材料の力学 1　Step 1　第 3 回演習問題（2021/4/27 実施）

[1] 直径 $2d_1$, d_1 の段付き丸棒と，直径 d_2，厚さ t の薄肉円筒が図 1 のように左端で壁に固定されている．段付き丸棒には，AB 間に分布荷重 p が x 軸正方向に一様に働いている．丸棒と円筒は並列に結合しており，右端で剛体を介して外力 P が作用している．剛体は上下面を支持されていて，回転せず平行にのみ移動することができる．丸棒は x 軸に平行に配列されており，剛体は x 軸方向にのみ移動可能とする．丸棒と円筒のヤング率を E とする．壁からの反力 R_1，R_2 を図のように仮定し，以下の問いに答えよ．ただし，円筒が壁から受ける反力 R_2 は断面の図心を通る集中荷重と考えることとする．(図では便宜上 2 ヶ所に反力が書かれている).

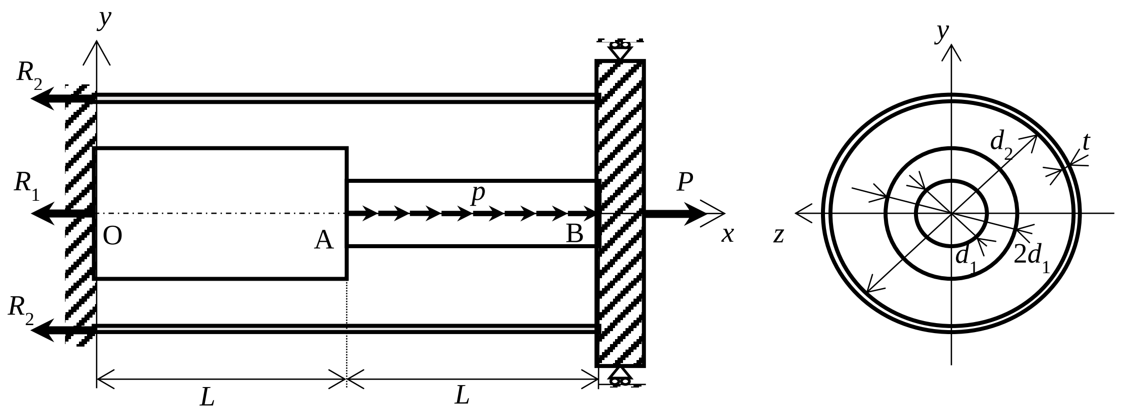

Fig.1 壁に固定された棒状部材

(1) 段付き丸棒と円筒の断面積をそれぞれ求めよ．(t が d_2 よりもはるかに小さいため，薄肉円筒の直径は常に d_2 で一定であるとみなせる)

(2) 外力 P，分布荷重 p，反力 R_1，R_2 のつり合い式を示せ．ただし，R_1，R_2 は図の矢印の向きを正とする．(必ず FBD を書いてから式を導出すること)

(3) 段付き丸棒，円筒に作用する軸力 $N_1(x)$，$N_2(x)$を反力 R_1，R_2 を用いて示せ．(必ず FBD を書いてから式を導出すること)

(4) 段付き丸棒，円筒の右端における変位δ_1，δ_2 を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ．

(5) 右端の剛体による拘束条件(δ_1=δ_2)を用いて，反力 R_1，R_2 をそれぞれ求めよ．ただし，d_1= d_2/5, t= d_2/100 とする．

[1]

(1) 段付き丸棒と円筒の断面積をそれぞれ求めよ.

丸棒の断面積 S_1 は

$$\begin{cases} S_1 = \pi d_1^2 & (0 \le x \le L) \\ S_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4} & (L \le x \le 2L) \end{cases} \tag{1.1}$$

円筒の断面積 S_2 は t が d_2 よりもはるかに小さいため，薄肉円筒の直径は常に d_2 で一定であるとみなして

$$S_1 = \pi d_2 t \tag{1.2}$$

(2) 外力 $\boldsymbol{P}$，分布荷重 $\boldsymbol{p}$，反力 $\boldsymbol{R_1}$，$\boldsymbol{R_2}$ のつり合い式を示せ．ただし，$\boldsymbol{R_1}$，$\boldsymbol{R_2}$ は図の矢印の向きを正とする．(必ず FBD を書いてから式を導出すること)

部材全体の FBD は以下のようになる.

