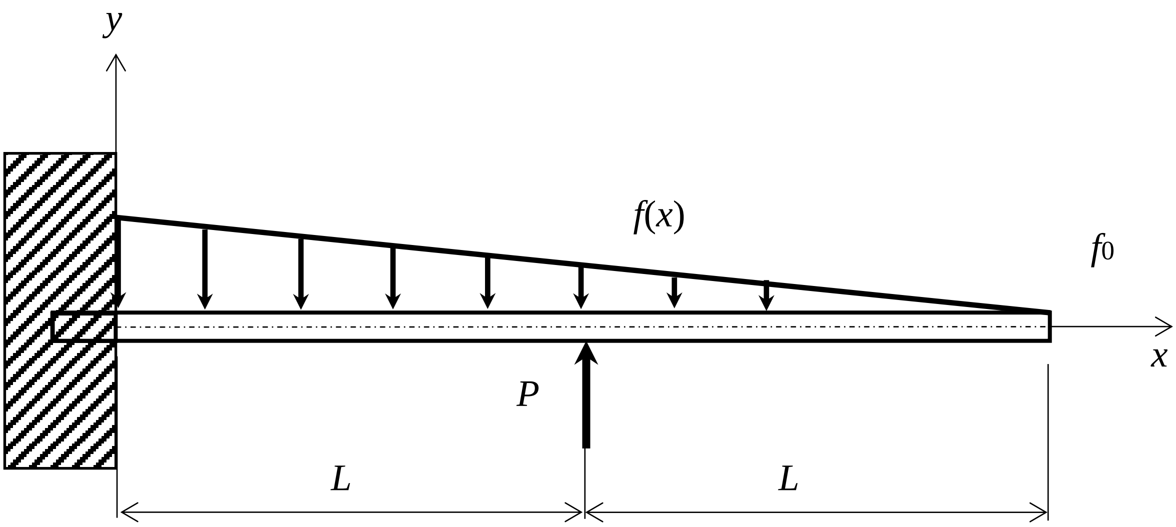

Fig.1 片持ちはり．

(1)　はりに作用する分布荷重 $f(x)$を f_0，x，L を用いて表せ．

(2)　はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 R_O と反モーメント M_O を求めよ．本問以降，$f_0 L = \frac{5}{4}P$ とし，解答にあたっては P を用いよ．

(3)　はりの曲げモーメント $M(x)$を特異関数表示せよ（分布荷重 $f(x)$によって生じる曲げモーメントを特異関数表示するには $f(x)$を 2 回積分する）．

(4)　$x=2L$ においてはりに生じるたわみ v を求めよ．

(1)　はりに作用する分布荷重 $\boldsymbol{f(x)}$ を $\boldsymbol{f_0}$，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{L}$ を用いて表せ．

分布荷重 $f(x)$ は，はりの端点に着目すると $f(0)= f_0$，$f(2L)=0$ であるので，式(1.1)のように表せる．

$$f(x) = -\frac{f_0}{2L}\left(x - 2L\right) \tag{1.1}$$

(2)　はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 $\boldsymbol{R_O}$ と反モーメント $\boldsymbol{M_O}$ を求めよ．本問以降，$\boldsymbol{f_0 L = \frac{5}{4}P}$ とし，解答にあたっては $\boldsymbol{P}$ を用いよ．

はり全体の FBD は以下のように表される．

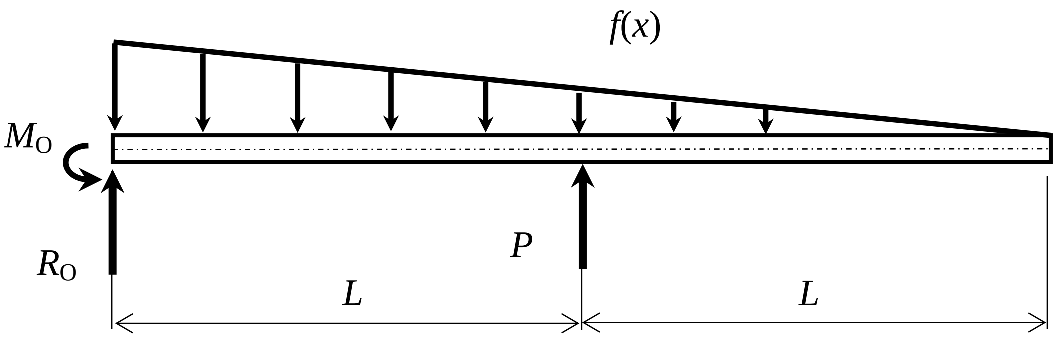

Fig.1.1　はり全体の FBD.

