

材料の力学 1 Step 2 第 11 回演習問題 (2021/7/6 実施)

- [1] 図 1 に示すように、単純支持された長さ $2L$ のはりが A 点で集中荷重 P を受けており、BC 間に分布荷重 q が作用している。このとき以下の問いに答えよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI とする。

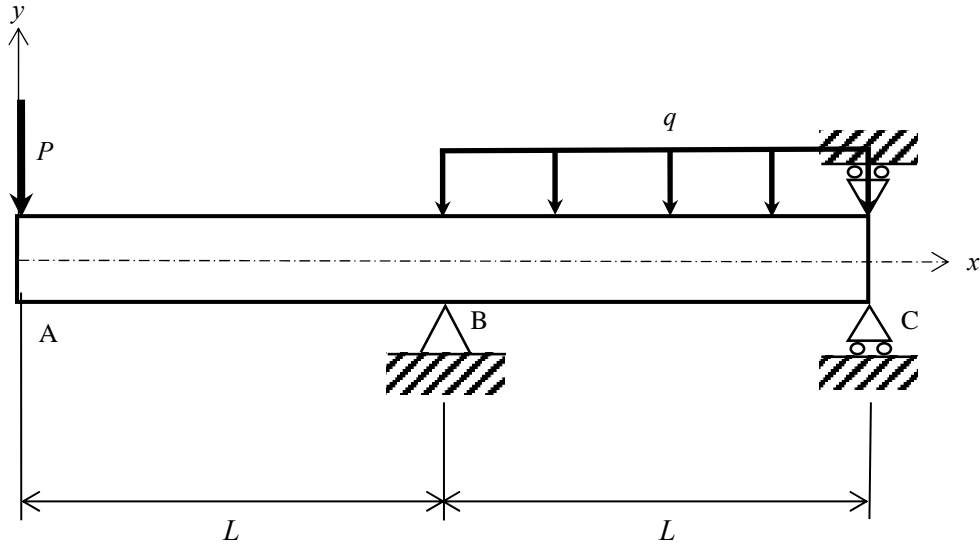


Fig.1 単純支持されたはり

- (1) はり全体のFBDを描きB点の反力 R_B 、C点の反力 R_C をそれぞれ求めよ。
- (2) AC間に生じる曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示せよ。
- (3) A点に生じるたわみ v_A を P 、 q を用いて表せ。
- (4) A点に生じるたわみが0となる時の集中荷重 P と分布荷重 q の関係を求めよ。

(1) はり全体のFBD を描きB 点の反力 R_B , C 点の反力 R_C をそれぞれ求めよ.

はり全体の FBD を描くと以下ようになる.

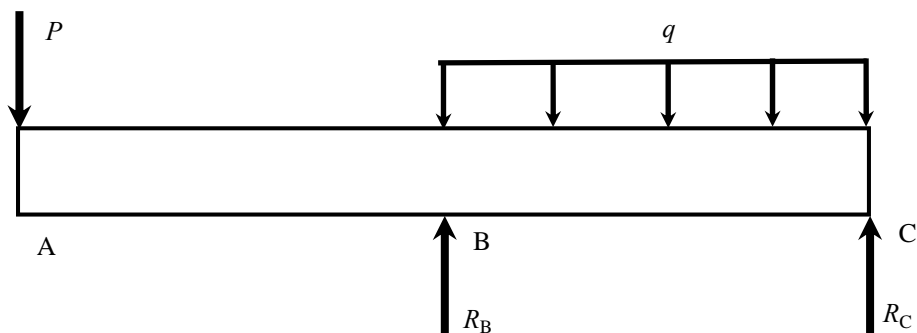


Fig.1.1 FBD.

はり全体の力のつり合いより,

$$R_B + R_C - P - qL = 0 \quad (1.1)$$

また, C 点まわりのモーメントのつり合いより,

$$-\frac{1}{2}qL^2 - 2PL + R_B L = 0 \quad (1.2)$$

よって

$$R_B = 2P + \frac{1}{2}qL \quad (1.3)$$

また, 式(1.1)より

$$R_C = -P + \frac{1}{2}qL \quad (1.4)$$

(2) AC 間に生じる曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示せよ.

