材料の力学 1　Step 1　第 5 回演習問題（2021/5/18 実施）

[1]　平面応力状態にある弾性体において，せん断応力τが図1 のように作用している．その結果，弾性体の表面に描かれた正方形OABC（一辺の長さa）がn軸に関して対称である平行四辺形OA′B′C′に変形した．ただし，A，B 点のy 方向の変位はb，B，C 点のx 方向の変位はh であり，正方形の一辺の長さに対し十分小さいものとする．n-t 座標系はx-y 座標系を反時計回りに45°回転した座標系である．弾性体の材料定数を縦弾性係数E，横弾性係数G，ポアソン比νとして，以下の設問に答えよ．

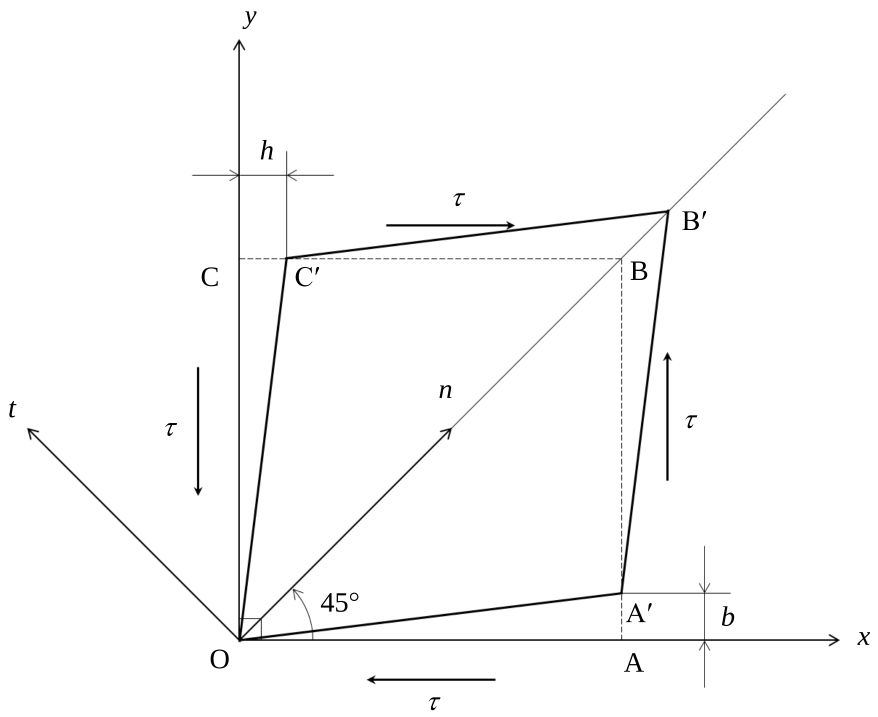

Fig. 1 平面応力状態にある弾性体.

(1) x 方向の垂直ひずみε_x，y 方向の垂直ひずみε_y，せん断ひずみγ_{xy}を a，b を用いてそれぞれ求めよ．

(2) 点 B(a,a)が変形後に B'(a+h, a+b)になったとして，幾何学的な考察から線分 OB'の長さ L_nを a，b を用いて表せ．この関係をもとに n 方向の垂直ひずみε_nを求めよ．

(3) (1)の結果を用いて，モールのひずみ円を描き，n 方向垂直ひずみε_n を求め，(2)の結果と一致することを確認せよ．

(4) τを用いてモールの応力円を描け．さらに，n-t 座標系における応力テンソルをτを用いて表せ．

(5) (4)で求めた応力に対し応力－ひずみ関係式を適用することで，n 方向の垂直ひずみε_nをτを用いて表せ．

(1)　x 方向の垂直ひずみε_x，y 方向の垂直ひずみε_y，せん断ひずみγ_{xy}を a，b を用いてそれぞれ求めよ．

図 1 より，四角形 OABC はせん断変形のみが生じている．また，変形後の四角形 OA′B′C′ は n 軸に関して対称であることから h=b となる．これらを考慮すると各ひずみ成分は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \\ &\gamma_{xy} = \frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{OC}} = \frac{b}{a} + \frac{h}{a} = \frac{2b}{a}\left(\frac{2h}{a}\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

(2)　点 B(a,a)が変形後に B'(a+h, a+b)になったとして，幾何学的な考察から線分 OB'の長さ L_n を a，b を用いて表せ．この関係をもとに n 方向の垂直ひずみε_n を求めよ．

線分 OB'の長さ L_n は三平方の定理より次のように表すことができる．

$$L_n = \sqrt{(a+b)^2 + (a+h)^2} = \sqrt{2}(a+b) \quad (\because h = b) \tag{1.2}$$