図 1.1 より，力のつり合い式から反力 R_O は,

$$
\begin{aligned}
R_O + P - \int_0^{2L} f(x)dx &= 0 \\
R_O &= f_0 L - P \\
&= \frac{1}{4}P
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

原点まわりのモーメントのつり合い式から反モーメント M_O は,

$$-M_{\mathrm{O}}+\int_0^{2L} f(x)\cdot x dx - PL = 0$$

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{O}} &= -\frac{f_0}{2L}\int_0^{2L}\left(x-2L\right)x dx - PL \\ &= -\frac{f_0}{2L}\cdot\left\{-\frac{1}{6}\left(2L-0\right)^3\right\} - PL \\ &= -\frac{1}{6}PL \end{aligned} \tag{1.3}$$

(3) はりの曲げモーメント *M*(*x*)を特異関数表示せよ（分布荷重 *f*(*x*)によって生じる曲げモーメントを特異関数表示するには *f*(*x*)を 2 回積分する）．

分布荷重 $f(x)$によって生じる曲げモーメントを特異関数表示するには $f(x)$を2回積分すればよいので，式(1.4)のように表される．

分布荷重 $f(x)$によって生じる曲げモーメントの特異関数：

$$\frac{f_0}{2}\left\langle x\right\rangle^2 - \frac{f_0}{12L}\left\langle x\right\rangle^3 = \frac{5P}{8L}\left\langle x\right\rangle^2 - \frac{5P}{48L^2}\left\langle x\right\rangle^3 \tag{1.4}$$

ゆえに，はりの曲げモーメント $M(x)$を特異関数表示すると式(1.2)，(1.3)を踏まえ，

$$\begin{aligned} M(x) &= M_{\mathrm{O}}\left\langle x\right\rangle^0 - R_{\mathrm{O}}\left\langle x\right\rangle^1 + \frac{5}{8}\frac{P}{L}\left\langle x\right\rangle^2 - \frac{5}{48}\frac{P}{L^2}\left\langle x\right\rangle^3 - P\left\langle x-L\right\rangle^1 \\ &= -\frac{1}{6}PL\left\langle x\right\rangle^0 - \frac{1}{4}P\left\langle x\right\rangle^1 + \frac{5}{8}\frac{P}{L}\left\langle x\right\rangle^2 - \frac{5}{48}\frac{P}{L^2}\left\langle x\right\rangle^3 - P\left\langle x-L\right\rangle^1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

(4) *x*=2*L* においてはりに生じるたわみ *v* を求めよ．

はりのたわみの基礎式に式(1.5)を適用し積分すると，積分定数 C_1，C_2 を用いて以下のように表すことができる．

$$-EI_z v''(x) = M(x) = -\frac{1}{6}PL\left\langle x\right\rangle^0 - \frac{1}{4}P\left\langle x\right\rangle^1 + \frac{5}{8}\frac{P}{L}\left\langle x\right\rangle^2 - \frac{5}{48}\frac{P}{L^2}\left\langle x\right\rangle^3 - P\left\langle x-L\right\rangle^1 \tag{1.6}$$

$$-EI_z v'(x) = -\frac{1}{6}PL\left\langle x\right\rangle^1 - \frac{1}{8}P\left\langle x\right\rangle^2 + \frac{5}{24}\frac{P}{L}\left\langle x\right\rangle^3 - \frac{5}{192}\frac{P}{L^2}\left\langle x\right\rangle^4 - \frac{1}{2}P\left\langle x-L\right\rangle^2 + C_1 \tag{1.7}$$

$$
\begin{aligned}
-EI_z v(x) = -\frac{1}{12}PL\langle x\rangle^2 - \frac{1}{24}P\langle x\rangle^3 + \frac{5}{96}\frac{P}{L}\langle x\rangle^4 \\
-\frac{1}{192}\frac{P}{L^2}\langle x\rangle^5 - \frac{1}{6}P\langle x-L\rangle^3 + C_1 x + C_2
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

