材料の力学 1　Step 2　第 8 回演習問題（2021/6/15 実施）

[1]　図 1 に示すような構造の薄肉円筒が点 O で壁に固定されており，点 B においてトルク T が作用している．構造物の横弾性係数を G として以下の問いに答えよ．ただし，r>>t である．

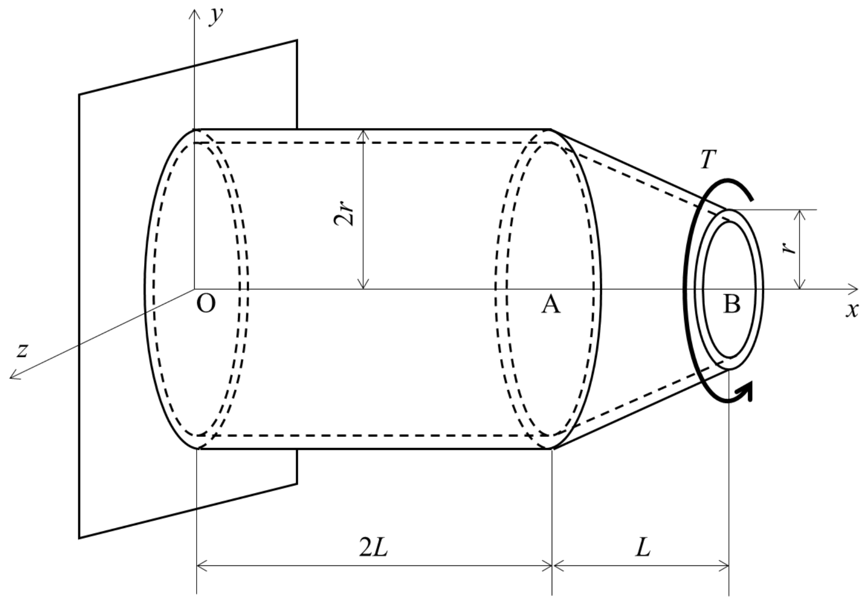

Fig.1.1 薄肉円筒

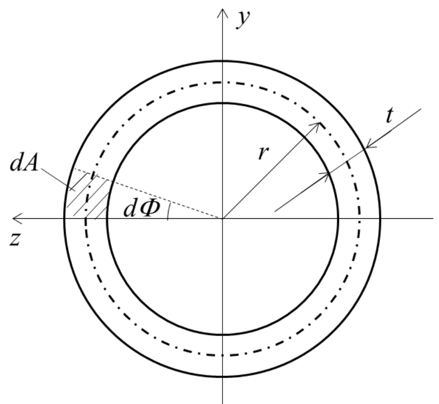

Fig.1.2 任意断面図

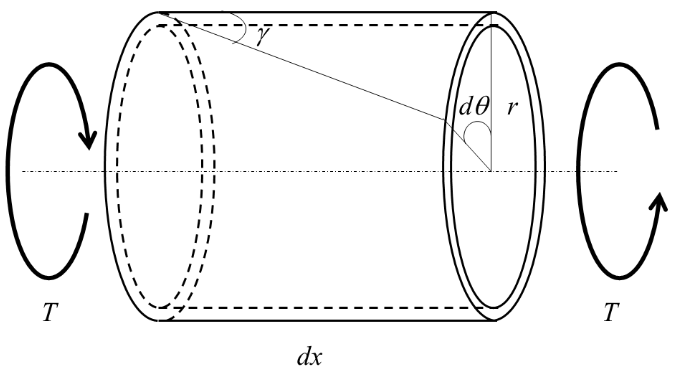

Fig.1.3 微小区間dx

(1) 図1.2に示すように，z軸と半径rのなす角を$d\Phi$としたとき，斜線部の面積dAを式で表せ．また，求めたdAを用いて断面2次極モーメントI_pを求めよ．

(2) (1)の結果を利用して図1.1における断面2次極モーメントI_p のx方向分布を図示せよ．

(3) 図1.1における部材表面のせん断応力τのx方向分布を図示せよ．

(4) 図1.3のような微小区間dxにおけるねじれ角$d\theta$ をG，T，I_p，dx を用いて答えよ．

(5) 点 O から見た点 B のねじれ角φ_{OB}を求めよ．

(1) 図1.2に示すように，z軸と半径rのなす角を$d\Phi$としたとき，斜線部の面積dAを式で表せ．また，求めたdAを用いて断面2次極モーメントI_pを求めよ．