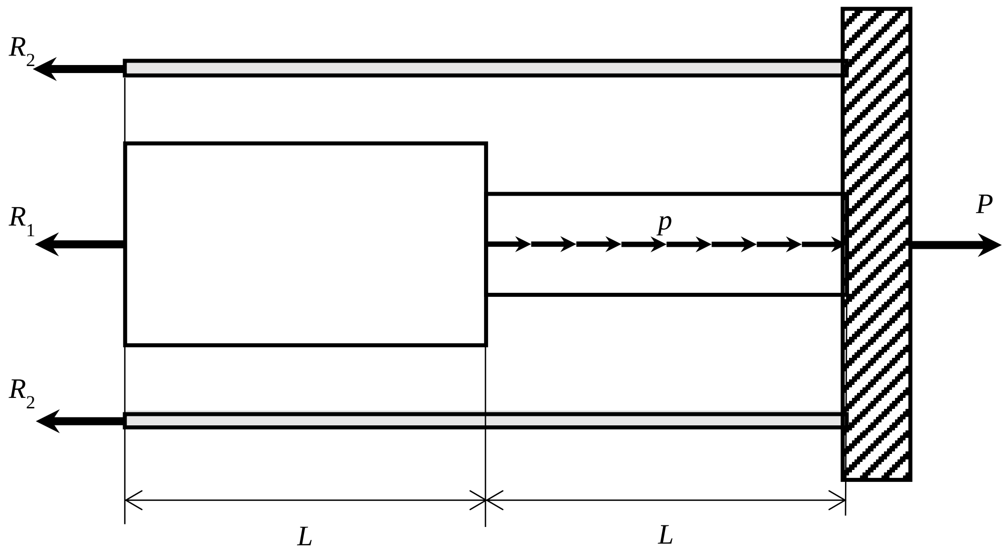

Fig.1.1 FBD

図より，力のつり合いは

$$-R_1 - R_2 + pL + P = 0 \tag{1.3}$$

(3) 段付き丸棒，円筒に作用する軸力 $N_1(x)$，$N_2(x)$を反力 R_1，R_2 を用いて示せ．(必ず FBD を書いてから式を導出すること)

段付き丸棒について点 O からの距離 x における部材に働く軸力 $N_1(x)$を求める．

(i) $0 \le x < L$ のとき

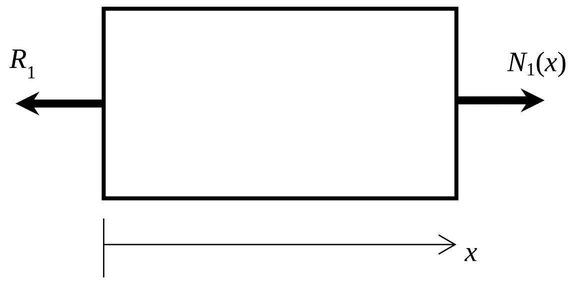

Fig.1.2 丸棒の FBD ($0 \le x < L$)

力のつり合いより

$$-R_1 + N_1(x) = 0$$

$$\therefore N_1(x) = R_1 \tag{1.4}$$

(ii) $L \le x \le 2L$ のとき

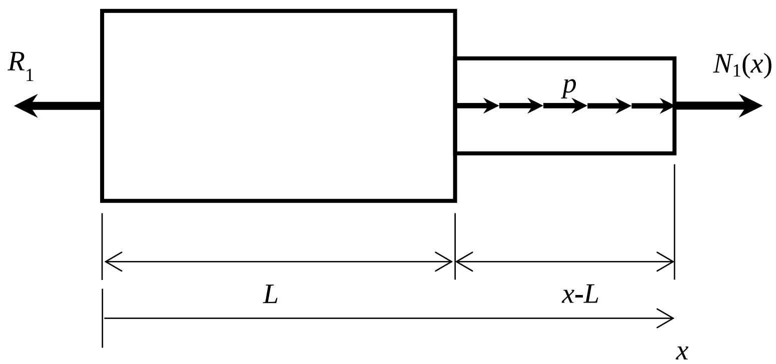

Fig.1.3 丸棒の FBD ($L \le x \le 2L$)

