材料の力学 1　Step 2　第 7 回演習問題（2021/6/8 実施）

[1]　図 1 に示すように，右端に半径 $2r$ の剛体円盤が取り付けられた段付きの丸棒部材が点 O で壁に固定されている．剛体円盤には外力 $2P$ が対称かつ z 軸に，外力 P が対称かつ y 軸にそれぞれ平行に作用している．このとき以下の問いに答えよ．ただし，丸棒部材の横弾性係数は G とする．

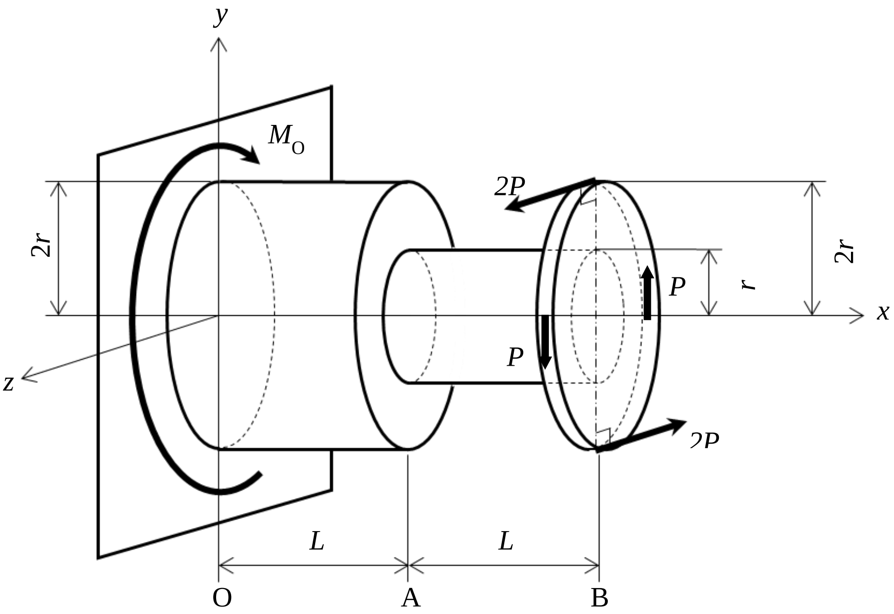

Fig. 1　剛体円盤が取り付けられた段付き丸棒部材.

(1)　段付き丸棒部材について，半径 $2r$ の部分の断面二次極モーメント I_{p1}，半径 r の部分の断面二次極モーメント I_{p2} を求めよ．

(2)　壁からの反モーメント M_O を求めよ．

(3)　OB 間に生じるねじれ角 φ_{OB} を求めよ．

(4)　AB の中点($x = 3L/2$)におけるせん断応力 τ_{max} を求めよ．

(1) 段付き丸棒部材について，半径 $2r$ の部分の断面二次極モーメント I_{p1}，半径 r の部分の断面二次極モーメント I_{p2} をそれぞれ求めよ．

半径ρの丸棒部材において断面二次極モーメント I_p は

$$I_p = \int_A r^2 dA \tag{1.1}$$

と表せる．ここで，微小面積 dA は次のようになる．

$$dA = 2\pi r dr \tag{1.2}$$

したがって，断面二次極モーメント I_p は

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A r^2 dA \\ &= \int_0^{\rho} 2\pi r^3 \, dr \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho^4 \end{aligned} \tag{1.3}$$

と表される．よって，半径 $2r$ の部分の断面二次極モーメント I_{p1}，半径 r の部分の断面二次極モーメント I_{p2} は

$$\begin{aligned} I_{p1} &= \frac{1}{2}\pi\rho^4 \\ &= \frac{1}{2}\pi\times(2r)^4 \\ &= 8\pi r^4 \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} I_{p2} &= \frac{1}{2}\pi\rho^4 \\ &= \frac{1}{2}\pi\times(r)^4 \\ &= \frac{1}{2}\pi r^4 \end{aligned} \tag{1.5}$$

と求められる．

(2)　壁からの反モーメント M_O を求めよ.

　外力 P によるモーメント M は

$$M=2\times(2P+P)\times 2r=12Pr \tag{1.6}$$

より，部材全体の FBD は以下のようになる.