図 1.2 における斜線部の面積 A は

$$dA=rtd\Phi \tag{1.1}$$

したがって，断面 2 次極モーメント I_p は，

$$I_p=\int_A r^2dA=\int_0^{2\pi} r^2\cdot rtd\Phi=2\pi r^3 t \tag{1.2}$$

(2) (1)の結果を利用して図 1.1 における断面 2 次極モーメント I_p の x 方向分布を図示せよ．

(i)$0\leq x\leq 2L$の場合

外半径は一定なので，

$$I_p(x)=2\pi t\cdot(2r)^3=16\pi r^3 t \tag{1.3}$$

(ii)$2L\leq x\leq 3L$の場合

外半径を $r(x)$とすると，

$$r(x)=r(4-\frac{x}{L}) \tag{1.4}$$

よって，

$$I_p(x)=2\pi t\cdot r^3(4-\frac{x}{L})^3=2\pi r^3 t(4-\frac{x}{L})^3 \tag{1.5}$$

以上より，断面 2 次極モーメント I_p の x 方向分布は以下のようになる．

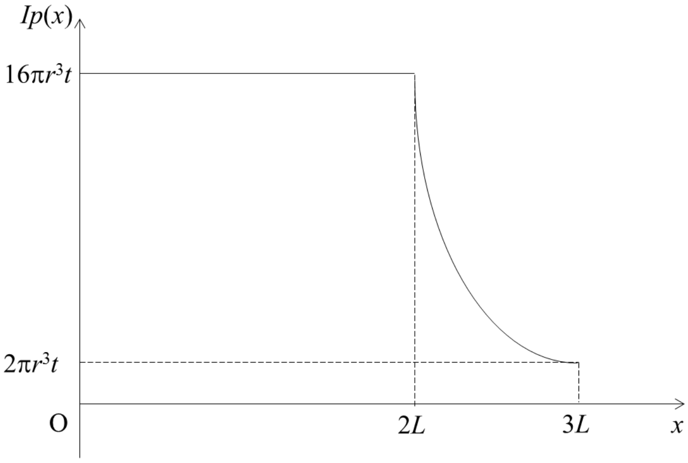

Fig.1.4 断面 2 次極モーメント I_p の x 方向分布

(3) 図1.1における部材表面のせん断応力τのx方向分布を図示せよ.

せん断応力は以下の式で与えられる.

$$\tau = \frac{T}{I_p} r = \frac{T}{2\pi t\{r(x)\}^2} \tag{1.6}$$

(i)$0 \leq x \leq 2L$の場合

$$\tau(x) = \frac{T}{8\pi r^2 t} \tag{1.7}$$

(ii)$2L \leq x \leq 3L$の場合

$$\tau(x) = \frac{T}{2\pi t\{r(4-\frac{x}{L})\}^2} \tag{1.8}$$

以上より，せん断応力の x 方向分布は以下のようになる.

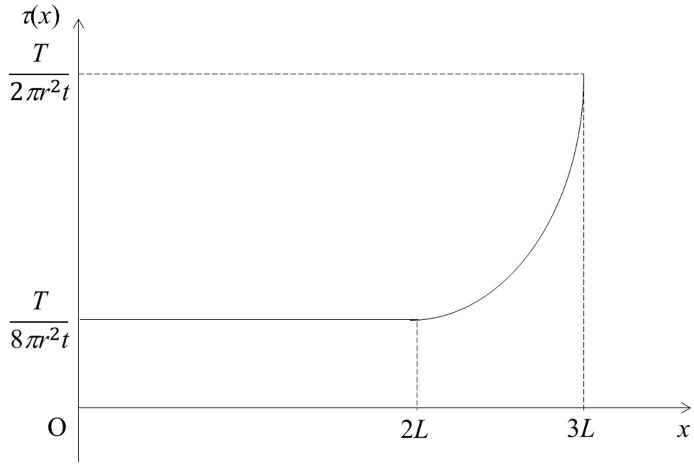

Fig.1.5 せん断応力τの x 方向分布

(4) 図1.3のような微小区間dxにおけるねじれ角$d\theta$ をG，T，I_p，dx を用いて答えよ.