$M(x)$ を特異関数表示すると

$$M\langle x\rangle=P\langle x\rangle^1-\left(2P+\frac{qL}{2}\right)\langle x-L\rangle^1+\frac{q}{2}\langle x-L\rangle^2 \quad (1.5)$$

(3) A 点に生じるたわみ v_A を P, q を用いて表せ.

はりたたわみの基礎式より

$$-EIv''=M(x) \quad (1.6)$$

(2)の結果より

$$-EIv''=P\langle x\rangle^1-\left(2P+\frac{qL}{2}\right)\langle x-L\rangle^1+\frac{q}{2}\langle x-L\rangle^2 \quad (1.7)$$

式(1.7)の式を両辺積分して

$$-EIv'=\frac{P}{2}\langle x\rangle^2-\frac{1}{2}\left(2P+\frac{qL}{2}\right)\langle x-L\rangle^2+\frac{q}{6}\langle x-L\rangle^3+C_1 \quad (1.8)$$

$$-EIv=\frac{P}{6}\langle x\rangle^3-\frac{1}{6}\left(2P+\frac{qL}{2}\right)\langle x-L\rangle^3+\frac{q}{24}\langle x-L\rangle^4+C_1x+C_2 \quad (1.9)$$

ただし, C_1, C_2 は積分定数である. ここで, 境界条件を考える. $x=L, 2L$ においてたわみは0であるから,

$$v(L)=0 \quad (1.10)$$

$$v(2L)=0 \quad (1.11)$$

よって式(1.9), 式(1.10)より

$$\frac{P}{6}L^3+C_1L+C_2=0 \quad (1.12)$$

また式(1.9), 式(1.11)より

$$\frac{4}{3}PL^3 - \left(\frac{P}{3} + \frac{1}{12}qL\right)L^3 + \frac{q}{24}L^4 + 2C_1L + C_2 = 0 \quad (1.13)$$

$$PL^3 - \frac{q}{24}L^4 + 2C_1L + C_2 = 0 \quad (1.14)$$

式(1.11), 式(1.12)より

$$C_1 = -\frac{5}{6}PL^2 + \frac{1}{24}qL^3 \quad (1.15)$$

式(1.12), 式(1.15)より

$$C_2 = \frac{2}{3}PL^3 - \frac{1}{24}qL^4 \quad (1.16)$$

よってたわみの式は

$$v = -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{P}{6} \langle x \rangle^3 - \frac{1}{6} \left(2P + \frac{qL}{2} \right) \langle x-L \rangle^3 + \frac{q}{24} \langle x-L \rangle^4 + \left(-\frac{5}{6}PL^2 + \frac{1}{24}qL^3 \right) x + \left(\frac{2}{3}PL^3 - \frac{1}{24}qL^4 \right) \right\} \quad (1.17)$$

A 点でのたわみ v_A は式(1.17)に $x=0$ を代入すればよいので

$$v_A = -\frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3}PL^3 - \frac{1}{24}qL^4 \right) \quad (1.18)$$

(4) A 点に生じるたわみが 0 となる時の集中荷重 P と分布荷重 q の関係を求めよ.

式(1.18)において, $v_A=0$ のとすると,

$$\frac{2}{3}PL^3 - \frac{1}{24}qL^4 = 0 \quad (1.19)$$

より集中荷重 P と分布荷重 q の関係は, 次のように求まる.

$$P = \frac{1}{16}qL \quad (1.20)$$

- [2] 図2に示すような左端が壁に固定され点Bで単純支持されている長さ $2L$ のはりがある。はりには, OA 間に分布荷重 p が下向きに作用している. このとき以下の問いに答えよ. ただし, はりの曲げ剛性を EI とする.