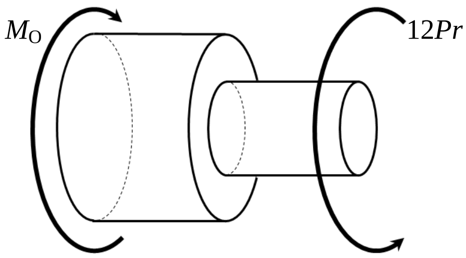

Fig. 1.1 部材全体の FBD.

モーメントのつり合い式より

$$-M_O+12Pr=0 \tag{1.7}$$

が成り立つ．よって，壁からの反モーメント M_O は

$$M_O=12Pr \tag{1.8}$$

となる.

(3)　OB 間に生じるねじれ角 φ_{OB} を求めよ.

　ねじれ角 φ_{OB} は次のように求められる.

$$\begin{aligned}\varphi_{OB}&=\varphi_{OA}+\varphi_{AB}\\ &=\int_0^L \theta_1(x)dx+\int_L^{2L}\theta_2(x)dx\\ &=\int_0^L \frac{M(x)}{GI_{p1}}dx+\int_L^{2L}\frac{M(x)}{GI_{p2}}dx\end{aligned} \tag{1.9}$$

ただし，θは単位長さあたりのねじれ角（比ねじれ角），$M(x)$ は位置 x の仮想断面におけるねじりモーメントを表す．ここで，ねじりモーメント $M(x)$ を求める．図 1.2 のようにFBD を描くとモーメントのつり合い式は

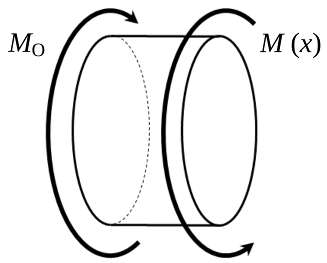

Fig. 1.2 FBD.

$$-M_O+M(x)=0 \tag{1.10}$$

となり，式 (1.8) を踏まえると

$$M(x)=M_O=12Pr \tag{1.11}$$

と得られる．よって，式 (1.9) に式 (1.4), (1.5), (1.11) を代入することでねじれ角φ_{OB}は

$$\begin{aligned}\varphi_{OB}&=\int_0^L \frac{M(x)}{GI_{p1}}dx+\int_L^{2L}\frac{M(x)}{GI_{p2}}dx\\&=\int_0^L \frac{12Pr}{8\pi Gr^4}dx+\int_L^{2L}\frac{12Pr}{\frac{1}{2}\pi Gr^4}dx\\&=\frac{3P}{2\pi Gr^3}[x]_0^L+\frac{24P}{\pi Gr^3}[x]_0^L\\&=\frac{51PL}{2\pi Gr^3}\end{aligned} \tag{1.12}$$

と求められる．

(4)　AB の中点(x = 3L/2)における最大せん断応力τ_{max}を求めよ．

位置 x において，せん断応力は表面で最大となる．位置 x での中心軸から距離ρ離れた最大せん断応力$\tau_{max}(x)$ は

$$\tau_{max}(x)=G\rho\theta(x) \tag{1.13}$$

$$= \frac{M(x)}{I_\mathrm{p}}\rho$$

となる．

よって，$x = 3L/2$ におけるせん断応力 $\tau_{\max}$ は式 (1.5), (1.11) を代入すると

$$\begin{aligned} \tau_{\max}(x) &= \frac{12Pr}{\frac{1}{2}\pi r^4} r \\ &= \frac{24P}{\pi r^2} \end{aligned} \tag{1.14}$$

と求められる．

[2]　図 2 に示すように点 O において壁に固定された丸棒部材がある．丸棒の OA 間には分布トルク q が, 点 B(x=2L)にはねじりモーメント T が作用している. 横弾性係数を G, 点 O における反モーメントを M_O として以下の設問に答えよ．ただし，ねじりモーメントは x 軸に対して右ねじの方向を正方向として答えよ．