図 1.3 より，

$$d\theta = \gamma\frac{dx}{r} = \frac{\tau}{G}\cdot\frac{dx}{r} = \frac{T}{GI_p}dx \tag{1.9}$$

(5)点 O から見た点 B のねじれ角φ_{OB}を求めよ.

OA 間，AB 間のねじれ角をφ_{OA}，　φ_{AB}とすると

$$\varphi_{\mathrm{OA}} = \frac{T}{G\cdot 16\pi r^3 t}\cdot 2L = \frac{TL}{8G\pi r^3 t} \tag{1.10}$$

$$\varphi_{\mathrm{AB}} = \int_{2L}^{3L}\frac{T}{G}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{2\pi r^3 t(4-\frac{x}{L})^3} = \frac{3TL}{16G\pi r^3 t} \tag{1.11}$$

以上より，

$$\varphi_{OB} = \varphi_{\mathrm{OA}} + \varphi_{\mathrm{AB}} = \frac{5TL}{16G\pi r^3 t} \tag{1.12}$$

[2] 図2 に示すように，直径$2d$, dの円筒が剛体円盤Cで接合され，それぞれ他の端は剛体壁A, Bに固定されている．剛体円盤CにはねじりモーメントTが作用している．円筒の横弾性係数をG, 点A及び点Bにおける反モーメントをそれぞれM_A, M_Bとして以下の設問に答えよ．

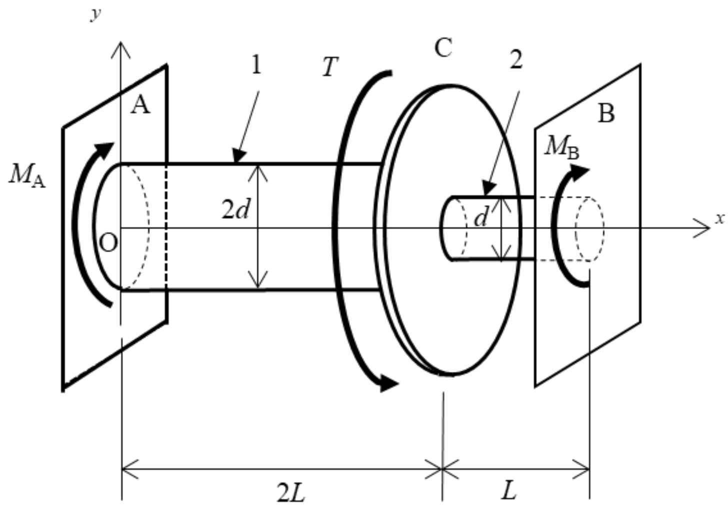

Fig. 2 円筒部材

(1) 円筒1, 2の断面二次極モーメントI_1, I_2をそれぞれ求めよ．

(2) AC間，CB間で円筒に生じるねじれ角φ_{AC}, φ_{CB}を点A及び点Bにおける反モーメントM_A, M_Bを用いて表せ.

(3) 反モーメントM_A，M_BをTを用いて表せ.

(1) 円筒1, 2の断面二次極モーメント$\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$をそれぞれ求めよ.

円筒1, 2の断面二次極モーメントI_1, I_2は以下のように求められる.

$$I_1 = \int r^2 dA = 2\pi \int_0^d r^3 dr = \frac{1}{2}\pi d^4 \tag{2.1}$$

$$I_2 = \int r^2 dA = 2\pi \int_0^{d/2} r^3 dr = \frac{1}{32}\pi d^4 \tag{2.2}$$

(2) AC間，CB間で円筒に生じるねじれ角$\boldsymbol{\varphi_{AC}}$, $\boldsymbol{\varphi_{CB}}$を点A及び点Bにおける反モーメント$\boldsymbol{M_A}$, $\boldsymbol{M_B}$を用いて表せ.

全体のFBDは図2.1のようになる.