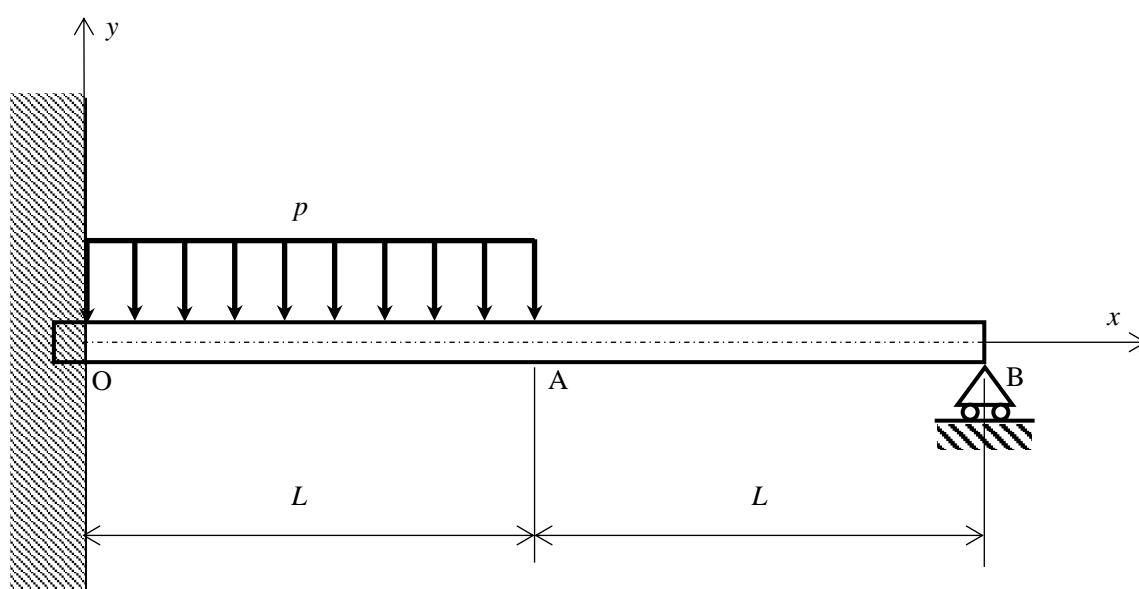


Fig. 2 壁に固定されたはり.

- (1) 壁からの反力を R_0 , 反モーメントを M_0 , 点Bにおける反力を R_B としてはり全体のFBDを描き, 力のつり合い式および点Oまわりのモーメントのつり合い式を求めよ.
- (2) はりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示せよ.
- (3) 壁からの反力 R_0 , 反モーメント M_0 , 点Bにおける反力 R_B をそれぞれ求めよ.
- (4) 点Aにおけるはりのたわみ角 ν'_A , たわみ ν_A をそれぞれ求めよ.

- (1) 壁からの反力を R_O , 反モーメントを M_O , 点 B における反力を R_B としてはり全体の FBD を描き, 力のつり合い式および点 O まわりのモーメントのつり合い式を求めよ.

壁からの反力 R_O , 反モーメント M_O , 点 B における反力 R_B を用いてはり全体の FBD を描くと下図のようになる.

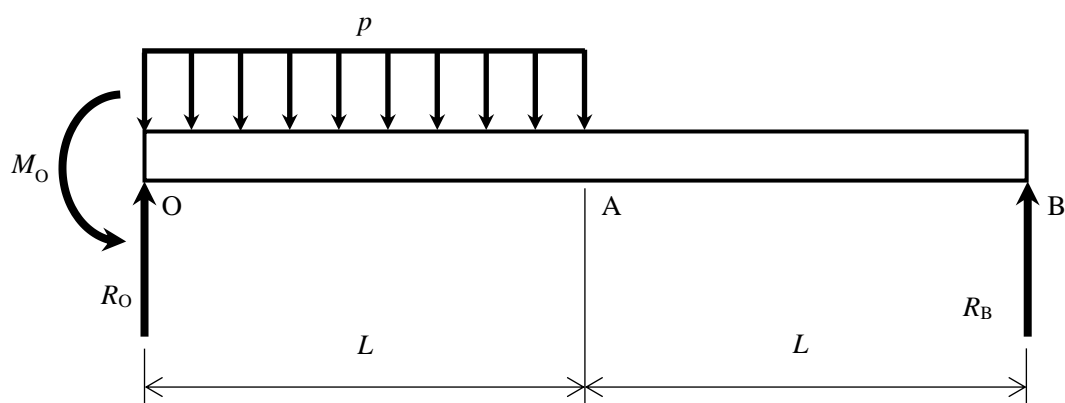


Fig. 2.1 はり全体の FBD.

