

## 材料の力学1 Step 1 第4回演習問題 (2021/5/11 実施)

- [1] 図1は板厚が十分に薄い弾性体のある点における応力状態を示したものである。なお、図1(c)は図1(a), (b)の応力状態を重ね合わせたときの様子を示している。このとき、以下の設間に答えよ。ただし、 $z$ 方向は板厚方向とし、十分に薄いため平面応力状態と考えることができる。また、図において力の向きは矢印の向きとし、応力の正負を考慮せよ。解答には単位を明記すること。

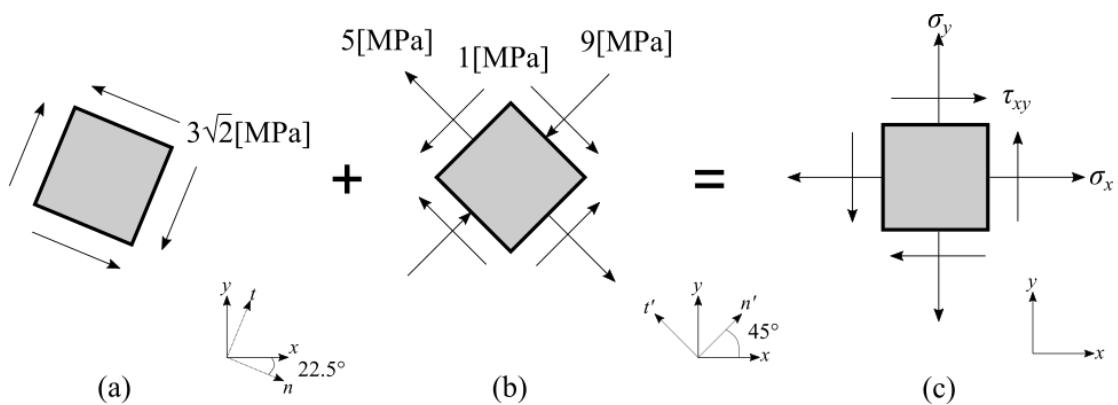


Fig.1 弾性体のある点における応力状態

図1(a)について、以下の設間に答えよ。

- (1)  $n-t$ 座標系においてモールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。
- (2)  $x-y$ 座標系における応力テンソルを求めよ。

図1(b)について、以下の設間に答えよ。

- (3)  $n'-t'$ 座標系においてモールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。
- (4)  $x-y$ 座標系における応力テンソルを求めよ。

図1(c)について、以下の設間に答えよ。

- (5)  $x-y$ 座標系におけるモールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。
- (6) 板に作用する主応力( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ )を求め、最大せん断応力 $\tau_{max}$ を求めよ。ただし、主応力は  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  とする。

(1)  $n-t$  座標系においてモールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。

設問により与えられた応力を応力テンソル表記すると、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} [\text{MPa}] \quad (1.1)$$

これより、モールの応力円は以下のように描ける。

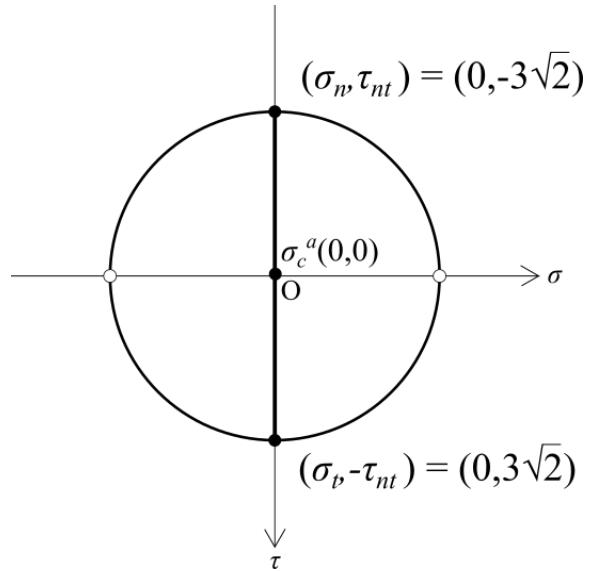


Fig.1.1 図 1(a)におけるモールの応力円

また、図 1.1 よりモールの応力円の中心座標を  $(\sigma_c^a, 0)$ 、半径を  $r^a$  とすると、 $\sigma_c^a$ 、 $r^a$  は以下のように求まる。

$$\sigma_c^a = 0 \quad [\text{MPa}] \quad (1.2)$$

$$r^a = 3\sqrt{2} \quad [\text{MPa}] \quad (1.3)$$

(2)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めよ.