よって，n 方向の垂直ひずみε_nは

$$\varepsilon_n = \frac{L_n - \sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}(a+b) - \sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{b}{a} \tag{1.3}$$

(3)　(1)の結果を用いて，モールのひずみ円を描き，n 方向垂直ひずみε_n を求め，(2)の結果と一致することを確認せよ．

(1)より，ひずみテンソルは以下のように表すことができる．

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b}{a} \\ \dfrac{b}{a} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

したがって，モールのひずみ円は次のように描ける．

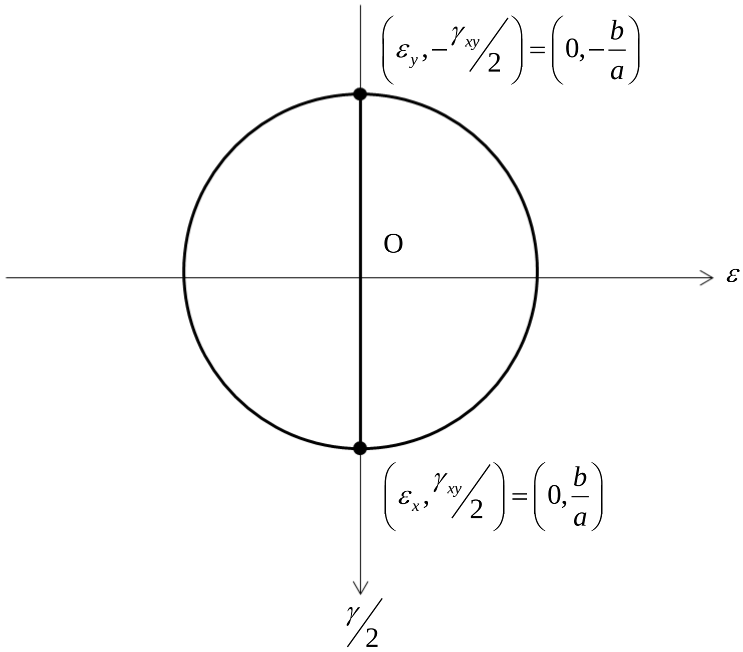

Fig.1.1 モールのひずみ円.

また，モールのひずみ円の中心(ε_c, 0)と半径 r は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} &\varepsilon_c = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) = 0 \\ &\left(\varepsilon_c, 0\right) = \left(0, 0\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}{}^2} = \frac{b}{a} \tag{1.6}$$

n-t座標系はx-y座標系を反時計回りに45°回転させたものであるため，モールのひずみ円上では反時計回りに2倍の2θ=90°回転させればよい．よって，モールのひずみ円は図1.2のように描くことができる.

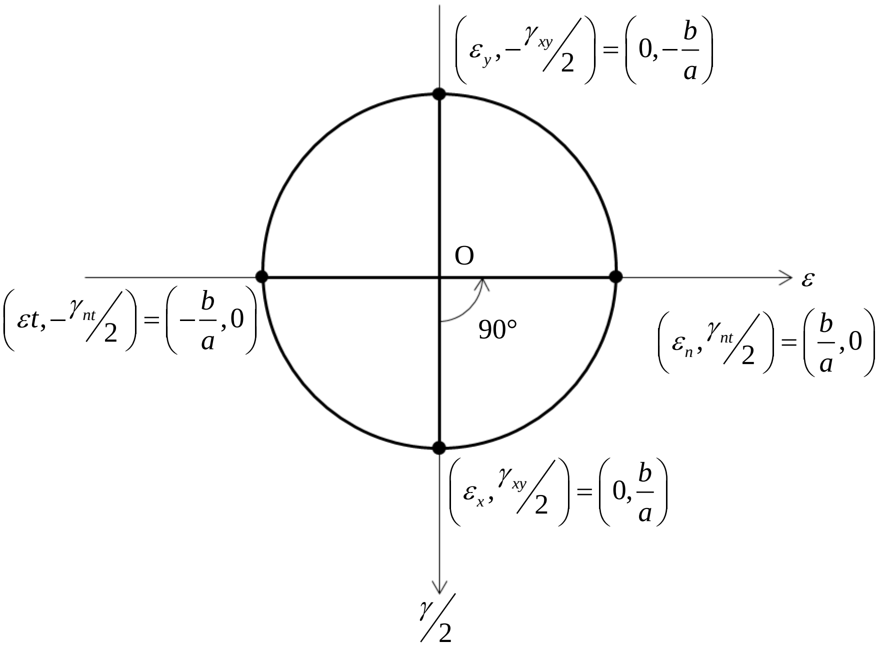

Fig.1.2 90°回転させたモールのひずみ円.

