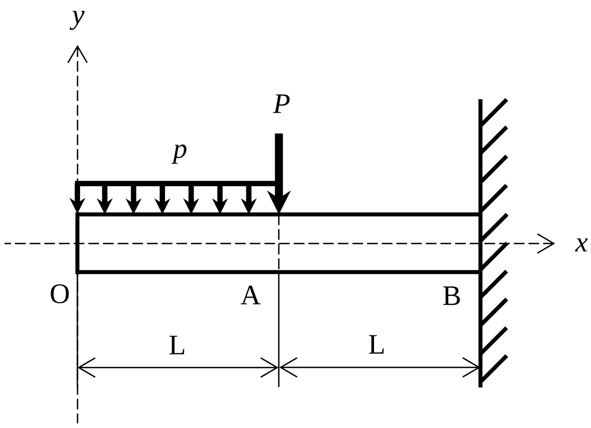
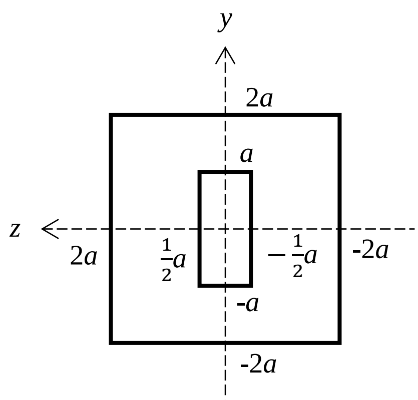
# 材料の力学 1　Step 2　第 9 回演習問題（2021/6/22 実施）

[1]　図 1(a)に示すような中空の片持ちはりに一様な分布荷重 $p$ と集中荷重 $P$ が作用している．はりの断面形状は図 1(b)のようになっている．このとき以下の問いに答えよ．




(a)




(b)

Fig. 1

(1)　このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント $I_z$ を求めよ．

(2)　はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 $R_0$ と反モーメント $M_0$ を求めよ．

(3)　位置 $x$ の仮想断面において，はりに作用するせん断力 $Q(x)$及び曲げモーメント $M(x)$を求めよ．

(4)　はりに生じる最大曲げ応力 $\sigma_{max}$ の大きさを求めよ．最大曲げ応力の算出には以下の式を用いよ．

$$\sigma_{max} = \left| \frac{M_{max}}{I_z} y \right|$$

**(1) このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント $I_z$ を求めよ.**

z 軸に関する断面 2 次モーメント $I_z$ は以下のように求められる.

$$I_z = \frac{4a\left(4a\right)^3}{12} - \frac{a\left(2a\right)^3}{12} = \frac{62}{3}a^4 \tag{1.1}$$

**(2) はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 $R_0$ と反モーメント $M_0$ を求めよ.**

はり全体の FBD を図 1.1 に示す.

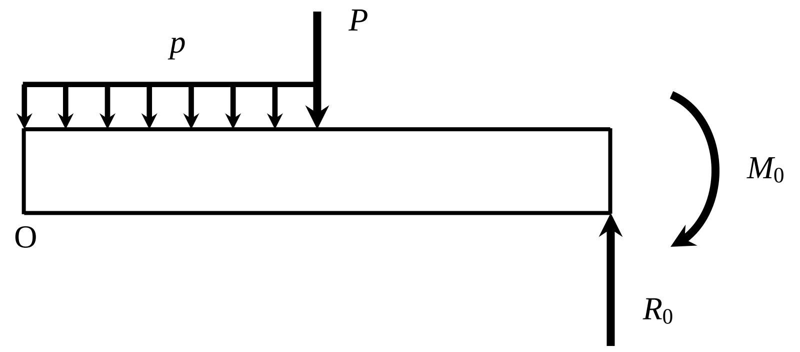



Fig. 1.1 はり全体の FBD.

力のつり合い式より,

$$\begin{gathered} -P - pL + R_0 = 0 \\ \therefore R_0 = P + pL \end{gathered} \tag{1.2}$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より,

$$\begin{gathered} \int_0^L pxdx + PL - 2R_0L + M_0 = 0 \\ \therefore M_0 = \frac{3}{2}pL^2 + PL \end{gathered} \tag{1.3}$$

**(3) 位置 $x$ の仮想断面において，はりに作用するせん断力 $Q(x)$ 及び曲げモーメント $M(x)$ を求めよ．**

(i) $0 \le x < L$ のとき

はりの FBD を図 1.2 に示す.

