材料の力学 1　Step 2　第 10 回演習問題（2021/6/29 実施）

[1]　一方の端 (点 O) で壁に固定された長さ $2L$ のはりに分布荷重 p が，点 A $(x = L)$ に集中荷重 P が負荷されている．はりの縦弾性係数を E，断面 2 次モーメントを I として以下の問いに答えよ．

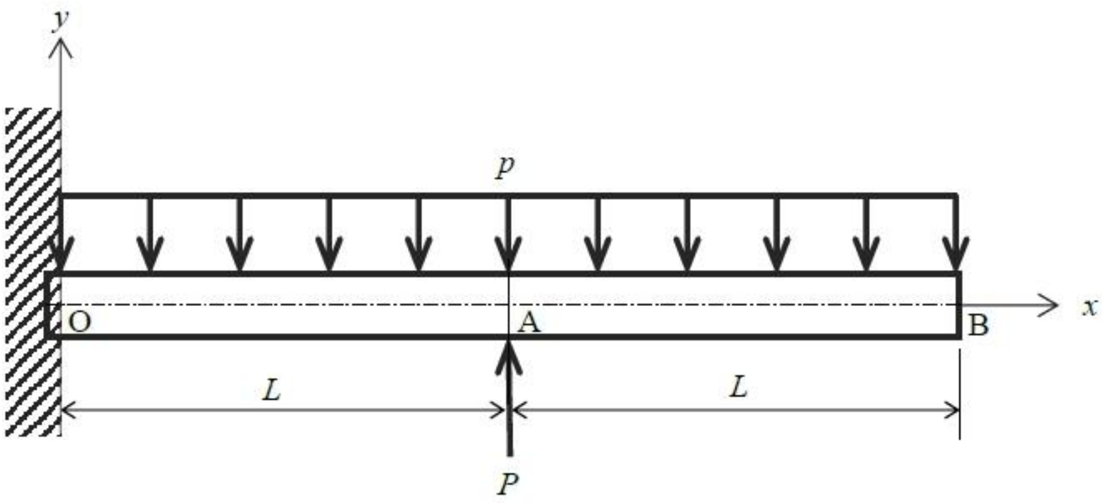


Fig.1 分布荷重を受けるはり．

(1)　はりの FBD を描き，点 O に作用する反力 R_O，反モーメント M_O を求めよ．

(2)　はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$ をそれぞれ求めよ．

(3)　はりのたわみ角 $v'(x)$ および，はりのたわみ $v(x)$ をそれぞれ求めよ．

(4)　はりの先端 (点 B) のたわみ角 v'_B，たわみ v_B をそれぞれ求めよ．

(1)　はりの FBD を描き，点 O に作用する反力 R_O，反モーメント M_O を求めよ．

はりの FBD は，次のように表される．

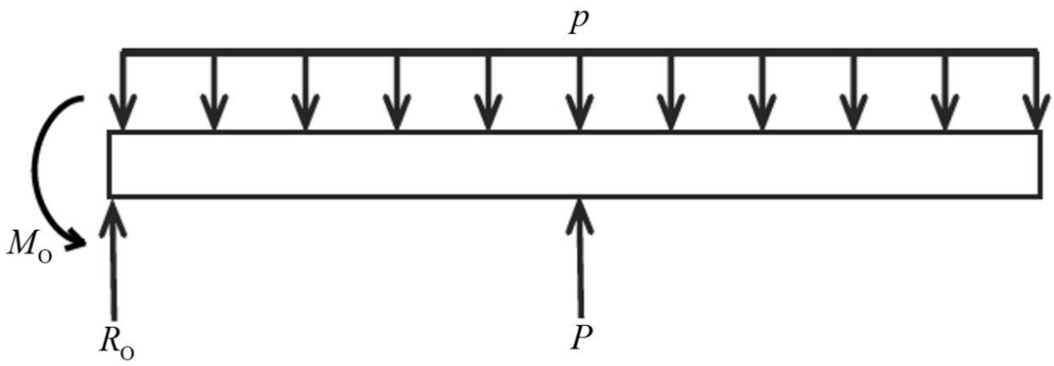


Fig.1.1 FBD.

