材料の力学 1　Step 1　第 6 回演習問題（2021/5/25 実施）

[1]　平面応力状態にある十分に薄い弾性体において，図 1 のように x-y 座標系から反時計回りに 60°傾いた n-t 座標系に沿う正方形微小要素を考える．薄い弾性体に対して x 方向に引張応力 5σ，y 方向に圧縮応力 9σ が作用している．弾性体の縦弾性係数を E，横弾性係数を G，ポアソン比を ν として，以下の設問に答えよ．

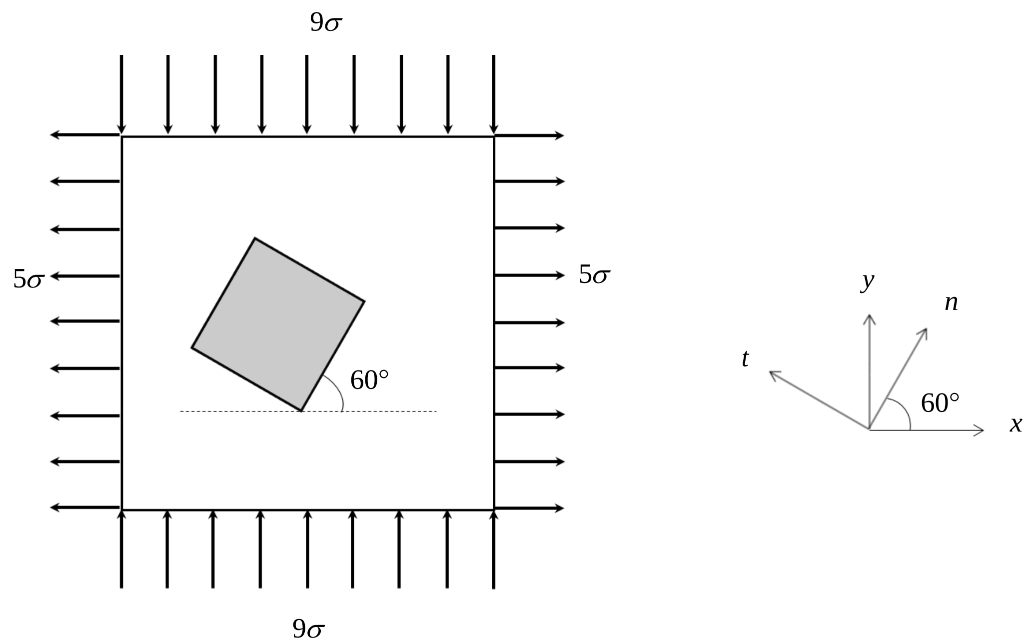

Fig. 1 平面応力状態にある弾性体.

(1)　x-y 座標系における応力テンソルからモールの応力円を描き, その中心と半径を求めよ.

(2)　(1)で描いたモールの応力円より，n-t 座標系における応力テンソル$[\sigma_{ij}]$を求めよ.

(3)　x，y 方向のひずみ ε_x，ε_y とせん断ひずみ γ_{xy} をそれぞれ σ，E，ν を用いて表せ.

(4)　x-y 座標系におけるひずみテンソルからモールのひずみ円を描き，その中心と半径を求めよ.

(5)　(4)で描いたモールのひずみ円より，n-t 座標系におけるひずみテンソル$[\varepsilon_{ij}]$を求めよ.

(6)　n-t 座標系におけるせん断応力 τ_{nt} とせん断ひずみ γ_{nt} の関係を踏まえ, 横弾性係数 G を E, ν を用いて表せ.

[1]

(1)　*x*-*y* 座標系における応力テンソルからモールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

図から，*x*-*y* 座標系における応力テンソル$[\sigma_{ij}]$は次式で表される．

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\sigma & 0\\ 0 & -9\sigma\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