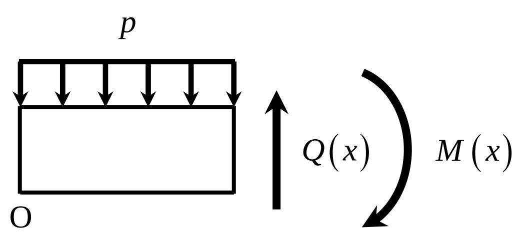



Fig. 1.2 はりの FBD ($0 \le x < L$).

力のつり合い式より,

$$Q(x) - px = 0$$
$$\therefore Q(x) = px \tag{1.4}$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より,

$$M(x) - Q(x) \cdot x + \int_0^x pxdx = 0$$
$$\therefore M(x) = \frac{1}{2}px^2 \tag{1.5}$$

(ii) $L < x \le 2L$ のとき

はりの FBD を図 1.3 に示す.

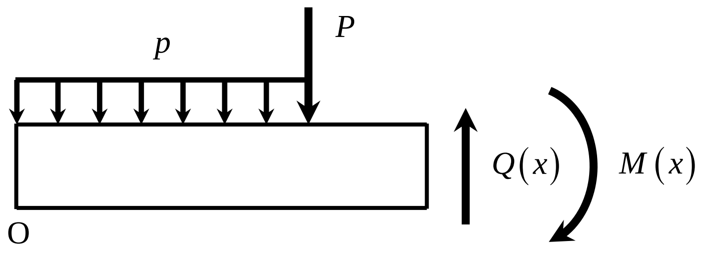



Fig. 1.3 はりの FBD ($L < x \le 2L$).

力のつり合い式より，

$$Q(x) - P - pL = 0$$
$$\therefore Q(x) = P + pL \tag{1.6}$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より，

$$M(x) - Q(x) \cdot x + PL + \int_0^L pxdx = 0$$
$$\therefore M(x) = (P + pL)x - \frac{1}{2}pL^2 - PL \tag{1.7}$$

**(4) はりに生じる最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ の大きさを求めよ．**

$x = 2L$ において最大曲げモーメント $M_{\max}$ が生じ，

$$M_{\max} = PL + \frac{3}{2}pL^2 \tag{1.8}$$

最大曲げ応力は図心から最も離れた点， $y = \pm 2a$ に生じるので，

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{\max}}{I_z} y \right| = \left| \frac{\left( PL + \frac{3}{2}pL^2 \right)}{\frac{62}{3}a^4} (\pm 2a) \right| = \frac{6PL + 9pL^2}{62a^3} \tag{1.9}$$

[2] 図 2(a)に示すような長さ 2$L$ の片持ちはりがある．B 点には長さ $\frac{L}{2}$ の剛体レバーが付いており，C 点と D 点にそれぞれ集中荷重 2$P$，$P$ が作用している．はりの断面形状は図 2(b)のようになっている．このとき以下の問いに答えよ．