力のつり合いより

$$
\begin{aligned}
&R_O + P - 2pL = 0 \\
&R_O = 2pL - P
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

点 O まわりの力のモーメントのつり合いより

$$
\begin{aligned}
&-M_O + \int_0^{2L} px dx - PL = 0 \\
&M_O = 2pL^2 - PL
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

(2)　はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$ をそれぞれ求めよ．

(i)　$0 \le x \le L$ のとき

はりの FBD は次のように表される．

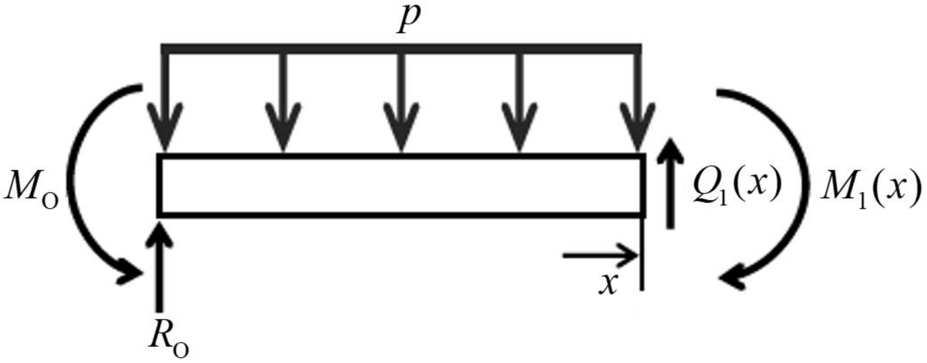


Fig. 1.2 FBD

力のつり合いより

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{O}} + Q_1(x) - px &= 0 \\
Q_1(x) &= px - R_0 \\
&= px + P - 2pL
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

x 点まわりのモーメントのつりあいより

$$
\begin{aligned}
-M_{\mathrm{O}} + R_{\mathrm{O}}x - \int_0^x pxdx + M_1(x) &= 0 \\
M_1(x) &= M_{\mathrm{O}} - R_{\mathrm{O}}x + \frac{1}{2}px^2 \\
&= \frac{1}{2}px^2 + (P - 2pL)x + (2pL^2 - PL)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

(ii)　$L \le x \le 2L$ のとき

はりの FBD は次のように表される．

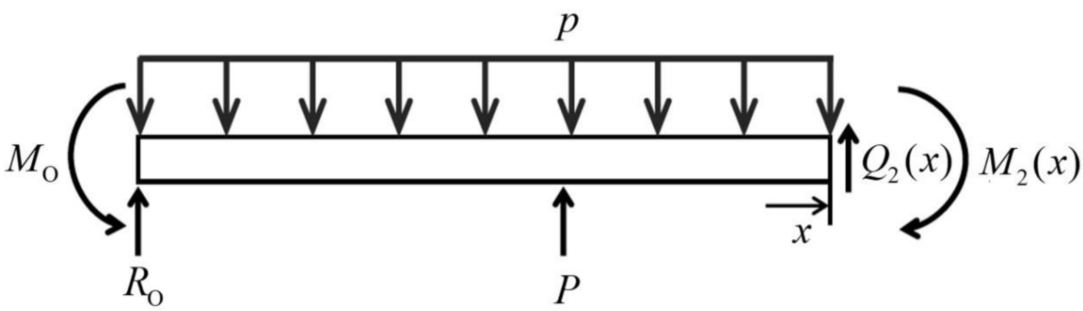


Fig. 1.3 FBD.