たわみ角 $v'(x)$とたわみ $v(x)$に関して整理して,

$$
v'(x) = -\frac{1}{EI_z}\left(\begin{aligned} -\frac{1}{6}PL\langle x\rangle^1 - \frac{1}{8}P\langle x\rangle^2 + \frac{5}{24}\frac{P}{L}\langle x\rangle^3 \\ -\frac{5}{192}\frac{P}{L^2}\langle x\rangle^4 - \frac{1}{2}P\langle x-L\rangle^2 + C_1 \end{aligned}\right) \tag{1.9}
$$

$$
v(x) = -\frac{1}{EI_z}\left(\begin{aligned} -\frac{1}{12}PL\langle x\rangle^2 - \frac{1}{24}P\langle x\rangle^3 + \frac{5}{96}\frac{P}{L}\langle x\rangle^4 \\ -\frac{1}{192}\frac{P}{L^2}\langle x\rangle^5 - \frac{1}{6}P\langle x-L\rangle^3 + C_1 x + C_2 \end{aligned}\right) \tag{1.10}
$$

ここで, はりが x=0 において壁固定されていることから, 境界条件は$v'(0) = v(0) = 0$ なので,

$$
C_1 = C_2 = 0 \tag{1.11}
$$

したがって，たわみ $v(x)$は,

$$
v(x) = -\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{1}{6}PL\langle x\rangle^2 - \frac{1}{24}P\langle x\rangle^3 + \frac{5}{96}\frac{P}{L}\langle x\rangle^4 - \frac{1}{192}\frac{P}{L^2}\langle x\rangle^5 - \frac{1}{6}P\langle x-L\rangle^3\right) \tag{1.12}
$$

ゆえに，x=2L におけるはりのたわみ v は,

$$
\begin{aligned}
v &= -\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{1}{12}PL\langle 2L\rangle^2 - \frac{1}{24}P\langle 2L\rangle^3 + \frac{5}{96}\frac{P}{L}\langle 2L\rangle^4 - \frac{1}{192}\frac{P}{L^2}\langle 2L\rangle^5 - \frac{1}{6}P\langle L\rangle^3\right) \\
&= -\frac{PL^3}{EI_z}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{6}\frac{PL^3}{EI_z}
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

[2] 図 2 に示すようにはりが O，B 点で支持され，A 点には剛体棒がついており x 軸から $L/2$ の距離に外力 P がそれぞれ図のように作用している．はりの曲げ剛性を EI として以下の問いに答えよ．