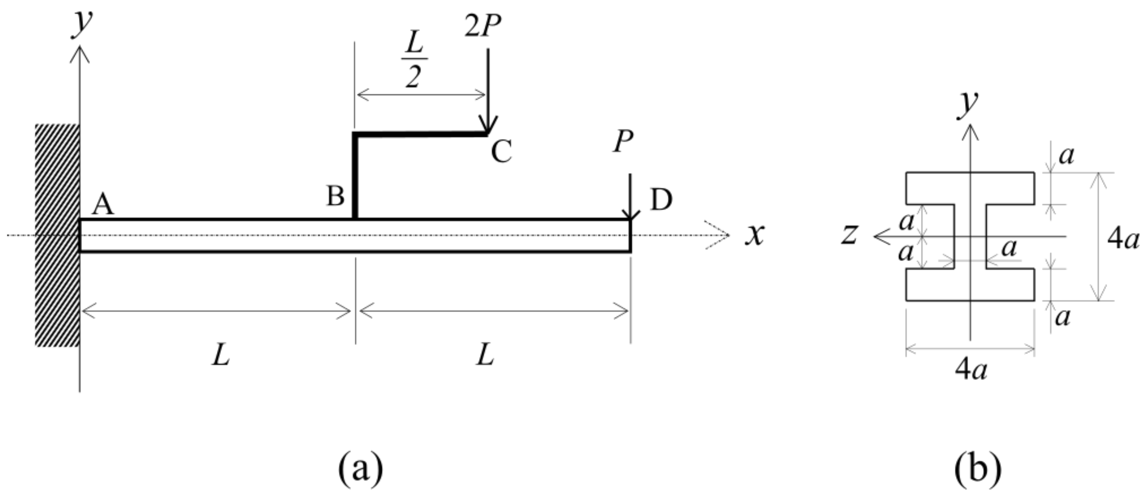



Fig. 2　片持ちはりとその断面形状

(1)　このはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント $I_z$ を求めよ．

(2)　剛体レバーの FBD を描き，B 点での反力 $R_B$ および反モーメント $M_B$ を求めよ．

(3)　はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 $R_A$，および反モーメント $M_A$ を求めよ．ただし，B 点に生じる力とモーメントを考慮せよ．

(4)　はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$を求め，SFD と BMD を描け．

(5)　$a$ = 5[mm]，$P$ =29[N]，$L$= 100[mm]のとき，はりに生じる最大曲げ応力 $\sigma_{max}$ を有効数字 3 桁で求めよ．

**(1)　このはりの $z$ 軸に関する断面 2 次モーメント $I_z$ を求めよ．**

幅 $b$，高さ $h$ の長方形断面の図心を $z$ 軸が通る場合，$z$ 軸に関する断面 2 次モーメントは次式で表される．

$$I_z = \frac{1}{12}bh^3 \tag{2.1}$$

よって，図 2(b)に示された図形を $z$ 軸との位置関係を保ちながら図 2.1 のように分解し，それぞれの断面二次モーメントを考えることにより $I_z$ は次式のように求まる．

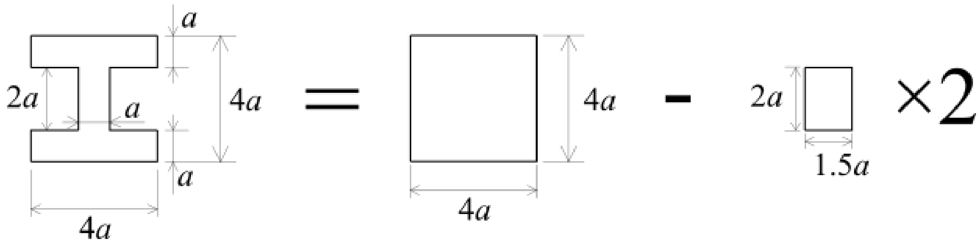



Fig. 2.1　長方形の組み合わせで表したはりの断面形状

$$I_z = \frac{1}{12}\times 4a\times(4a)^3 - \frac{1}{12}\times 1.5a\times(2a)^3\times 2 = \frac{58}{3}a^4 \tag{2.2}$$

**(2)　剛体レバーの FBD を描き，B 点での反力 $R_B$ および反モーメント $M_B$ を求めよ．**

図 2.2 に剛体レバーの FBD を示す．

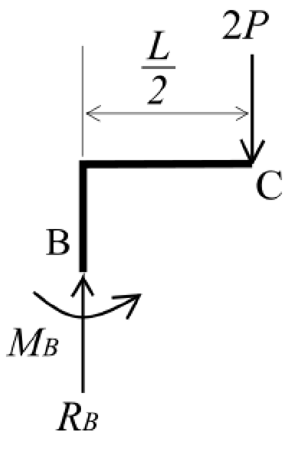



Fig. 2.2　剛体レバーの FBD

力のつりあいより

$$-R_B + 2P = 0 \qquad \therefore R_B = 2P \tag{2.3}$$

B 点まわりのモーメントのつりあいより

$$-M_B + 2P \times \frac{L}{2} = 0 \qquad \therefore M_B = PL \tag{2.4}$$

**(3)　はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 $\boldsymbol{R_A}$，および反モーメント $\boldsymbol{M_A}$ を求めよ．ただし，B 点に生じる力とモーメントを考慮せよ．**

図 2.3 にはり全体の FBD を示す.