よって，モールの応力円は図 1.1 のようになる．

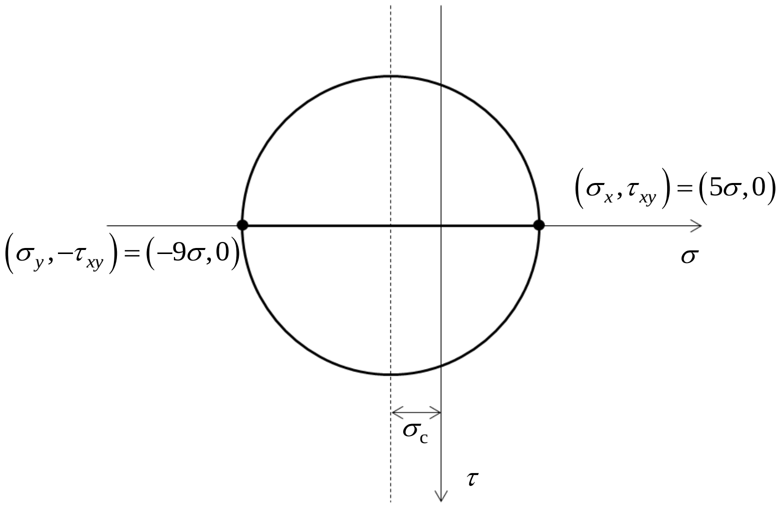

Fig. 1.1 モールの応力円．

また，図 1.1 よりモールの応力円の中心(σ_c, 0)および半径 *r* は次のようになる．

$$\sigma_{\mathrm{c}}=\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=-2\sigma$$

$$\left(\sigma_{\mathrm{c}},0\right)=\left(-2\sigma,0\right) \tag{1.2}$$

$$r=\frac{1}{2}\left|\sigma_y-\sigma_x\right|=7\sigma \tag{1.3}$$

(2)　(1)で描いたモールの応力円より，*n*-*t* 座標系における応力テンソル$[\sigma_{ij}]$を求めよ．

n-*t* 座標系は *x*-*y* 座標系を反時計回りに 60° 回転させたものであるため，モールの応力円上では反時計回りに 2 倍の 120° 回転させればよい．よって，モールの応力円は図 1.2 のように描くことができる．

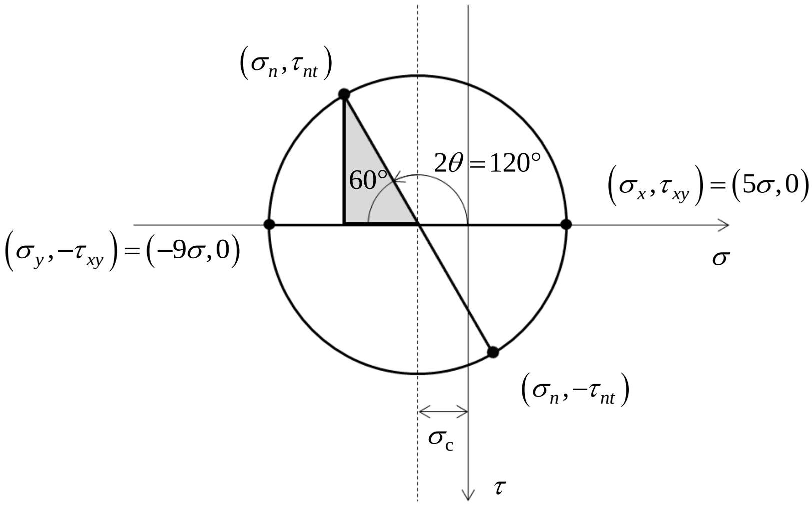

Fig. 1.2 120° 回転させたモールの応力円.

図 1.2 において塗りつぶされた直角三角形を用いてσ_n，σ_t，τ_{nt} を求める．直角三角形の斜辺はモールの応力円の半径より r=7σである．よって，(σ_n, τ_{nt})および(σ_t, -τ_{nt})の座標はそれぞれ以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned}\left(\sigma_n, \tau_{nt}\right) &= \left(\sigma_{\mathrm{c}} - \frac{7}{2}\sigma, -\frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma\right) \\ &= \left(-2\sigma - \frac{7}{2}\sigma, -\frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma\right) \\ &= \left(-\frac{11}{2}\sigma, -\frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma\right) \qquad (1.4)\end{aligned}$$

$$\left(\sigma_t, -\tau_{nt}\right) = \left(\sigma_{\mathrm{c}} + \frac{7}{2}\sigma, \frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\sigma, \frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma\right) \tag{1.5}$$

式(1.4)，(1.5)より，*n-t* 座標系における応力テンソル$[\sigma_{ij}]$は次のようになる．

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2}\sigma & -\frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma \\ -\frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma & \frac{3}{2}\sigma \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

(3)　*x*，*y* 方向のひずみε_x，ε_yとせん断ひずみγ_{xy}をそれぞれσ，*E*，νを用いて表せ．

　平面応力状態を仮定しているため，応力―ひずみの関係式から *x-y* 座標系における垂直ひずみε_x，ε_yとせん断ひずみγ_{xy}はそれぞれ以下のように表される．