よって，*n-t* 座標系におけるひずみテンソルは次のように表すことができる.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_n & \gamma_{nt}/2 \\ \gamma_{nt}/2 & \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

これより，ε_n は(2)の結果と一致することが確認できた.

(4)　τ を用いてモールの応力円を描け．さらに，*n*- *t* 座標系における応力テンソルを τ を用いて表せ.

図 1 について，応力テンソルは次のように表すことができる.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

したがって，モールの応力円は次のように描ける.

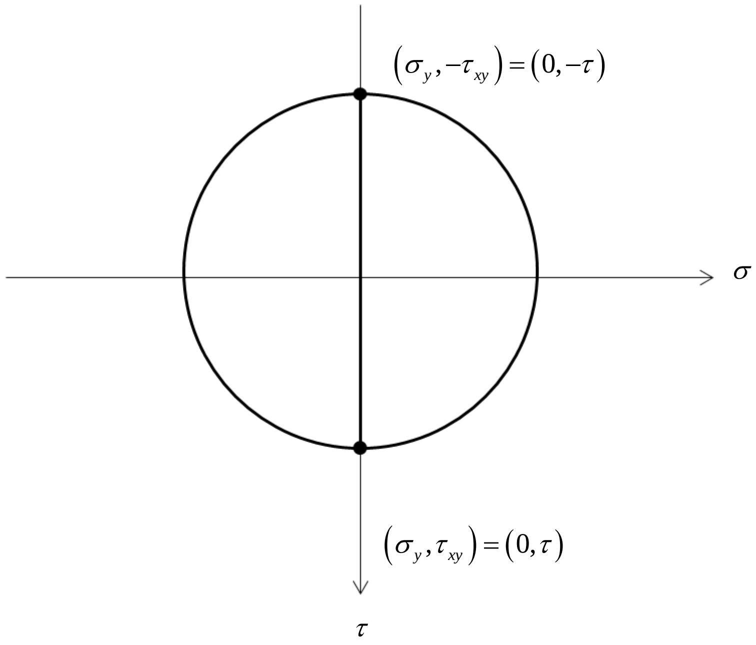

Fig.1.3 モールの応力円.

また，モールの応力円の中心(σ_c, 0)と半径 r は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} &\sigma_c = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \\ &\left(\sigma_c, 0\right) = \left(0, 0\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}{}^2} = \tau \tag{1.10}$$

モールのひずみ円と同様，モールの応力円上で反時計回りに 2θ=90° 回転させると図 1.4 のようになる.

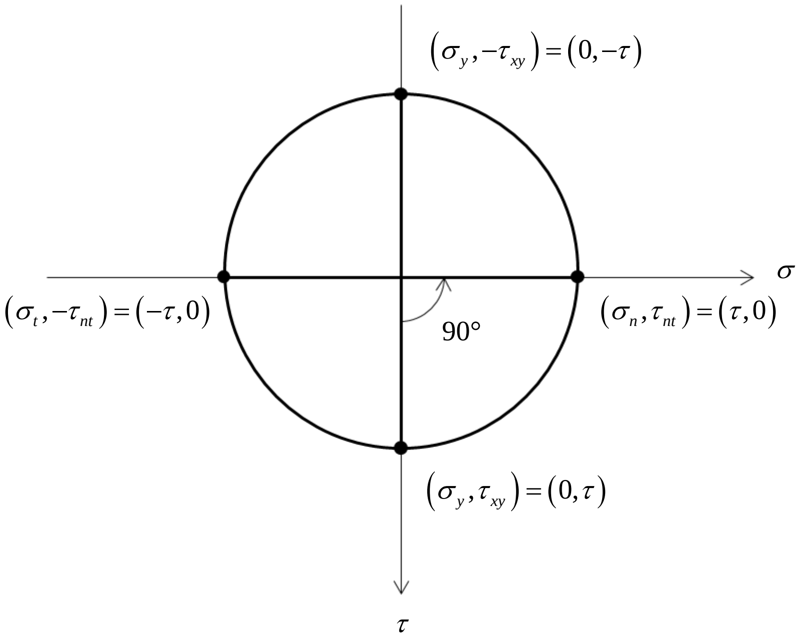

Fig.1.4 90°回転させたモールの応力円.

よって，*n-t* 座標系における応力テンソルは次のように表すことができる.

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ -\tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

(5)　で求めた応力に対し応力－ひずみの関係式を適用することで，*n* 方向の垂直ひずみε_nをτを用いて表せ.

図 1 は平面応力状態であるから，応力—ひずみの関係式から次のように求めることができる.