座標を反時計回りに  $\theta = 22.5^\circ$  回転させることはモールの応力円上では反時計回りに  $2\theta = 45^\circ$  回転させることに相当するため、モールの応力円は以下のように描ける。

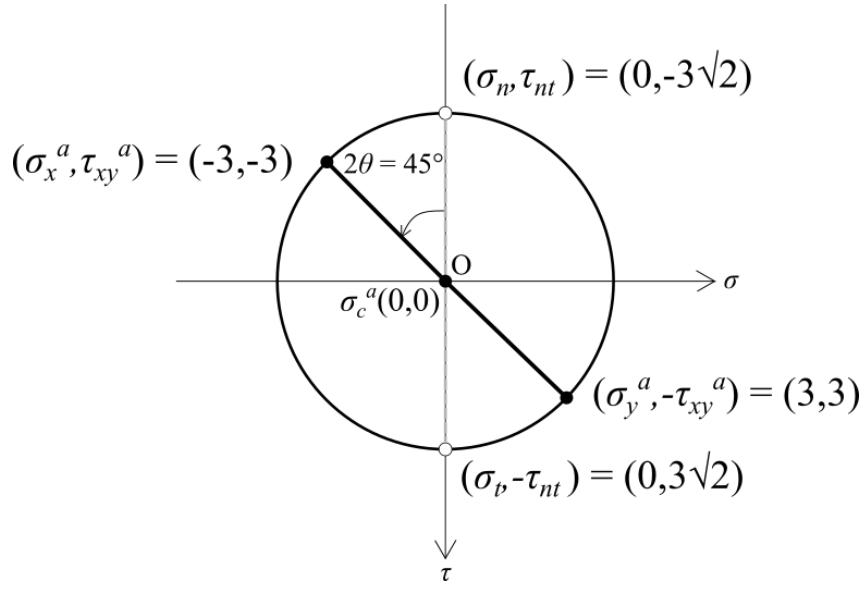


Fig.1.2 図 1(a)におけるモールの応力円

図 1.2 における幾何的関係より、応力テンソルは以下のように求まる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^a & \tau_{xy}^a \\ \tau_{xy}^b & \sigma_y^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} [\text{MPa}] \quad (1.4)$$

(3)  $n'-t'$ 座標系においてモールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。

設問により与えられた応力を符号に注意して応力テンソル表記すると、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{n'} & \tau_{n't'} \\ \tau_{n't'} & \sigma_{t'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} [\text{MPa}] \quad (1.5)$$