力のつり合い式は以下のようなになる.

$$-pL + R_O + R_B = 0 \quad (2.1)$$

また, 点 O まわりのモーメントのつり合い式は以下のようなになる.

$$\begin{aligned} -M_O + \int_0^L p x dx - 2R_B L &= 0 \\ -M_O + \frac{1}{2} p L^2 - 2R_B L &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2) はりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示せよ.

曲げモーメント $M(x)$ の特異関数表示を考えるために, はりの $L \leq x \leq 2L$ において上下に分布荷重 p が作用している場合を考える. このとき FBD を描くと下図のようになる. ただし, $L \leq x \leq 2L$ において上下に作用する分布荷重 p は互いに打ち消し合うことに注意する.

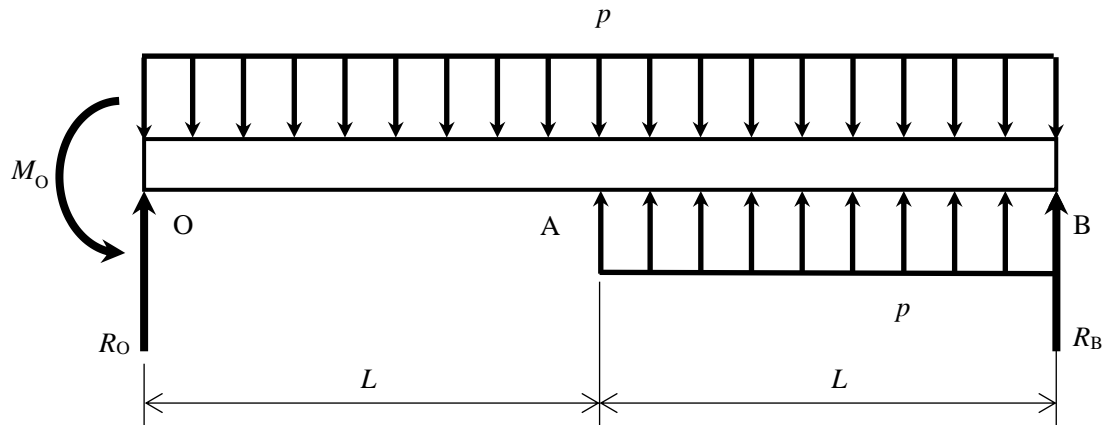


Fig. 2.2 FBD

上図よりはりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示すると以下のようになる.

$$M(x) = M_O \langle x \rangle^0 - R_O \langle x \rangle^1 + \frac{p}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{p}{2} \langle x - L \rangle^2 \quad (2.3)$$

(3) 壁からの反力 R_O , 反モーメント M_O , 点 B における反力 R_B をそれぞれ求めよ.

はりのたわみの基礎式に式(2.3)にて示した曲げモーメント $M(x)$ を代入すると,

$$-EIv'' = M_O \langle x \rangle^0 - R_O \langle x \rangle^1 + \frac{p}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{p}{2} \langle x - L \rangle^2 \quad (2.4)$$

のように表され, 両辺を積分すると,

$$\begin{aligned} -EIv' &= M_O \langle x \rangle^1 - \frac{R_O}{2} \langle x \rangle^2 + \frac{p}{6} \langle x \rangle^3 - \frac{p}{6} \langle x - L \rangle^3 + C_1 \\ v' &= -\frac{1}{EI} \left\{ M_O \langle x \rangle^1 - \frac{R_O}{2} \langle x \rangle^2 + \frac{p}{6} \langle x \rangle^3 - \frac{p}{6} \langle x - L \rangle^3 + C_1 \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
-EIv &= \frac{M_o}{2}\langle x \rangle^2 - \frac{R_o}{6}\langle x \rangle^3 + \frac{P}{24}\langle x \rangle^4 - \frac{P}{24}\langle x-L \rangle^4 + C_1x + C_2 \\
v &= -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{M_o}{2}\langle x \rangle^2 - \frac{R_o}{6}\langle x \rangle^3 + \frac{P}{24}\langle x \rangle^4 - \frac{P}{24}\langle x-L \rangle^4 + C_1x + C_2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