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{1}{E}\left(\sigma_n - \nu\sigma_t\right) \\ &= \frac{1+\nu}{E}\tau \end{aligned} \tag{1.12}$$

[2]　図 2 は z 方向に十分薄い弾性体の板状部材(長さ L，高さ h，厚さ t)が剛体壁の内側にはめ込まれている様子を表している．下図に示すように，y 方向に両端から圧縮荷重 P が作用している．圧縮荷重をかけた際，板材は点線部から実線部に変形するが，この図では分かりやすいように変形が大きく描かれている．x 軸から反時計回りに θ=45°傾いた方向にひずみゲージが貼り付けられている．このひずみゲージから $\varepsilon_\theta = -50\mu$ の値を得た．壁からの摩擦力はなく，部材の変形が一様であるとして以下の問いに答えよ．ただし，弾性体の材料定数を縦弾性係数 E = 100 GPa，ポアソン比 $\nu = 0.3$ とする．

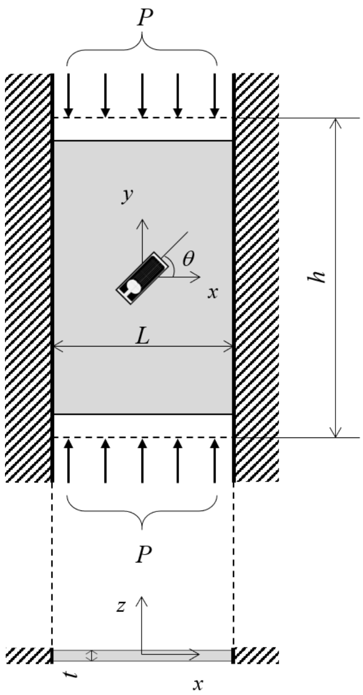

Fig. 1　弾性体の応力状態.

(1)　部材内の応力成分を求めよ．(E, ν, L, h, t, P を用いよ)

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym & & \sigma_z \end{pmatrix}$$

(2)　ε_y を求めよ．

(3) y 方向に作用する荷重 P を求めよ．このとき，L = 25 mm, h = 75 mm, t = 0.2 mm とする．

※応力-ひずみの関係式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{1-\nu^2} & \dfrac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \dfrac{\nu E}{1-\nu^2} & \dfrac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(1) 部材内の応力成分を求めよ．(*E, ν, L, h, t, P* を用いよ)

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym & & \sigma_z \end{pmatrix}$$

板厚が十分に薄いことから，この部材は xy 平面において平面応力状態である．

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{2.1}$$

また，x 軸方向は剛体壁で固定されていることから，この部材は yz 平面において平面ひずみ状態である．

$$\varepsilon_x = 0 \tag{2.2}$$

更に，剛体壁と部材の間では摩擦が生じず，部材の変形が一様であることから，

$$\tau_{xy} = 0 \tag{2.3}$$

である．また，σ_y は y 方向に圧縮荷重 P が作用することから，

$$\sigma_y = -\frac{P}{Lt} \tag{2.4}$$

である．応力とひずみの関係式より，

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = 0 \tag{2.5}$$

であり，式(2.1), (2.2), (2.4)を考慮することで，

$$\sigma_x = -\frac{\nu P}{Lt} \tag{2.6}$$

と求まる．以上より，部材の応力成分は以下のように求まる．

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym & & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\nu P}{Lt} & 0 & 0 \\ & -\dfrac{P}{Lt} & 0 \\ sym & & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

(2) ε_y **を求めよ．**

ひずみの座標変換式は

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{2.8}$$

である．上式に$\theta = 45^\circ$ を代入することで

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \varepsilon_x \cos^2 45^\circ + \varepsilon_y \sin^2 45^\circ + \gamma_{xy}\sin 45^\circ \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy})\end{aligned} \tag{2.9}$$

となる．応力とひずみの関係式より，

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{2.10}$$

であり，式(2.3)を考慮することで

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \tag{2.11}$$

となる．式(2.2), (2.9), (2.11)より ε_y は以下のように求まる．

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}) = \frac{1}{2}\varepsilon_y \\ \varepsilon_y &= 2\varepsilon_\theta = -100\mu\end{aligned} \tag{2.12}$$

(3) ***y*** **方向に作用する荷重** ***P*** **を求めよ．このとき,** ***L*** **= 25 mm,** ***h*** **= 75 mm,** ***t*** **= 0.2 mm とする．**

xy 平面において平面応力状態であることから，応力とひずみの関係式は

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \tag{2.13}$$

であり，式(2.2), (2.12)より，

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{100\cdot 10^9}{(1-0.3^2)}(-100\cdot 10^{-6}) = -11.0[\mathrm{MPa}] \tag{2.14}$$

したがって，*y* 方向に作用する荷重 P は,

$$P = -\sigma_y Lt = -(-11.0[\mathrm{MPa}]\times 5[\mathrm{mm}^2]) = 55[\mathrm{N}] \tag{2.15}$$