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \tag{1.8}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{1.9}$$

式(1.7)，(1.8)，(1.9)にσ_x=5σ，σ_y=-9σ，τ_{xy}=0 を代入すると *x-y* 座標系における垂直ひずみε_x，ε_yとせん断ひずみγ_{xy}はそれぞれ以下のようになる．

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left\{5\sigma - \nu\cdot\left(-9\sigma\right)\right\}$$

$$= \frac{\sigma}{E}\left(5 + 9\nu\right) \tag{1.10}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left\{\left(-9\sigma\right) - \nu\cdot 5\sigma\right\}$$

$$= -\frac{\sigma}{E}\left(9 + 5\nu\right) \tag{1.11}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{0}{G}$$
$$= 0 \tag{1.12}$$

(4)　*x-y* 座標系におけるひずみテンソルからモールのひずみ円を描き，その中心と半径を求めよ．

式(1.10)，(1.11)，(1.12)より *x-y* 座標系におけるひずみテンソル[ε_{ij}]は次のようになる．

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma}{E}(5+9\nu) & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sigma}{E}(9+5\nu) \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

式(1.13)をもとにモールのひずみ円を描くと図 1.3 のようになる．

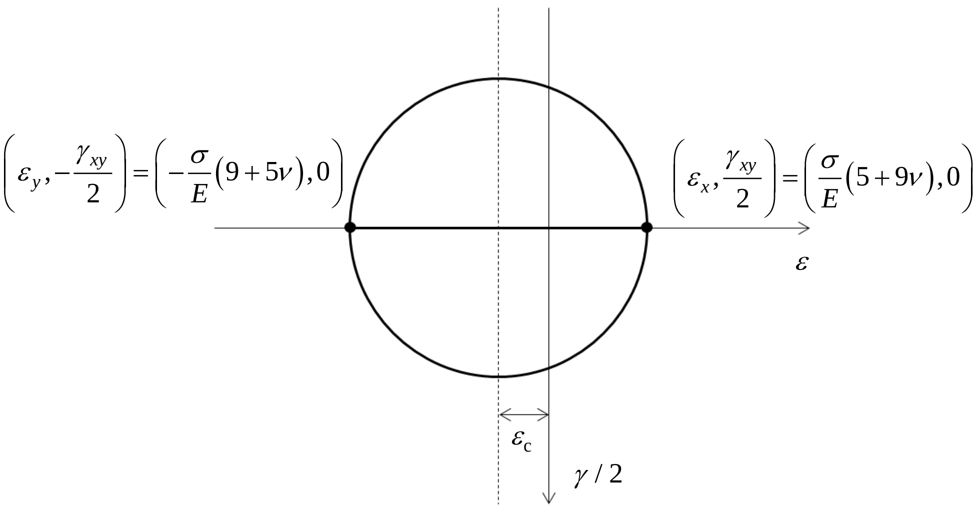

Fig. 1.3　モールのひずみ円.

また，モールのひずみ円の中心(ε_c, 0)および半径 r は次のようになる．

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) = \frac{2\sigma}{E}\left(-1+\nu\right)$$
$$\left(\varepsilon_c, 0\right) = \left(\frac{2\sigma}{E}\left(-1+\nu\right), 0\right) \tag{1.14}$$

$$r = \frac{1}{2}\left|\varepsilon_y - \varepsilon_x\right| = \frac{7\sigma}{E}\left(1+\nu\right) \tag{1.15}$$

(5)　(4)で描いたモールのひずみ円より，*n*-*t* 座標系におけるひずみテンソル[ε_{ij}]を求めよ．

　モールの応力円と同様, モールのひずみ円上で反時計回りに 2θ=120° 回転させると図 1.4 のようになる.