力のつり合いより

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{O}} + P + Q_2(x) - px &= 0 \\
Q_2(x) &= px - R_{\mathrm{O}} - P \\
&= px - 2pL
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

x 点まわりのモーメントのつり合いより

$$
\begin{aligned}
-M_{\mathrm{O}} + R_{\mathrm{O}}x + P(x-L) - \int_0^x pxdx + M_2(x) &= 0 \\
M_2(x) &= 2pL^2 - PL - x(2pL - P) - P(x-L) + \frac{1}{2}px^2 \\
&= \frac{1}{2}px^2 - 2pLx + 2pL^2
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

よって，はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$ は，

$$Q(x)=\begin{cases} P+p(x-2L) & (0\le x\le L) \\ p(x-2L) & (L\le x\le 2L) \end{cases} \tag{1.7}$$

$$M(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}px^2+(P-2pL)x+(2pL^2-PL) & (0\le x\le L) \\ \dfrac{1}{2}px^2-2pLx+2pL^2 & (L\le x\le 2L) \end{cases} \tag{1.8}$$

と表される．

(3)　はりのたわみ角$v'(x)$および，はりのたわみ$v(x)$をそれぞれ求めよ．

はりのたわみに関する基礎式は

$$-EIv''(x)=M(x) \tag{1.9}$$

と表される．

(i)　$0\le x\le L$のとき

式(1.9)に式(1.8)を代入すると，

$$-EIv_1''(x)=\frac{1}{2}px^2+(P-2pL)x+(2pL^2-PL) \tag{1.10}$$

$$v_1'(x)=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}px^3+\left(\frac{1}{2}P-pL\right)x^2+\left(2pL^2-PL\right)x+\mathrm{C}_1\right\} \tag{1.11}$$

$$v_1(x)=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{24}px^4+\left(\frac{1}{6}P-\frac{1}{3}pL\right)x^3+\left(pL^2-\frac{1}{2}PL\right)x^2+\mathrm{C}_1x+\mathrm{C}_2\right\} \tag{1.12}$$

(C_1, C_2:積分定数)

境界条件より，$v_1'(0)=v_1(0)=0$となるため，$\mathrm{C}_1=\mathrm{C}_2=0$となる．よって

$$v_1'(x)=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}px^3+\left(\frac{1}{2}P-pL\right)x^2+\left(2pL^2-PL\right)x\right\} \tag{1.13}$$

$$v_1(x)=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{24}px^4+\left(\frac{1}{6}P-\frac{1}{3}pL\right)x^3+\left(pL^2-\frac{1}{2}PL\right)x^2\right\} \tag{1.14}$$

と表される．

(ii) $L \le x \le 2L$ のとき

式(1.9)に式(1.8)を代入すると,

$$-EIv_2''(x) = \frac{1}{2}px^2 - 2pLx + 2pL^2 \tag{1.15}$$

$$v_2'(x) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}px^3 - pLx^2 + 2pL^2x + \mathrm{C}_3\right) \tag{1.16}$$

$$v_2(x) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}px^4 - \frac{1}{3}pLx^3 + pL^2x^2 + \mathrm{C}_3x + \mathrm{C}_4\right) \tag{1.17}$$

(C_3, C_4:積分定数)

$x = L$ のときのたわみ角 $v_1'(L) = v_2'(L)$ とたわみ $v_1(L) = v_2(L)$ の条件により, $\mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4$ を決定する.

$$v_1'(L) = v_2'(L) \tag{1.18}$$

$$-\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}pL^2 + \frac{7}{6}pL^3\right) = -\frac{1}{EI}\left(\mathrm{C}_3 + \frac{7}{6}pL^3\right) \tag{1.19}$$

$$\mathrm{C}_3 = -\frac{1}{2}PL^2 \tag{1.20}$$

$$v_1(L) = v_2(L) \tag{1.21}$$

$$-\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{3}PL^3 + \frac{17}{24}pL^4\right) = -\frac{1}{EI}\left(\mathrm{C}_4 - \frac{1}{2}PL^3 + \frac{17}{24}pL^4\right) \tag{1.22}$$

$$\mathrm{C}_4 = \frac{1}{6}PL^3 \tag{1.23}$$

よってたわみ角$v'(x)$とたわみ$v(x)$は，

$$v'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{EI}\left\{\dfrac{1}{6}px^3+\left(\dfrac{1}{2}P-pL\right)x^2+\left(2pL^2-PL\right)x\right\} & (0\le x\le L)\\ -\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{6}px^3-pLx^2+2pL^2x-\dfrac{1}{2}PL^2\right) & (L\le x\le 2L)\end{cases} \tag{1.24}$$