力のつり合いより

$$-R_1 + p(x-L) + N_1(x) = 0$$

$$\therefore N_1(x) = R_1 - p(x-L) \tag{1.5}$$

次に，円筒について点 O からの距離 x における部材に働く軸力 $N_2(x)$を求める．

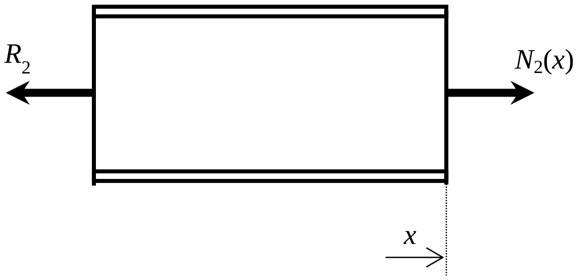

Fig.1.4 円筒の FBD

FBD は図 1.4 のようになり，力のつり合いより，

$$-R_2 + N_2(x) = 0$$

$$\therefore N_2(x) = R_2 \tag{1.6}$$

(4) 段付き丸棒，円筒の右端における変位δ_1，δ_2 を反力 R_1，R_2 を用いてそれぞれ示せ．

段付き丸棒について OA 間，AB 間のそれぞれの変位を求める．

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{OA}} &= \int_0^L \varepsilon(x)\,dx \\ &= \int_0^L \frac{N(x)}{EA_{\mathrm{OA}}}dx \\ &= \frac{R_1 L}{\pi E d^2}\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{AB}} &= \int_L^{2L} \varepsilon(x)\,dx \\ &= \int_L^{2L} \frac{N(x)}{EA_{\mathrm{AB}}}dx \\ &= \frac{4}{\pi E d^2}\int_L^{2L}\left\{R_1 - p(x-L)\right\}dx \\ &= \frac{4}{\pi E d^2}\left(R_1 L - \frac{1}{2}pL^2\right)\end{aligned} \tag{1.8}$$

点 B の変位は OA 間と AB 間の変位の和であるから，

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{\mathrm{OA}} + \delta_{\mathrm{AB}} \\ &= \frac{R_1 L}{\pi E d^2} + \frac{4}{\pi E d^2}\left(R_1 L - \frac{1}{2} p L^2\right) \\ &= \frac{1}{\pi E d^2}\left(5 R_1 L - 2 p L^2\right)\end{aligned} \tag{1.9}$$

次に，円筒における変位を求める．

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \int_0^{2L} \varepsilon(x)\,dx \\ &= \int_0^{2L} \frac{N_2(x)}{E A_2}\,dx \\ &= \int_0^{2L} \frac{R_2}{\pi E d_2 t}\,dx \\ &= \frac{2 R_2 L}{\pi E d_2 t}\end{aligned} \tag{1.10}$$

(5) 右端の剛体による拘束条件(δ_1=δ_2)を用いて，反力 R_1，R_2 をそれぞれ求めよ．

拘束条件δ_1=δ_2 より，

$$\frac{1}{\pi E {d_1}^2}\left(5 R_1 L - 2 p L^2\right) = \frac{2 R_2 L}{\pi E d_2 t}$$

$$\therefore R_2 = \frac{5 R_1 - 2 p L}{8} \tag{1.11}$$

式 1.11 を全体のつり合い式 1.3 に代入して整理すると，

$$-R_1 - \left(\frac{5 R_1 - 2 p L}{8}\right) + p L + P = 0$$

$$\therefore R_1 = \frac{8P + 10 p L}{13} \tag{1.12}$$

また，式 1.12 を式 1.3 に代入すると，

$$R_2 = \frac{5\left(\frac{8P + 10pL}{13}\right) - 2pL}{8}$$

$$= \frac{5P + 3pL}{13} \tag{1.13}$$

[2] 図 2 は弾性体のある点における応力状態を示したものである．なお，図 2(b)は図 2(a)を反時計回りに 60º 回転した状態，図 2(d)は図 2(c)を反時計回りに 30º 回転した状態を図示したものである．このとき，以下の設問に答えよ．解答には単位を明記すること．