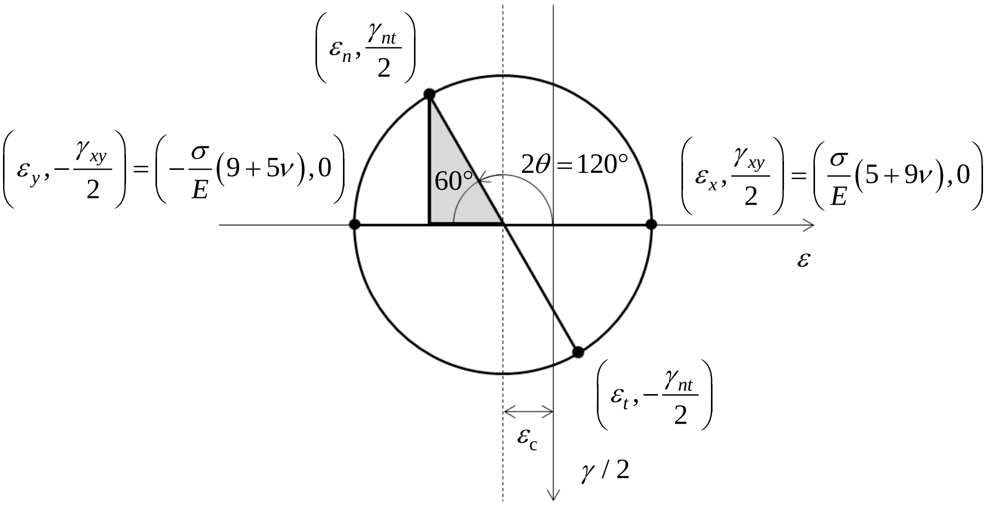

Fig. 1.4 120° 回転させたモールのひずみ円.

図 1.4 において塗りつぶされた直角三角形を用いてε_n, ε_t, $\gamma_{nt}/2$ を求める．直角三角形の斜辺はモールのひずみ円の半径より $r=7\sigma(1+\nu)/E$ である．よって，ε_n, ε_t, $\gamma_{nt}/2$ はそれぞれ以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \varepsilon_c - \frac{7\sigma}{2E}(1+\nu) \\ &= \frac{2\sigma}{E}(-1+\nu) - \frac{7\sigma}{2E}(1+\nu) \\ &= -\frac{\sigma}{2E}(11+3\nu) \qquad (1.16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \varepsilon_c + \frac{7\sigma}{2E}(1+\nu) \\ &= \frac{\sigma}{2E}(3+11\nu) \qquad (1.17)\end{aligned}$$

$$\frac{\gamma_{nt}}{2} = -\frac{7\sqrt{3}\sigma}{2E}(1+\nu) \qquad (1.18)$$

したがって，n-t 座標系におけるひずみテンソル$[\varepsilon_{nt}]$は次のようになる．

$$\left[\varepsilon_{ij}\right]=\begin{pmatrix}\varepsilon_n & \dfrac{\gamma_{nt}}{2}\\ \dfrac{\gamma_{nt}}{2} & \varepsilon_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\sigma}{2E}\left(11+3\nu\right) & -\dfrac{7\sqrt{3}\sigma}{2E}\left(1+\nu\right)\\ -\dfrac{7\sqrt{3}\sigma}{2E}\left(1+\nu\right) & \dfrac{\sigma}{2E}\left(3+11\nu\right)\end{pmatrix} \tag{1.19}$$

(6)　n-t座標系におけるせん断応力τ_{nt}とせん断ひずみγ_{nt}の関係を踏まえ，横弾性係数GをE，νを用いて表せ．

n-t 座標系において，せん断応力τ_{nt}およびせん断ひずみγ_{nt}は横弾性係数 G を用いて以下のように表される．

$$\tau_{nt}=G\gamma_{nt} \tag{1.20}$$

式(1.20)に式(1.6)および式(1.18)よりτ_{nt}，γ_{nt}を代入すると次のようになる．

$$-\frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma=G\cdot 2\left\{-\frac{7\sqrt{3}\sigma}{2E}\left(1+\nu\right)\right\} \tag{1.21}$$

これを整理すると，

$$\begin{aligned}G&=-\frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma\left\{-\frac{E}{7\sqrt{3}\sigma\left(1+\nu\right)}\right\}\\&=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\end{aligned} \tag{1.22}$$

となる．

[2] 板厚が十分に薄い弾性体表面のある点での応力状態を求めるため，図 2 に示すような45°傾けた三軸ひずみゲージを貼り付けた．それぞれのひずみゲージから測定した値は ε_x=150μ, ε_y=-50μ, $\varepsilon_{45°}$=-50μ (μ=1.00×10^{-6}) であった. この弾性体の縦弾性定数 E=91.0 GPa, ポアソン比 ν=0.3 とし以下の設問に答えよ．ただし，回転方向は**反時計回りを正**とし，必要であれば$\sqrt{2} = 1.41$を用いて，**有効数字 3 桁**で解答せよ.