$$v(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{EI}\left\{\dfrac{1}{24}px^4+\left(\dfrac{1}{6}P-\dfrac{1}{3}pL\right)x^3+\left(pL^2-\dfrac{1}{2}PL\right)x^2\right\} & (0\le x\le L)\\ -\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{24}px^4-\dfrac{1}{3}pLx^3+pL^2x^2-\dfrac{1}{2}PL^2x+\dfrac{1}{6}PL^3\right) & (L\le x\le 2L)\end{cases} \tag{1.25}$$

と表される．

(4)　はりの先端(点 B)のたわみ角v'_{B}，たわみv_{B}をそれぞれ求めよ．

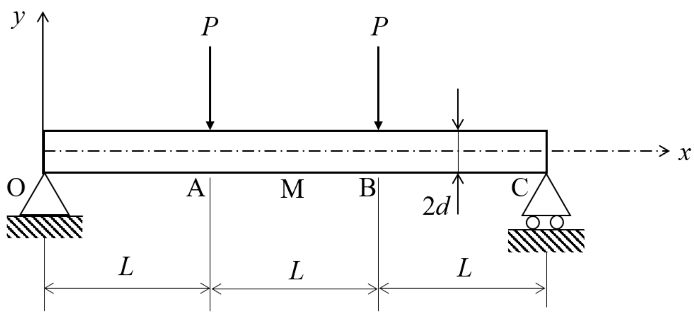
式(1.24)，式(1.25)に$x=2L$を代入すると，

$$v'_{\mathrm{B}}=v'(2L)=-\frac{1}{EI}\left(\frac{4}{3}pL^3-\frac{1}{2}PL^2\right) \tag{1.26}$$

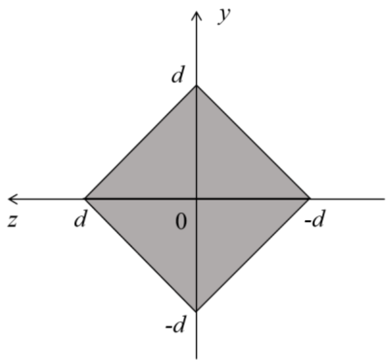
$$v_{\mathrm{B}}=v(2L)=-\frac{1}{EI}\left(2pL^4-\frac{5}{6}PL^3\right) \tag{1.27}$$

と表される．

[2] 図 2 に示すようなはりについて考える．両端（点 O，点 C）で単純支持されており，A 点, B 点には集中荷重 P が作用している. はり中央の原点から $3L/2$ の点を点 M とする. はりの断面は図 2(b)に示すようなひし形である．また，はりの弾性係数を E とする．このとき以下の問いに答えよ.



(a)



(b)

Fig. 2 両端単純支持のはり.

(1) このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ.

(2) 対称性に注意してはり全体のSFD，BMDを描け.

(3) 点Oでのたわみv_O，対称性に注意して点Mにおけるたわみ角v'_Mを求めよ.

(4) 点 M におけるたわみ v_M を求めよ.

(1) このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

はりの断面は z 軸に関して対称であるから，図 2.1 のように z 軸上部のみで考える．

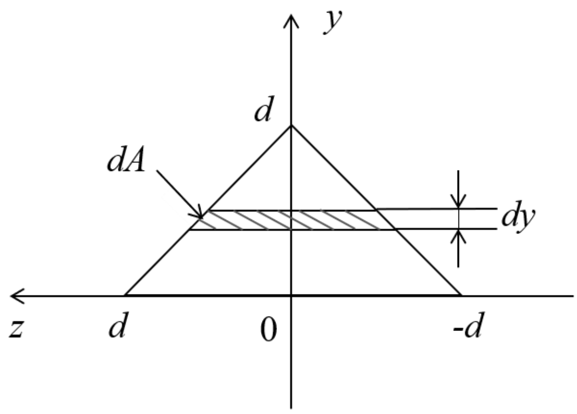


Fig. 2.1

図 2.1 の斜線部に示す微小台形の面積 dA を求めると

$$dA = 2d\,\frac{(d-y)}{d}\,dy = 2(d-y)dy \tag{2.1}$$

したがって，このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z は,

$$\begin{aligned} I_z &= 2\int_A y^2 dA \\ &= 2\int_0^d y^2 \times 2(d-y)dy \\ &= \frac{d^4}{3} \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2) 対称性に注意してはり全体のSFD，BMDを描け．