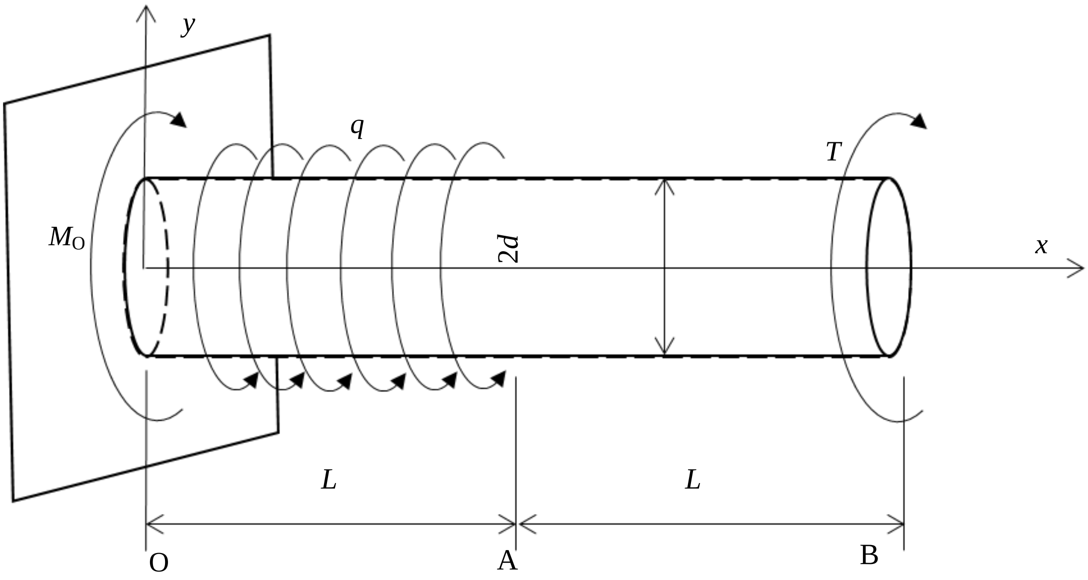

Fig.2 丸棒部材

(1) ねじり剛性GI_Pを求めよ．

(2) FBDを描き，M_Oを求めよ．

(3) ねじりモーメントMのx方向分布を描け．ただし，$qL>T>0$とする．

(4) OB間に生じるねじれ角φ_{OB}を求めよ．

(5) (4)で求めたねじれ角φ_{OB}が$\varphi_{OB}=0$である時，Tをq，Lを用いて表せ．

※ねじれ角　$\varphi=\int\frac{M}{GI_P}dx$

(1) ねじり剛性GI_Pを求めよ．

まず，断面2次極モーメントI_Pを求める．

$$I_p = \int r^2 dA = 2\pi \int_0^d r^3 dr = \frac{1}{2}\pi d^4 \tag{2.1}$$

したがって，各部材のねじり剛性は

$$GI_p = \frac{1}{2}\pi G d^4 \tag{2.2}$$

(2) FBDを描き，M_Oを求めよ．

FBDは以下のようになる．

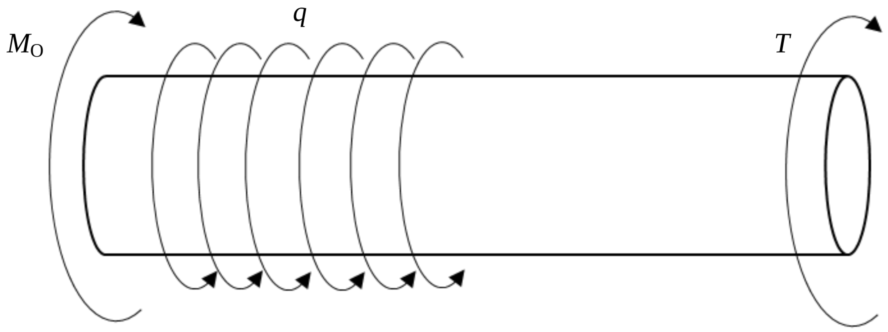

Fig.2.1 FBD

モーメントのつりあい式より，M_OとM_Dの関係は

$$\begin{aligned} -M_O + qL - T = 0 \\ \therefore M_O = qL - T \end{aligned} \tag{2.3}$$