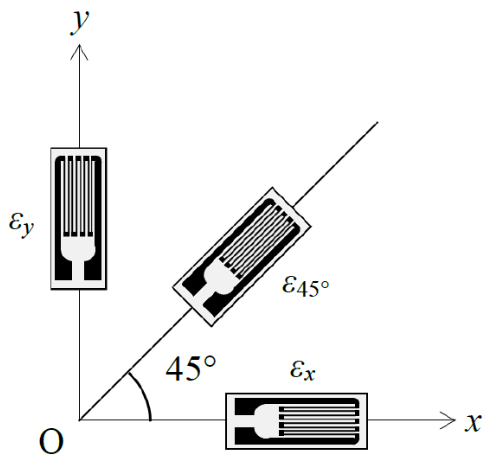

Fig.2 三軸ひずみゲージ模式図

(1) (i) 各ひずみゲージの値とひずみの座標変換式より，せん断ひずみ γ_{xy} を求め，x-y 座標系 におけるひずみテンソル[ε_{ij}]を求めよ.

(ii) 求めたひずみテンソルより，モールのひずみ円を描き，その中心と半径を示せ.

(2) 前問で描いたモールのひずみ円より，主ひずみ(ε_1, ε_2)および主ひずみ方向(θ_1, θ_2)を求めよ．ただし, $-90° \leq \theta_1, \theta_2 \leq 90°$ とする.

(3) 応力－ひずみの関係式より，主応力(σ_1, σ_2)を求めよ.

(4) 板厚方向のひずみε_zを求めよ．ただし，$\sigma_x+\sigma_y=\sigma_1+\sigma_2$ であることを用いてよい.

※ひずみの座標変換式

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta\cos\theta$$

※応力－ひずみの関係式

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2),\quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)$$

(1)(i) 各ひずみゲージの値とひずみの座標変換式より，せん断ひずみ γ_{xy} を求め，x-y 座標系 におけるひずみテンソル[ε_{ij}]を求めよ.

ひずみの座標変換式は次式で表される.

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{2.1}$$

式(2.1)に $\theta = 45°$ を代入すると次式が得られる.

$$\varepsilon_{45°} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}) \tag{2.2}$$

上式に各ひずみゲージで得た値 ε_x=150μ, ε_y=-50μ, $\varepsilon_{45°}$=-50μを代入し，γ_{xy} について整理することでせん断ひずみを算出することができる.

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{45°} - (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ &= 2\times(-50\mu) - (150-50)\mu = -200\mu\end{aligned} \tag{2.3}$$

これより x-y 座標系におけるひずみテンソル[ε_{ij}]は次のようになる.

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150\mu & -100\mu \\ -100\mu & -50.0\mu \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

(ii) 求めたひずみテンソルより，モールのひずみ円を描き，その中心と半径を示せ.

(i)より求めた$(\varepsilon_x,\gamma_{xy}/2)=(150\mu,\text{-}100\mu)$，$(\varepsilon_y,\text{-}\gamma_{xy}/2)=(\text{-}50\mu,100\mu)$をプロットしてモールのひずみ円を描くと図 2.1 のようになる.

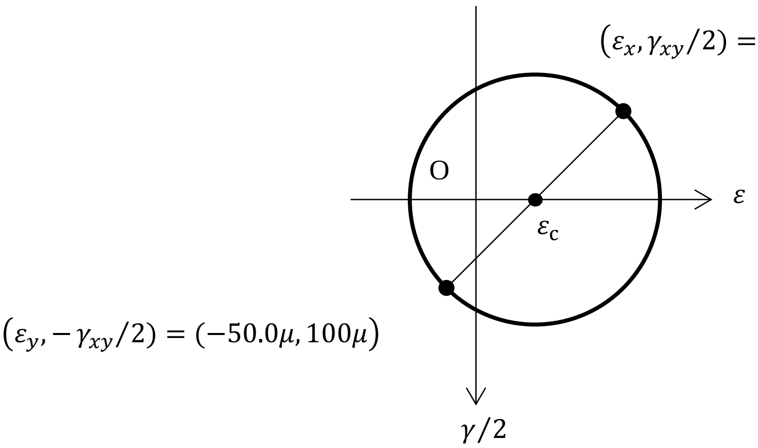

Fig.2.1 モールのひずみ円

中心座標$(\varepsilon_c, 0)$，半径 r は以下のようにして求められる.