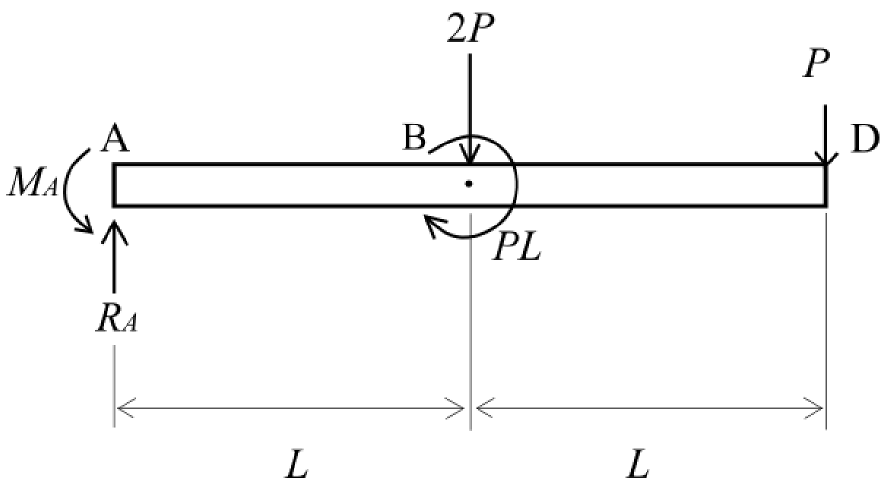



Fig. 2.3　はり全体の FBD

力のつりあいより

$$R_A - 2P - P = 0 \qquad \therefore R_A = 3P \tag{2.5}$$

A 点まわりのモーメントのつりあいより

$$M_A - PL - 2P \times L - P \times 2L = 0 \qquad \therefore M_A = 5PL \tag{2.6}$$

**(4)　はりに生じるせん断力 *Q(x)* と曲げモーメント *M(x)* を求め，SFD と BMD を描け．**

(i) $0 \leqq x \leqq L$

図 2.4 にはりの FBD を示す.

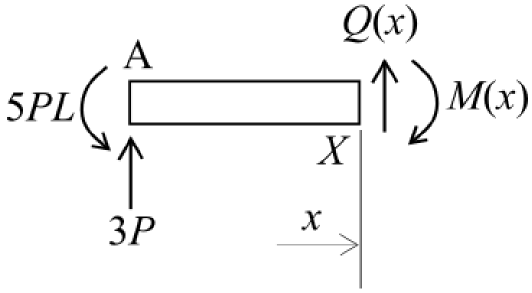



Fig. 2.4　FBD ( $0 \leqq x \leqq L$)

力のつりあいより

$$3P + Q(x) = 0 \qquad \therefore Q(x) = -3P \tag{2.7}$$

X 点まわりのモーメントのつりあいより

$$-5PL + 3P \times x + M(x) = 0 \qquad \therefore M(x) = 5PL - 3Px = -3P(x - \frac{5}{3}L) \tag{2.8}$$

(ii) $L \leqq x \leqq 2L$

図 2.5 にはりの FBD を示す.

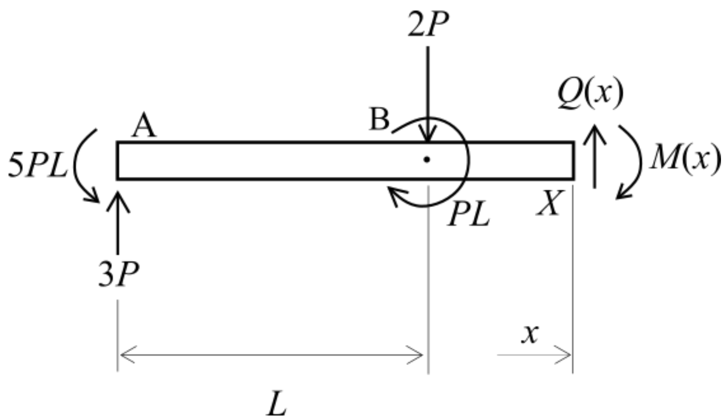



Fig. 2.5　FBD ( $L \leqq x \leqq 2L$ )