が得られる．ただし， C_1 ， C_2 は積分定数である．

ここで境界条件について考える．点 O は固定端なので境界条件は，

$$v(0) = v'(0) = 0 \tag{2.7}$$

であり，点 B は単純支持であるので境界条件は，

$$v(2L) = 0 \tag{2.8}$$

である．

式(2.5)，(2.6)に関して式(2.7)に示した境界条件より，

$$C_1 = C_2 = 0 \tag{2.9}$$

であるため，たわみ角 $v'(x)$ ，たわみ $v(x)$ は，

$$v' = -\frac{1}{EI} \left[M_o \langle x \rangle^1 - \frac{R_o}{2} \langle x \rangle^2 + \frac{P}{6} \langle x \rangle^3 - \frac{P}{6} \langle x-L \rangle^3 \right] \tag{2.10}$$

$$v = -\frac{1}{EI} \left[\frac{M_o}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{R_o}{6} \langle x \rangle^3 + \frac{P}{24} \langle x \rangle^4 - \frac{P}{24} \langle x-L \rangle^4 \right] \tag{2.11}$$

と表される．また，式(2.11)に対して式(2.8)に示した境界条件を考えると，

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{M_o}{2}(2L)^2 - \frac{R_o}{6}(2L)^3 + \frac{P}{24}(2L)^4 - \frac{P}{24}(L)^4 \\
&= 2M_oL^2 - \frac{4}{3}R_oL^3 + \frac{15}{24}PL^4 \\
&\therefore 48M_o - 32R_oL = -15PL^2
\end{aligned} \tag{2.12}$$

のように整理できる．ここで，式(2.1)，(2.2)を整理すると，

$$R_o + R_B = pL \quad (2.13)$$

$$M_o + 2R_B L = \frac{1}{2} pL^2 \quad (2.14)$$

のように表される．反力 R_o ，反力 R_B ，反モーメント M_o は式(2.12)，(2.13)，(2.14)を連立して求める．式(2.12)，式(2.14)より反モーメント M_o を消去すると，

$$32R_o + 96R_B = 39pL \quad (2.15)$$

が得られる．式(2.13)，式(2.15)より反力 R_B ， R_o は，

$$\begin{aligned} 64R_B &= 7pL \\ R_B &= \frac{7}{64} pL \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} R_o + \frac{7}{64} pL &= pL \\ R_o &= \frac{57}{64} pL \end{aligned} \quad (2.17)$$

と求められる．反モーメント M_o は式(2.14)，(2.16)より，

$$\begin{aligned} M_o + \frac{7}{32} pL^2 &= 2pL^2 \\ M_o &= \frac{9}{32} pL^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

と求められる．以上より，反力 R_o ， R_B ，反モーメント M_o をまとめると以下のようなになる．

$$\left\{ \begin{aligned} R_o &= \frac{57}{64} pL \\ R_B &= \frac{7}{64} pL \\ M_o &= \frac{9}{32} pL^2 \end{aligned} \right. \quad (2.19)$$

(4) 点 A におけるたわみ角 v'_A , たわみ v_A をそれぞれ求めよ.

式(2.10), (2.11)に式(2.19)を代入するとはりのたわみ角 $v'(x)$, たわみ $v(x)$ はそれぞれ以下のように表される.

$$v'(x) = -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{9pL^2}{32} \langle x \rangle^1 - \frac{57pL}{128} \langle x \rangle^2 + \frac{p}{6} \langle x \rangle^3 - \frac{p}{6} \langle x-L \rangle^3 \right\} \quad (2.20)$$

$$v(x) = -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{9pL^2}{64} \langle x \rangle^2 - \frac{57pL}{384} \langle x \rangle^3 + \frac{p}{24} \langle x \rangle^4 - \frac{p}{24} \langle x-L \rangle^4 \right\} \quad (2.21)$$

式(2.20), (2.21)に $x = L$ をそれぞれ代入することでたわみ角 v'_A , たわみ v_A は以下のように求められる.