$$(\varepsilon_c,0)=\left(\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2},0\right)=\left(\frac{150\mu-50\mu}{2},0\right)=(50.0\mu,0) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} r&=\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+4\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ &=\frac{1}{2}\sqrt{(150\mu+50\mu)^2+4(100\mu)^2} \\ &=100\mu\sqrt{2}=141\mu \end{aligned} \tag{2.6}$$

(2) 前問で描いたモールのひずみ円より，主ひずみ(ε_1，ε_2)および主ひずみ方向(θ_1，θ_2)を求めよ．ただし，$-90° \le \theta_1, \theta_2 \le 90°$ とする．

主ひずみ(ε_1, ε_2) および主ひずみ方向(θ_1, θ_2)はモールのひずみ円上において以下の図 2.2 のように表される．

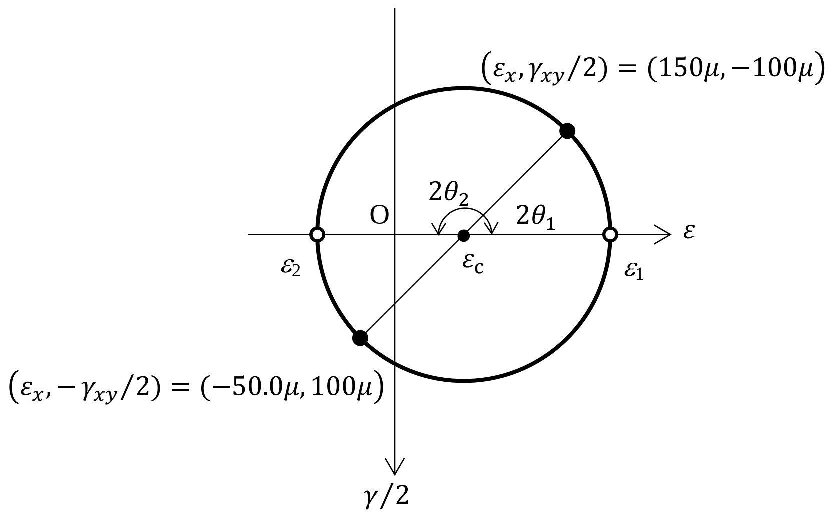

Fig.2.2 主ひずみおよび主ひずみ方向

上図より主ひずみおよび主ひずみ方向は以下のように表される．

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_c + r \\ \varepsilon_c - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\mu + 141\mu \\ 50\mu - 141\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 191\mu \\ -91.0\mu \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{1}{2}\tan^{-1}\left|\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right| \\ &= -\frac{1}{2}\tan^{-1}\left|\frac{-200\mu}{150\mu + 50\mu}\right| = -22.5[\deg] \end{aligned} \tag{2.8}$$

主ひずみ方向は直交するので，$\theta_2 = \theta_1 + 90 = 67.5[\deg]$ と得られ，主ひずみ方向は次のように求まる．

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22.5 \\ 67.5 \end{pmatrix}[\deg] \tag{2.9}$$

(3) 応力－ひずみの関係式より，主応力(σ_1，σ_2)を求めよ．

応力－ひずみの関係式より，主応力（σ_1，σ_2）は以下のように求まる．

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2\right)\\ &= \frac{91\times10^9}{1-0.3^2}\times\left\{191+0.3\times(-91)\right\}\times10^{-6} = 16.4\left[\mathrm{MPa}\right]\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1\right)\\ &= \frac{91\times10^9}{1-0.3^2}\times\left(-91+0.3\times191\right)\times10^{-6} = -3.37\left[\mathrm{MPa}\right]\end{aligned} \tag{2.11}$$

よって，

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16.4\\ -3.37\end{pmatrix}\left[\mathrm{MPa}\right] \tag{2.12}$$

(4) 板厚方向のひずみε_zを求めよ．ただし，$\sigma_1+\sigma_2=\sigma_x+\sigma_y$であることを用いてよい．

平面応力状態より $\sigma_z=0$ であることに注意すると，応力－ひずみの関係式より板厚方向のひずみは次のように求まる．

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_z-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right\}\\ &= -\frac{\nu\left(\sigma_1+\sigma_2\right)}{E}\\ &= -\frac{0.3\times(16.4-3.37)\times10^6}{91\times10^9}\\ &= -43.0\mu\ \left(or\ \ -4.30\times10^{-5}\right)\end{aligned} \tag{2.13}$$