これより、モールの応力円は以下のように描ける。

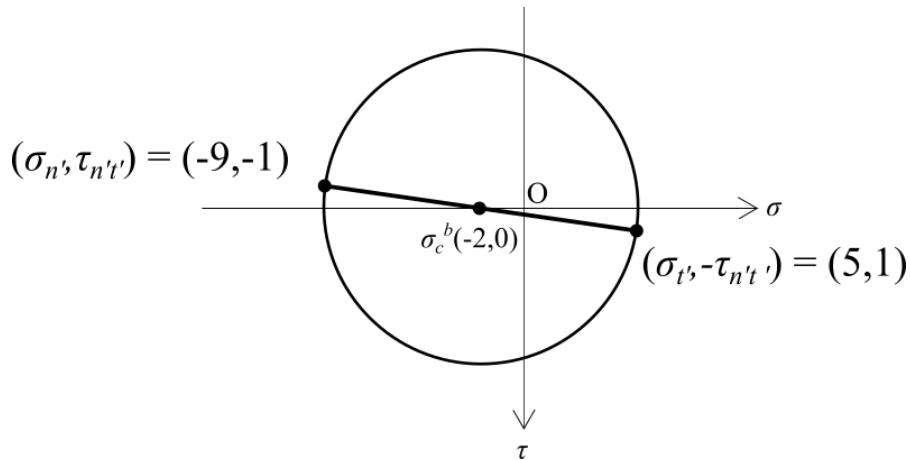


Fig.1.3 図 1(b)におけるモールの応力円

また、式(1.5)の応力テンソルからモールの応力円の中心座標を $(\sigma_c^b, 0)$ 、半径を $r^b$ とする  
と、 $\sigma_c^b$ と $r^b$ は以下のように求まる。

$$\sigma_c^b = \frac{1}{2}(\sigma_{n'} + \sigma_{t'}) = \frac{1}{2}(-9 + 5) = -2[\text{MPa}] \quad (1.6)$$

$$r_c^b = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{n'} - \sigma_{t'})^2 + 4\tau_{n't'}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-14)^2 + 4 \times 1^2} = 5\sqrt{2} [\text{MPa}] \quad (1.7)$$

(4)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めよ.

座標を時計回りに  $\theta' = 45^\circ$  回転させることはモールの応力円上では時計回りに  $2\theta' = 90^\circ$  回転させることに相当するため、モールの応力円は以下のように描ける。

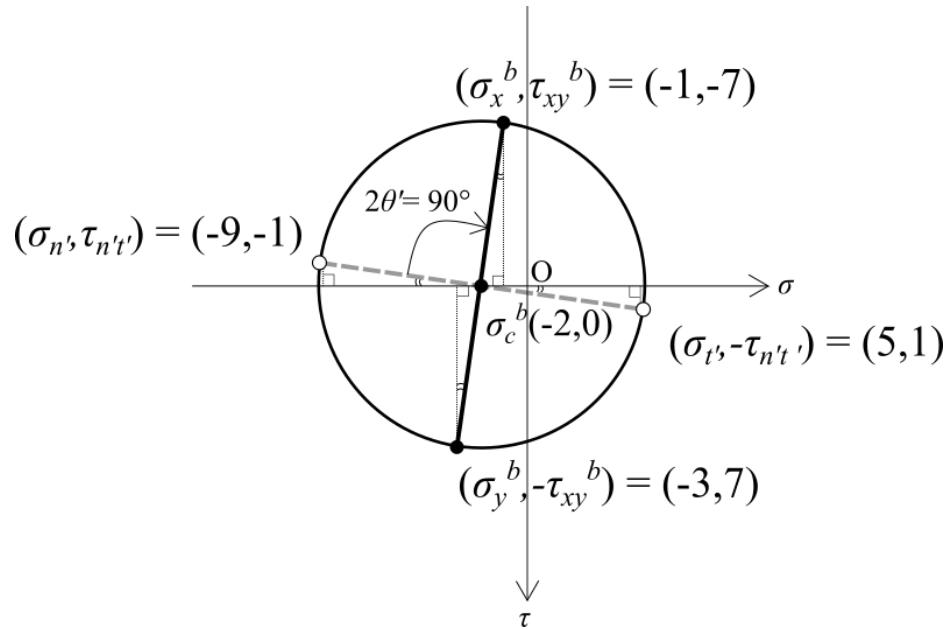


Fig.1.4 図 1(b)におけるモールの応力円

図 1.4 における幾何的な関係より、応力テンソルは以下のように求まる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^b & \tau_{xy}^b \\ \tau_{xy}^b & \sigma_y^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} [\text{MPa}] \quad (1.8)$$

(5)  $x$ - $y$  座標系におけるモールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。

図 1(c)の  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めるには、図 1(a), (b)の  $x$ - $y$  座標における応力テンソルを重ね合わせればよい。よって、式(1.8)と式(1.16)より応力テンソルは以下のように求まる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^c & \tau_{xy}^c \\ \tau_{xy}^c & \sigma_y^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} [\text{MPa}] \quad (1.9)$$