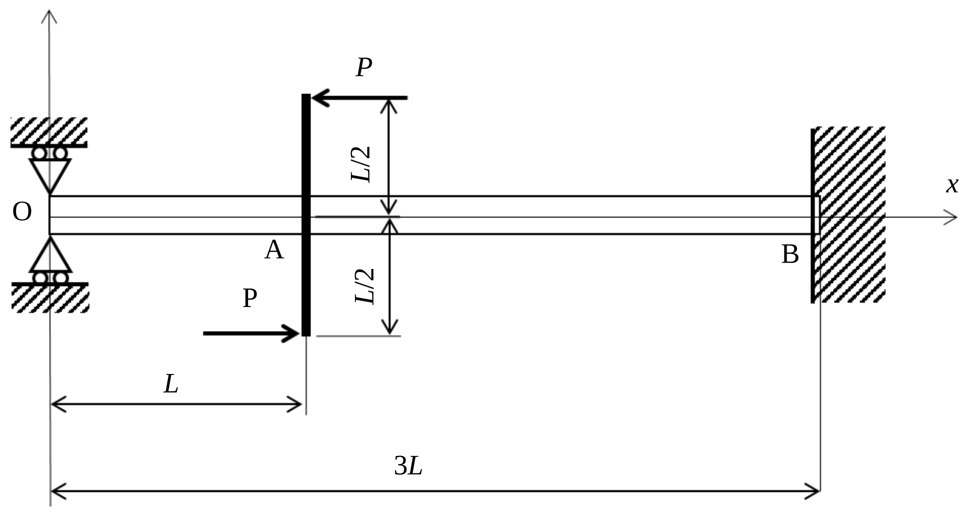

Fig.2 先端が単純支持された片持ちはり

(1)O 点における反力を R_O，B 点における反力を R_B，反モーメントを M_B として，はり全体の FBD を描き，力のつりあい式とモーメントのつりあい式を求めよ．

(2)はりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示せよ．ただし，R_0 を用いてもよい．

(3) (2)より得られた特異関数からたわみの基礎式を求め，境界条件を加えることで R_O を求めよ．

(4)たわみが最大となる座標とそのときのたわみの大きさを求めよ．

（ヒント：$0 \le x \le 3L$ の範囲に関して，たわみの基礎式 v の増減表を考える）

※特異関数

$n \ge 0$ として

$$\langle x-a \rangle^n = 0 \qquad (x \le a \text{ の時})$$

$$\langle x-a \rangle^n = (x-a)^n \qquad (x > a \text{ の時})$$

(1)　O 点における反力を R_O，B 点における反力を R_B，反モーメントを M_B として，はり全体の FBD を描き，力のつりあい式と O 点まわりのモーメントのつりあい式を求めよ．

与えられた条件より，はり全体の FBD は以下の図のようになる．

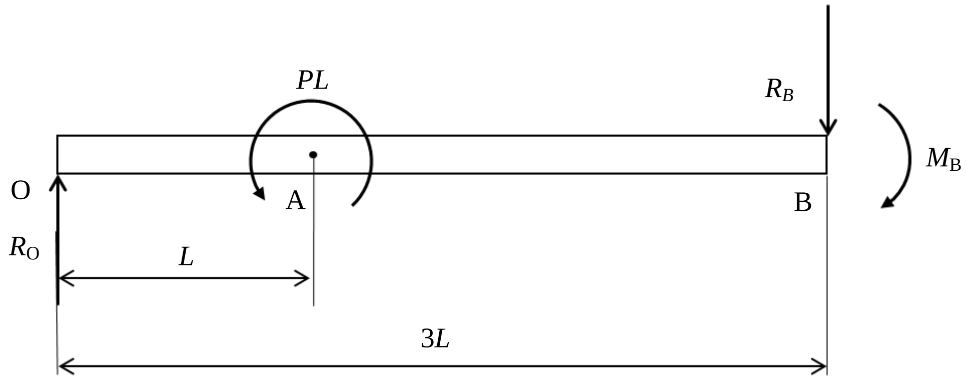

Fig.2.1 はりの全体の FBD

また，力のつりあい式、モーメントのつりあい式はそれぞれ式(2.1)，式(2.2)のように表される．

$$R_O - R_B = 0 \tag{2.1}$$

$$PL - 3R_B L - M_B = 0 \tag{2.2}$$

(2)　はりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示せよ．ただし，R_O を用いてよい．

R_O を用いてはりの曲げモーメントを特異関数表示すると式(2.3)のようになる．

$$M(x) = -R_O \langle x \rangle^1 + PL \langle x - L \rangle^0 \tag{2.3}$$

(3)　(2)より得られた特異関数からたわみの基礎式を求め, 境界条件を加えることで R_O を求めよ．

(2)より，特異関数をたわみの基礎式に代入する．

$$-EIv'' = -R_O \left\langle x \right\rangle^1 + PL \left\langle x-L \right\rangle^0 \tag{2.4}$$

$$-EIv' = -\frac{R_O}{2} \left\langle x \right\rangle^2 + PL \left\langle x-L \right\rangle^1 + C_1 \tag{2.5}$$

$$-EIv = -\frac{R_O}{6} \left\langle x \right\rangle^3 + \frac{PL}{2} \left\langle x-L \right\rangle^2 + C_1 x + C_2 \tag{2.6}$$