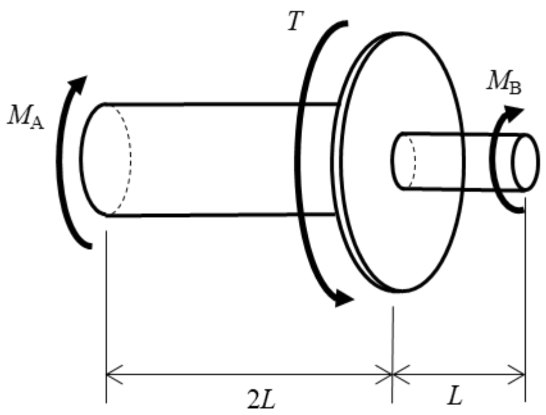

Fig. 2.1 全体のFBD

モーメントのつりあい式より,

$$T - M_A - M_B = 0 \tag{2.3}$$

原点からの距離xにおけるねじりモーメント$M(x)$は以下のように計算することができる.

(i) $0 \le x \le 2L$ のとき

FBDは図2.2のように表せる.

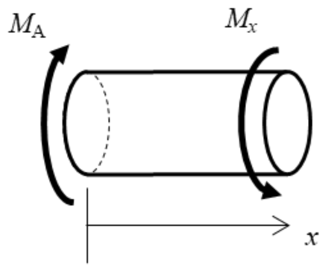

Fig. 2.2 FBD ($0 \le x \le 2L$)

モーメントのつり合いより，

$$M(x) - M_A = 0$$
$$M(x) = M_A \tag{2.4}$$

(ii) $2L \le x \le 3L$ のとき
FBDは図2.3のように表せる．

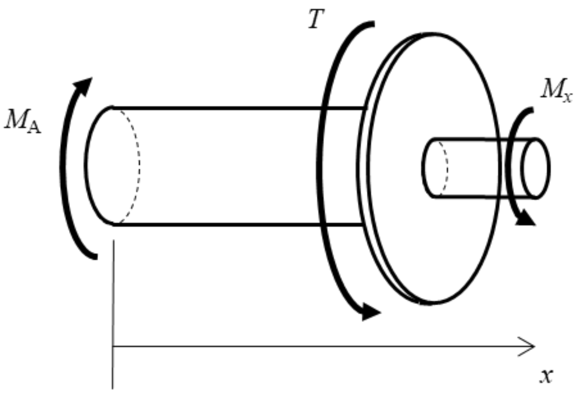

Fig. 2.3 FBD ($2L \le x \le 3L$)

モーメントのつり合いより，

$$-M_A + T + M(x) = 0$$
$$M(x) = M_A - T \tag{2.5}$$

一般に，ねじり角φはねじりモーメントM，部材の長さl，横弾性係数G，断面二次極モーメントI_{p}を用いて以下の式により表される．

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_{\mathrm{p}}} \tag{2.6}$$

以上により，式2.1, 2.2, 2.4, 2.5を式2.6に代入すると，ねじり角φ_{AC}, φ_{CB}は以下のように求まる．

$$\varphi_{\mathrm{AC}} = \frac{M(x)\cdot 2L}{GI_1} = \frac{4M_{\mathrm{A}}L}{\pi G d^4} \tag{2.7}$$

$$\varphi_{\mathrm{CB}} = \frac{M(x)\cdot L}{GI_2} = \frac{32(M_{\mathrm{A}} - T)L}{\pi G d^4} \tag{2.8}$$

(3) 反モーメントM_{A}，M_{B}をTを用いて表せ．

両端が壁により固定されているため，部材全体でのねじれ角は0となる．これによりねじれ角について以下の条件が成り立つ．

$$\varphi_{\mathrm{AC}} + \varphi_{\mathrm{CB}} = 0 \tag{2.9}$$

式2.9に式2.7, 2.8を代入すると，

$$\frac{4M_{\mathrm{A}}L}{\pi G d^4} + \frac{32(M_{\mathrm{A}} - T)L}{\pi G d^4} = 0 \tag{2.10}$$

これをM_{A}について整理すると

$$M_{\mathrm{A}} = \frac{8}{9}T \tag{2.11}$$

と求まる．よって，式2.3に代入すると，

$$M_B = \frac{1}{9}T \tag{2.12}$$

と求まる.