対称性を考慮すると点O における反力と点C における反力は等しいので反力を Ro と置くとはり全体の FBD は図 2.2 のようになる．

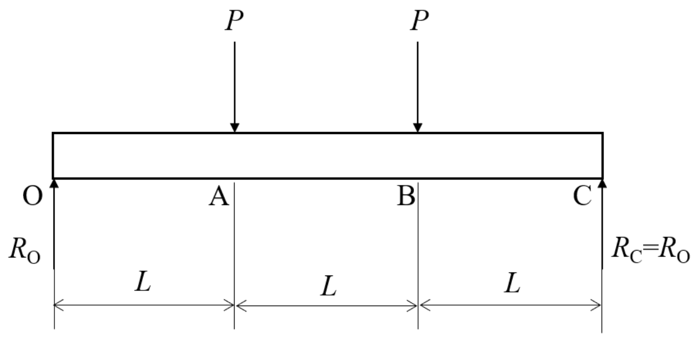


Fig. 2.2 FBD

力のつり合いより

$$2R_{\mathrm{O}} - 2P = 0$$
$$R_{\mathrm{O}} = P \tag{2.3}$$

対称性を考慮し，$0 \leqq x < 3L/2$ で FBD を考える．

(i) $0 \leqq x < L$ の時

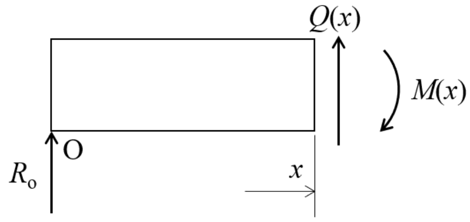


Fig. 2.3 FBD

せん断力 $Q(x)$は力のつり合いより

$$R_{\mathrm{O}} + Q(x) = 0$$
$$Q(x) = -P \tag{2.4}$$

曲げモーメント $M(x)$は x 点でのモーメントのつり合いより

$$R_{\mathrm{O}}\,x + M(x) = 0$$
$$M(x) = -Px \tag{2.5}$$

(ii) $L \leqq x < 3L/2$ の時

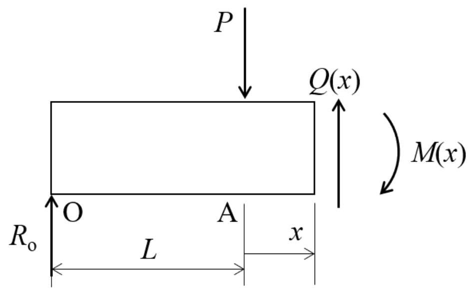


Fig. 2.4 FBD

せん断力 $Q(x)$は力のつり合いより

$$R_{\mathrm{O}} + Q(x) - P = 0$$
$$Q(x) = 0 \tag{2.6}$$

曲げモーメント $M(x)$は x 点でのモーメントのつり合いより

$$R_{\mathrm{O}}\,x + M(x) - P(x-L) = 0$$
$$M(x) = -PL \tag{2.7}$$

以上より SFD，BMD は以下のようになる．

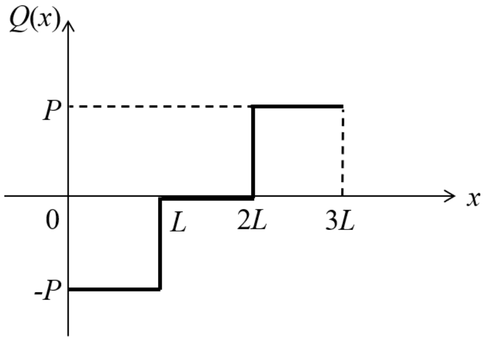


Fig. 2.5 SFD

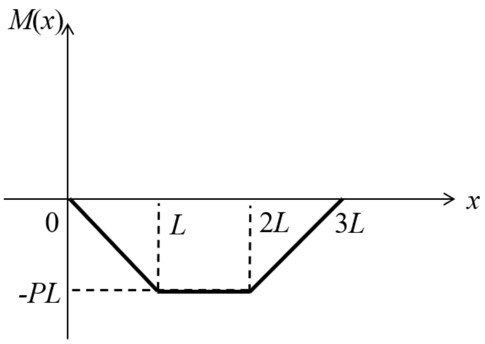


Fig. 2.6 BMD

(3) 点 O でのたわみ v_O，対称性に注意して点 M におけるたわみ角 v'_M を求めよ．

点 O では単純支持されているため，たわみ v_O は

$$v_O = 0 \tag{2.8}$$

点 M では対称性より，たわみ角 v'_M は

$$v'_M = 0 \tag{2.9}$$

(4) M 点におけるたわみ v_M を求めよ．

たわみは以下の式によって算出される．

$$-EIv''(x) = M(x) \tag{2.10}$$

まず，$0 \leqq x < L$ の範囲に関して考える．OA 間のたわみを $v_1(x)$ とすると式(2.10)より

$$-EIv_1''(x) = -Px \tag{2.11}$$

となる．これを積分して，

$$v_1'(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Px^2+C_1\right) \tag{2.12}$$

$$v_1(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Px^3+C_1x+C_2\right) \tag{2.13}$$

となる．

次に，$L \leqq x<3L/2$ の範囲に関して考える．AM 間のたわみを $v_2(x)$ とすると式(2.10)より

$$-EIv_2''(x)=-PL \tag{2.14}$$

となる．これを積分して，