ここで，境界条件 x=0 のとき v=0 を式(2.6) に代入すると，C_2 が求められる．

$$C_2 = 0 \tag{2.7}$$

また，境界条件 x=3L のとき v'=0 を代入する．

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{R_O}{2} \cdot 9L^2 + PL \cdot 2L + C_1 \\ \therefore C_1 &= \frac{9}{2} R_O L^2 - 2PL^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

さらに，境界条件x=3L のときv=0 を代入するとR_O が求められる．

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{R_O}{6} \cdot 27L^3 + \frac{PL}{2} \cdot 4L^2 + \left(\frac{9}{2} R_O L^2 - 2PL^2 \right) \cdot 3L \\ \therefore R_O &= \frac{4}{9} P \end{aligned} \tag{2.9}$$

(4)　たわみが最大となる座標とそのときのたわみの大きさを求めよ．

(3)の結果より求まった R_O を C_1 に代入すると，たわみの基礎式は以下のようになる．

$$v' = \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{9}P\langle x\rangle^2 - PL\langle x-L\rangle^1\right) \tag{2.10}$$

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{27}P\langle x\rangle^3 - \frac{PL}{2}\langle x-L\rangle^2\right) \tag{2.11}$$

式(2.10)より，$0 \le x \le L$ の範囲におけるたわみ角は式(2.12)のように表される．

$$v' = \frac{2P}{9EI}x^2 \tag{2.12}$$

したがって，x=0 のときv'=0 となる．
続いて，$L \le x \le 3L$ の範囲におけるたわみ角は式(2.13)のように表される．

$$v' = \frac{P}{9EI}(2x-3L)(x-3L) \tag{2.13}$$

したがって，x=3L/2，3L のときv'=0 となる．
以上の結果より，たわみの基礎式における増減表は表 2 のようになり，はりの x 方向分布は図 2.2 のようになる．

Table2 増減表

x	0	⋯	3L/2	⋯	3L
v'	0	+	0	―	0
v	0	↗	$\frac{PL^3}{8EI}$	↘	0

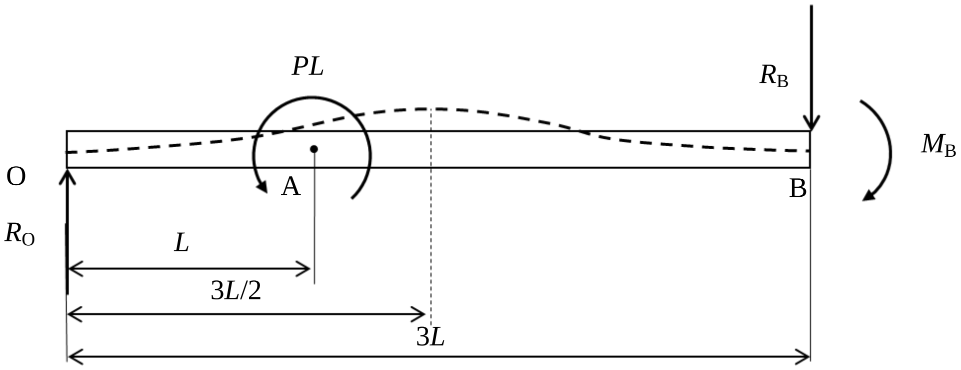

Fig.2.2 たわみの *x* 方向分布

以上より，x=3L/2のときたわみは最大となり

$$v_{\max} = \frac{PL^3}{8EI} \tag{2.14}$$

今回の問題では左端が単純支持であるが C_1=0 であり，x=0 の時のたわみ角が 0 となった．これは左端が固定端支持の境界条件と同じである．つまり今回の力学条件において，左端を固定端としてもたわみの基礎式は変わらず，図.2.2 のたわみの x 方向分布も変化しない．