これより、モールの応力円は以下のように描ける。

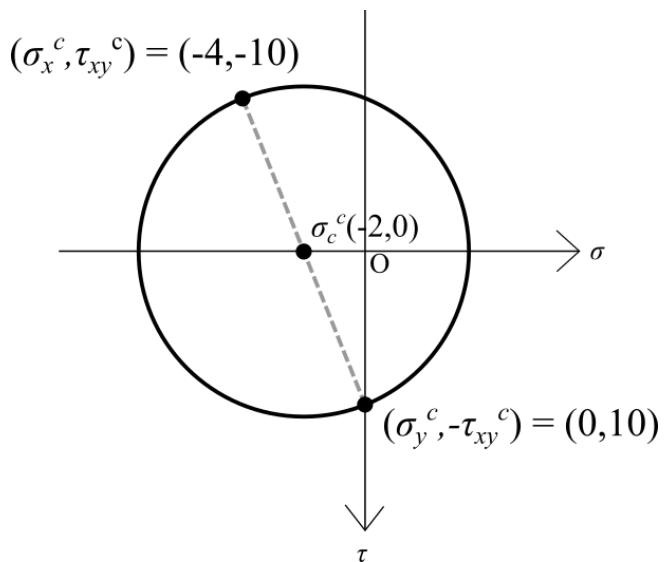


Fig.1.5 図 1(c)におけるモールの応力円

また、式(1.9)の応力テンソルからモールの応力円の中心座標を $(\sigma_c^c, 0)$ 、半径を $r^c$ とする  
と、 $\sigma_c^c$ と $r^c$ は以下のように求まる。

$$\sigma_c^c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(-4 + 0) = -2[\text{MPa}] \quad (1.10)$$

$$r^c = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 4 \times 10^2} = 2\sqrt{26} [\text{MPa}] \quad (1.11)$$

- (6) 板に作用する主応力( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ )を求め, 最大せん断応力 $\tau_{max}$ を求めよ. ただし, 主応力は $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ とする.

平面応力状態であるから, 板厚方向の主応力は0となる. よって, 図1(c)における3次元のモールの応力円は以下のように描ける.

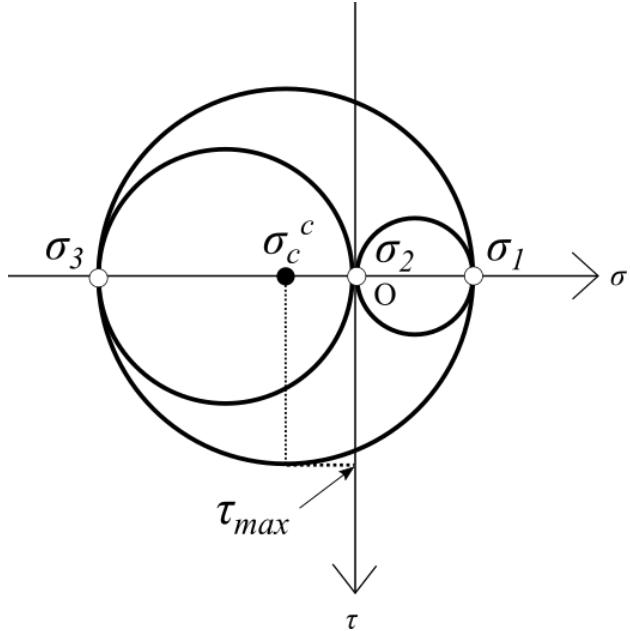


Fig.1.6 図1(c)における3次元のモールの応力円

図1.6より $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_3 < 0$ であるから,  $\sigma_2 = 0$ と求まる. また, 図1.6と式(1.10), (1.11)より $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ は以下のように求まる.

$$\sigma_1 = \sigma_c^c + r^c = -2 + 2\sqrt{26} \text{ [MPa]} \quad (1.12)$$

$$\sigma_3 = \sigma_c^c - r^c = -2 - 2\sqrt{26} \text{ [MPa]} \quad (1.13)$$

よって, 主応力( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ )は以下の通り.