(3) ねじりモーメントMのx方向分布を描け．ただし，$qL > T > 0$とする．

仮想断面におけるねじりモーメント$M(x)$を求める．

(i) $0 \le x \le L$ のとき

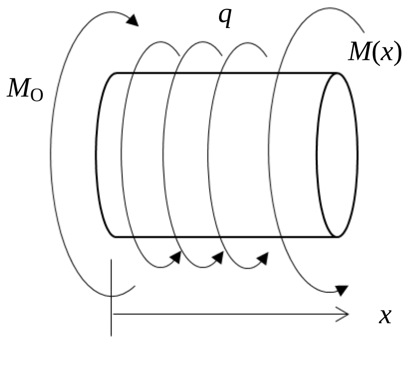

Fig.2.2 仮想断面($0 \le x \le L$)

図2.2より，モーメントのつりあい式は以下のようになる.

$$\begin{aligned} -M_O + qx + M(x) &= 0 \\ \therefore M(x) &= -qx + M_O \\ &= -q(x-L) - T \end{aligned} \tag{2.4}$$

(ii) $L \le x \le 2L$ のとき

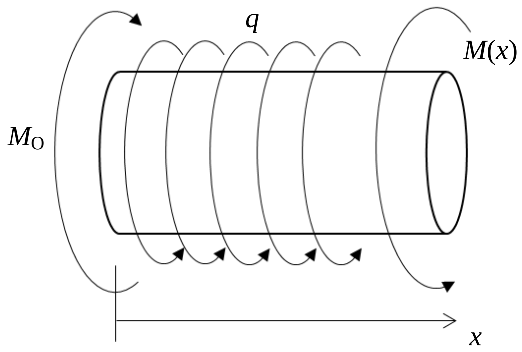

Fig.2.3 仮想断面($L \le x \le 2L$)

図2.3より，モーメントのつりあい式は以下のようになる.

$$\begin{aligned} -M_O + qL + M(x) &= 0 \\ \therefore M(x) &= -T \end{aligned} \tag{2.5}$$

以上の結果より

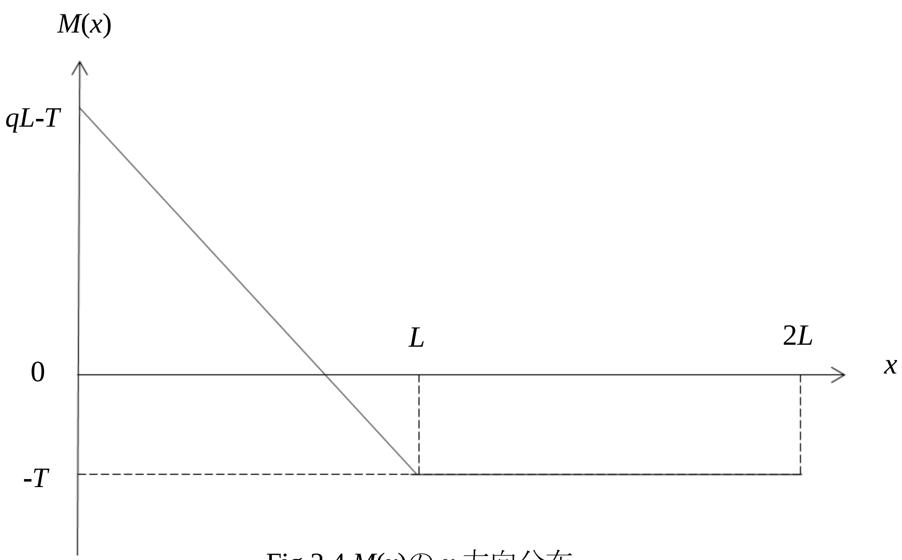

Fig.2.4 $M(x)$の x 方向分布

(4) OB間に生じるねじれ角φ_{OB}を求めよ.

OB間に生じるねじれ角φ_{OB}は以下のように求まる.

$$\begin{aligned}\varphi_{OB} &= \int_0^{2L} \frac{M}{GI_P}dx \\ &= +\int_0^{L} \frac{-q(x-L)-T}{GI_P}dx + \int_L^{2L} \frac{-T}{GI_P}dx \\ &= \frac{L}{\pi G d^4}(qL-4T)\end{aligned} \tag{2.6}$$

(5) (4)で求めたねじれ角φ_{OB}が$\varphi_{OB}=0$である時，$\boldsymbol{T}$を$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{L}$を用いて表せ.

$$\begin{aligned}\varphi_{OB} &= 0 \\ qL-4T &= 0 \\ \therefore T &= \frac{1}{4}qL\end{aligned} \tag{2.7}$$