$$v_2'(x)=\frac{1}{EI}\left(PLx+C_3\right) \tag{2.15}$$

$$v_2(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}PLx^2+C_3x+C_4\right) \tag{2.16}$$

となる．

(3)より，点 O でのたわみ v_O は 0 であることから，

$$v_1(0)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}P\cdot 0^3+C_1\cdot 0+C_2\right)=0$$
$$\therefore C_2=0 \tag{2.17}$$

一方で，点 M でもたわみ角は 0 であることから，

$$v_2'\left(\frac{3L}{2}\right)=\frac{1}{EI}\left(PL\cdot\frac{3L}{2}+C_3\right)=0$$
$$\therefore C_3=-\frac{3}{2}PL^2 \tag{2.18}$$

点 A での連続性を考慮すると， $v_1(L)=v_2(L), v'_1(L)=v'_2(L)$ であることから，

$$v_1'(L)=v_2'(L)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}PL^2+C_1\right)=\frac{1}{EI}\left(PL^2-\frac{3}{2}PL^2\right)$$
$$\therefore C_1=-PL^2 \tag{2.19}$$

$$v_1(L)=v_2(L)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}PL^3-PL^3\right)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}PL^3-\frac{3}{2}PL^3+C_4\right)$$
$$\therefore C_4=\frac{1}{6}PL^3 \tag{2.20}$$

したがって，OA 間のたわみ，AM 間のたわみはそれぞれ

$$v_1(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Px^3 - PL^2 x\right) \tag{2.21}$$

$$v_2(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}PLx^2 - \frac{3}{2}PL^2 x + \frac{1}{6}PL^3\right) \tag{2.22}$$

となる．

点 M でのたわみは，$x = 3L/2$ を代入して，

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{M}} &= v_2\left(\frac{3}{2}L\right) \\ &= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}PL\left(\frac{3}{2}L\right)^2 - \frac{3}{2}PL^2\left(\frac{3}{2}L\right) + \frac{1}{6}PL^3\right) \\ &= -\frac{23}{8}\frac{PL^3}{Ed^4} \end{aligned} \tag{2.23}$$