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-2 + 2\sqrt{26}, 0, -2 - 2\sqrt{26}) \text{ [MPa]} \quad (1.14)$$

また, 最大せん断応力 $\tau_{max}$ は以下のように求まる.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = r^c = 2\sqrt{26} \text{ [MPa]} \quad (1.15)$$

- [2] 図 2 に示すように点 A, 点 E において壁に固定された段付き丸棒がある。棒の AB 間, DE 間には分布荷重  $p$  がそれぞれ対称に作用している。丸棒の弾性率を  $E$ , 断面積は AB 間, DE 間では  $2A$ , BD 間では  $A$  として, 以下の問い合わせに答えよ。

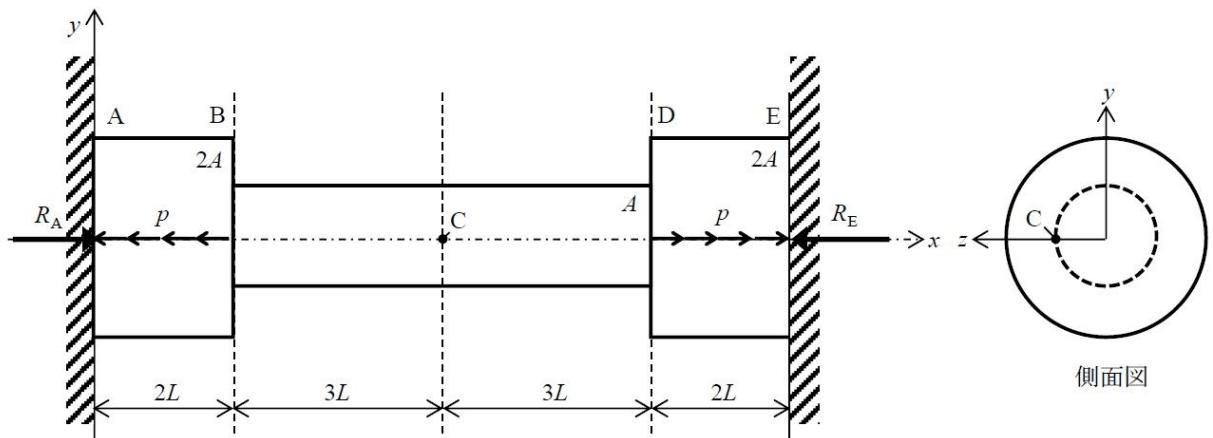


Fig. 2 両端を壁に固定された段付き丸棒。

- (1) 点 A, 点 E における壁からの反力  $R_A$ ,  $R_E$  を用いて力のつりあい式を示せ。
- (2)  $R_A$  を用いて AB 間の変位  $\delta_{AB}$ , BC 間の変位  $\delta_{BC}$  をそれぞれ示せ。
- (3) 対称性により C 点の変位  $\delta_C = 0$  となることを考慮して, 変位の条件と力のつりあい式から  $R_A$ ,  $R_E$  を求めよ。
- (4) 丸棒表面上の点 C におけるモールの応力円を描き, 点 C に生じる最大せん断応力  $\tau_{\max}$  を求めよ。

[2]

(1) 点 A, 点 E における壁からの反力  $R_A$ ,  $R_E$  を用いて力のつり合い式を示せ.

点 A, 点 E における壁からの反力  $R_A$ ,  $R_E$  を用いて FBD を描くと次のようになる.