$$\begin{aligned} v'_A &= -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{9pL^2}{32} \langle L \rangle^1 - \frac{57pL}{128} \langle L \rangle^2 + \frac{p}{6} \langle L \rangle^3 - \frac{p}{6} \langle L-L \rangle^3 \right\} \\ &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{9}{32} pL^3 - \frac{57}{128} pL^3 + \frac{1}{6} pL^3 \right) \\ &= -\frac{pL^3}{384EI} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} v_A &= -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{9pL^2}{64} \langle L \rangle^2 - \frac{57pL}{384} \langle L \rangle^3 + \frac{p}{24} \langle L \rangle^4 - \frac{p}{24} \langle L-L \rangle^4 \right\} \\ &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{9}{64} pL^4 - \frac{57}{384} pL^4 + \frac{1}{24} pL^4 \right) \\ &= -\frac{13pL^4}{384EI} \end{aligned} \quad (2.23)$$

～別解～

点 B における反力 R_B について重ね合わせの原理を用いて求める.

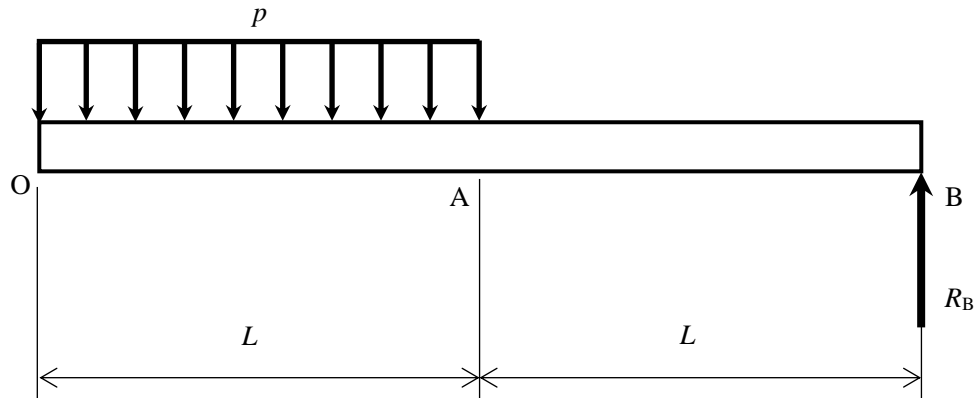


Fig. B はり全体の荷重.

下向きの分布荷重 p によって生じる点 B のたわみ v_{B1} は以下のように求められる.

$$v_{B1} = -\frac{pL^4}{8EI} - \frac{pL^3}{6EI} \cdot L = -\frac{7pL^4}{24EI} \quad (B1)$$

支点反力 R_B によって生じる点 B のたわみ v_{B2} は以下のように求められる.

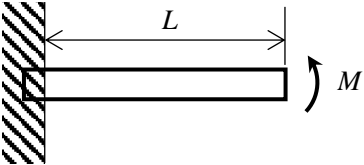
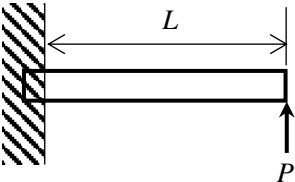
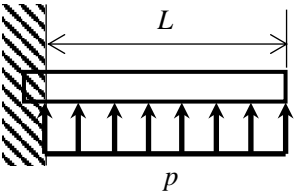
$$v_{B2} = \frac{R_B(2L)^3}{3EI} = \frac{8R_B L^3}{3EI} \quad (B2)$$

したがって, 点 B におけるたわみ v_B は重ね合わせの原理よりそれぞれ以下のように求められ, 境界条件 ($v_B = 0$) から R_B を求めることができる.

$$\begin{aligned} v_B = v_{B1} + v_{B2} &= -\frac{7pL^4}{24EI} + \frac{8R_B L^4}{3EI} = 0 \\ \therefore R_B &= \frac{7}{64} pL \end{aligned} \quad (B3)$$

となり特異関数に境界条件を代入して算出したときと一致する.

なお、たわみについては以下の関係を用いた（授業時とは点対称の図であるので正負には気を付ける）。

荷重形式	たわみ角 ν'	たわみ ν
	$\frac{ML}{EI}$	$\frac{ML^2}{2EI}$
	$\frac{PL^2}{2EI}$	$\frac{PL^3}{3EI}$
	$\frac{pL^3}{6EI}$	$\frac{pL^4}{8EI}$