力のつりあいより

$$3P - 2P + Q(x) = 0 \qquad \therefore Q(x) = -P \tag{2.9}$$

X 点まわりのモーメントのつりあいより

$$\begin{aligned} &-5PL + 3P \times x + PL - 2P \times (x - L) + M(x) = 0 \\ &\therefore M(x) = 4PL - 3Px + 2P(x - L) = -P(x - 2L) \end{aligned} \tag{2.10}$$

よって，式(2.7)，(2.9)よりはりの SFD は図 2.6 のようになる．また，式(2.8)，(2.10) より BMD は図 2.7 のようになる．

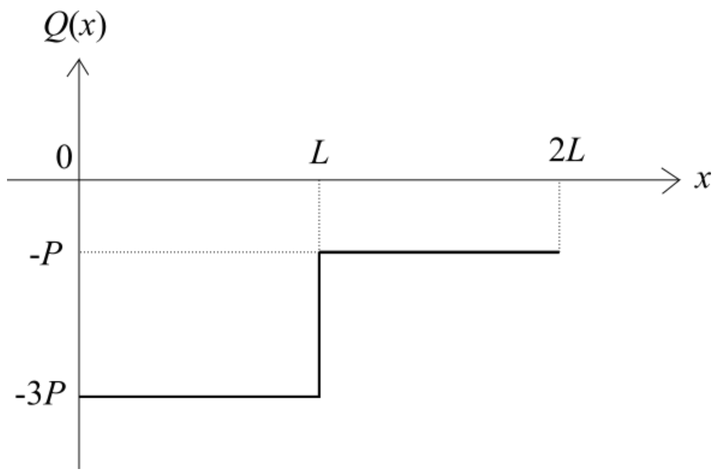



Fig 2.6　SFD

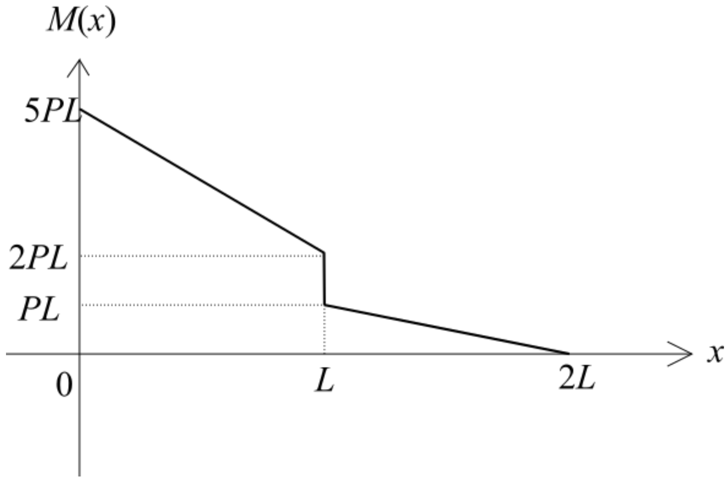



Fig. 2.7　BMD

**(5)　*a* = 5[mm]，*P* = 29[N]，*L* = 100[mm]のとき，はりに生じる最大曲げ応力 $\sigma_{max}$ を有効数字 3 桁で求めよ．**

はりに生じる曲げ応力は次式で表される．

$$\sigma = \frac{M(x)}{I_z} y \tag{2.13}$$

図 2.7 よりはりに生じる曲げモーメントは $x = 0$ で最大となり，曲げ応力ははりの表面 $y = \pm 2a$ で最大となるから，$\sigma_{max}$ は次のように求まる．

$$\sigma_{\max} = \left|\frac{M(0)}{I_z} y\right|_{y=y_{\max}} = \frac{3}{58a^4} \times 5PL \times 2a = \frac{3\times5\times29\times100\times2\times5}{58\times5^4} = 12.0 \quad \text{[MPa]} \tag{2.14}$$