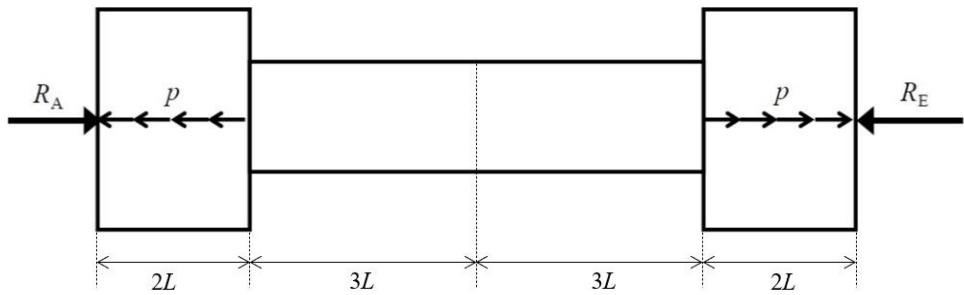


Fig. 2.1 FBD

図 2.1 における力のつり合いより,

$$\begin{aligned} R_A - 2pL + 2pL - R_E &= 0 \\ \therefore R_A &= R_E \end{aligned} \tag{2.1}$$

(2)  $R_A$  を用いて AB 間の変位  $\delta_{AB}$ , BC 間の変位  $\delta_{BC}$  をそれぞれ示せ.

(i)  $0 \leq x \leq 2L$  のとき

軸力を  $N(x)$  とすると, 作用する力は下図のようになる.

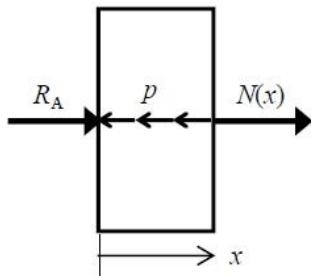


Fig. 2.2 FBD ( $0 \leq x \leq 2L$ )

ここで, 力のつり合い式を立てると, 軸力  $N(x)$  は以下のようになる.

$$\begin{aligned} R_A - px + N(x) &= 0 \\ \therefore N(x) &= -R_A + px \end{aligned} \tag{2.2}$$

よって, 応力  $\sigma(x)$ , ひずみ  $\varepsilon(x)$ , 変位  $\delta_{AB}$  は次のような.

$$\sigma(x) = \frac{-R_A + px}{2A} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{-R_A + px}{2EA} \quad (2.4)$$

$$\delta_{AB} = \int_0^{2L} \varepsilon(x) dx = \int_0^{2L} \frac{-R_A + px}{2EA} dx = \frac{1}{EA} (-R_A L + pL^2) \quad (2.5)$$

(ii)  $2L \leq x \leq 5L$  のとき

軸力を  $N(x)$  とすると、作用する力は下図のようになる。

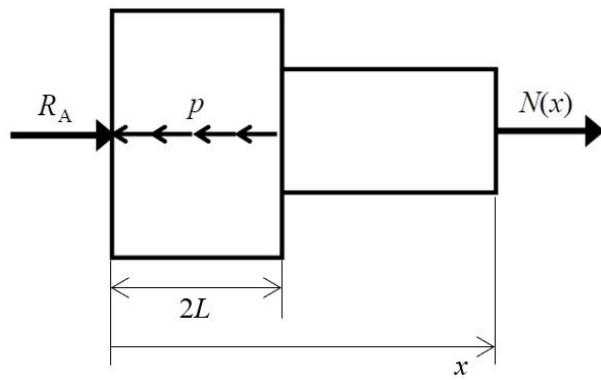


Fig. 2.3 FBD ( $2L \leq x \leq 5L$ )

ここで、力のつり合い式を立てると、軸力  $N(x)$  は以下のようになる。

$$R_A - 2pL + N(x) = 0 \\ \therefore N(x) = -R_A + 2pL \quad (2.6)$$

よって、応力  $\sigma(x)$ 、ひずみ  $\varepsilon(x)$ 、変位  $\delta_{BC}$  は次のようになる。

$$\sigma(x) = \frac{-R_A + 2pL}{A} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{-R_A + 2pL}{EA} \quad (2.8)$$

$$\delta_{BC} = \int_{2L}^{5L} \varepsilon(x) dx = \int_{2L}^{5L} \frac{-R_A + 2pL}{EA} dx = \frac{1}{EA} (-3R_A L + 6pL^2) \quad (2.9)$$

- (3) 対称性により C 点の変位  $\delta_C = 0$  であることを考慮して、変位の条件と力のつりあい式から  $R_A$ ,  $R_E$  を求めよ。

式(2.5), 式(2.9)より C 点に生じる変位  $\delta_C$  は次のようになる.

$$\begin{aligned}\delta_C &= \delta_{AB} + \delta_{BC} = \frac{1}{EA}(-R_A L + pL^2) + \frac{1}{EA}(-3R_A L + 6pL^2) \\ &= \frac{1}{EA}(-4R_A L + 7pL^2)\end{aligned}\quad (2.10)$$

対称性により変位  $\delta_C = 0$  となり, 式(2.10)は次のように表せる.

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{EA}(-4R_A L + 7pL^2) \\ \therefore R_A &= \frac{7}{4}pL\end{aligned}\quad (2.11)$$

式(2.11)と式(2.1)より,  $R_A, R_E$  は次のように求まる.

$$R_A = R_E = \frac{7}{4}pL \quad (2.12)$$

以上のように, 力のつり合い式と変位の条件( $\delta_C = 0$ )の連立方程式により, 対称性を考慮した丸棒の不静定問題を解くことができた.

- (4) 丸棒表面上の点 C におけるモールの応力円を描き, 点 C に生じる最大せん断応力  $\tau_{max}$  を求めよ.

式(2.7)に式(2.12)を代入すると, 点 C における垂直応力  $\sigma(x)$  は次のように求まる.

$$\sigma(x) = \frac{-R_A + 2pL}{A} = \frac{pL}{4A} \quad (2.13)$$

よって, 点 C における応力テンソルは次のようにになる.

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} \frac{pL}{4A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

この応力テンソルより, 図 2.4 のようなモールの応力円が描ける.

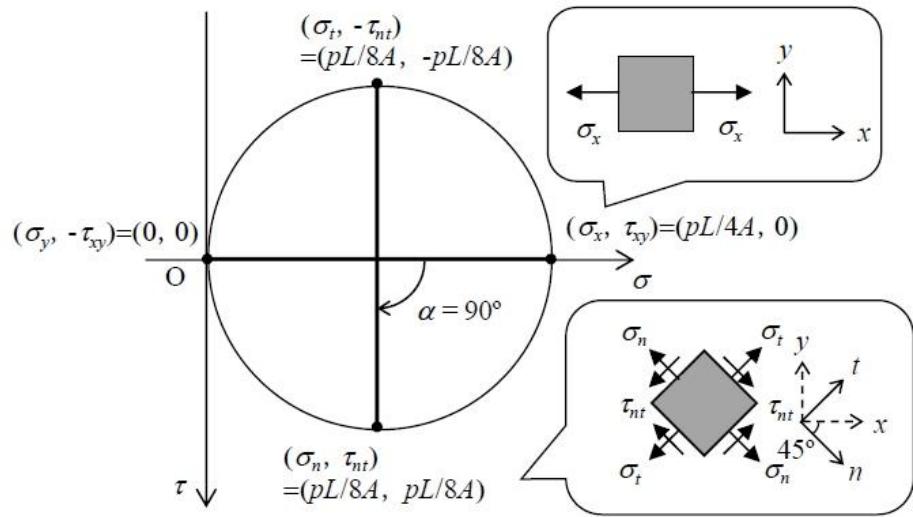


Fig. 2.4 点 C におけるモールの応力円.

また、応力テンソルからモールの応力円の中心( $\sigma_c, 0$ )と半径  $r$  は次のように求まる.

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{pL}{8A} \quad (2.15)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{pL}{8A} \quad (2.16)$$

図 2.4 に示したモールの応力円より、最大せん断応力は、 $x$  軸より  $45^\circ$  傾斜した面に生じその値は次のようになる.

$$\tau_{\max} = \frac{pL}{8A} \quad (2.17)$$