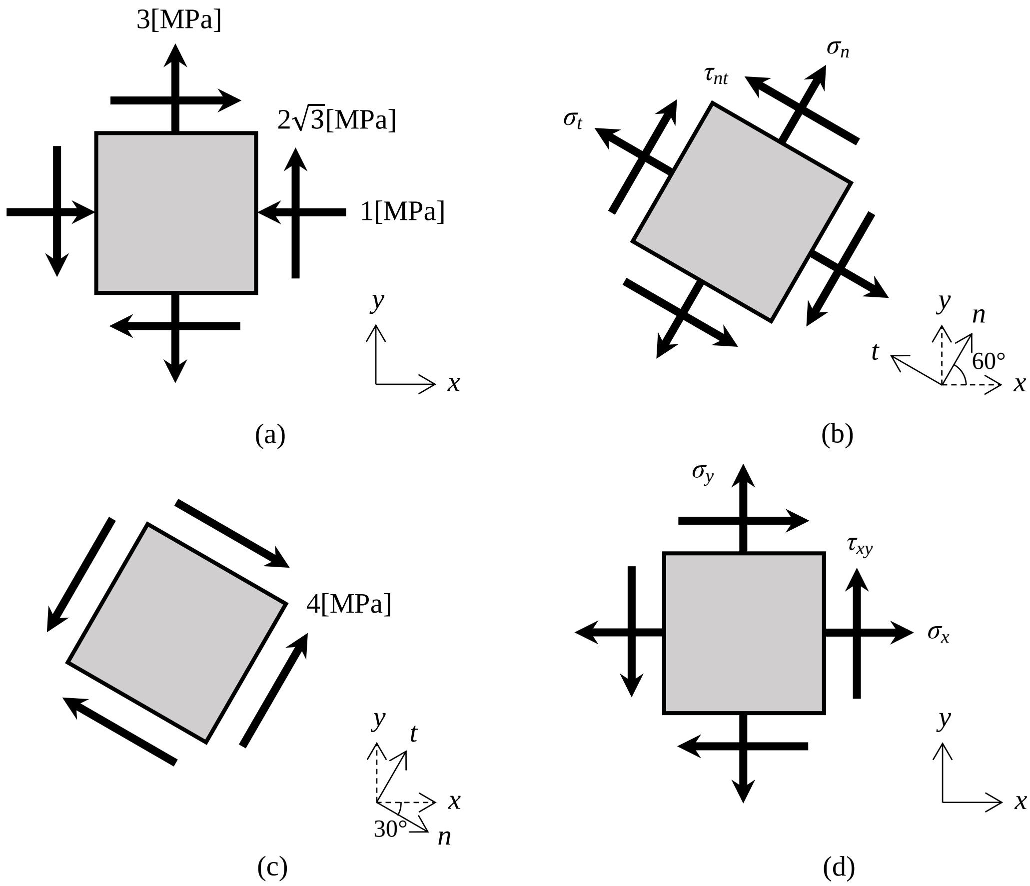

Fig. 2 弾性体のある点における応力状態.

(1) 図 2(a)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ.

(2) (1)で描いたモールの応力円から図 2(b)の応力テンソル※1 を求めよ.

(3) 図 2(a)について座標変換を行うことで図 2(b)の応力テンソルを求め，これが(2)の結果と一致することを示せ．なお必要に応じて以下の座標変換マトリックス※2 を用いよ.

(4) 図 2(c)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ.

(5) (4)で描いたモールの応力円から図 2(d)の応力テンソル※1 を求めよ.

(6) 図 2(c)について座標変換を行うことで図 2(d)の応力テンソルを求め，これが(5)の結果と一致することを示せ.

※1　図 2(b),(d)の応力テンソル：$[\sigma]=\begin{pmatrix}\sigma_n & \tau_{nt}\\ \tau_{tn} & \sigma_t\end{pmatrix}$[MPa]，$[\sigma]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{pmatrix}$[MPa]

※2　座標変換マトリックス　　：$[L]=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

[2]

(1) 図 2(a)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ.

図 2(a)において *x-y* 座標系で与えられた応力テンソルは式(2.1)のようになる.

$$[\sigma]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & 3\end{pmatrix}\text{[MPa]} \tag{2.1}$$

応力テンソルより，図 2.1 のようなモールの応力円が描ける.

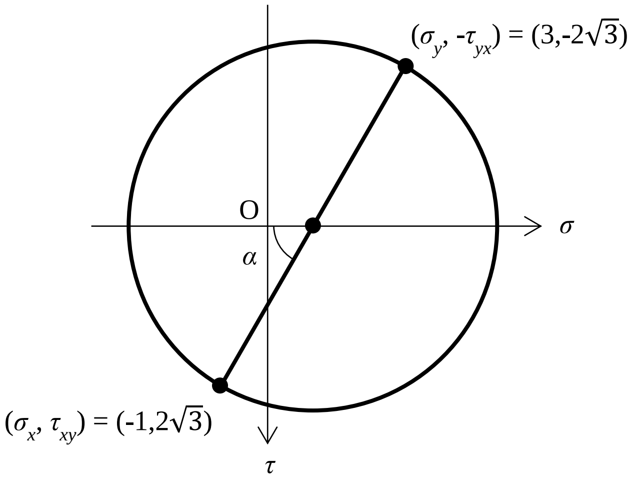

Fig. 2.1 図 2(a)におけるモールの応力円.

また，応力テンソルより，モールの応力円の中心と半径は以下のように求められる.

$$\text{中心：}\left(\sigma_c,\tau_c\right)=\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right),0\right)=\left(\frac{1}{2}\left(-1+3\right),0\right)=\left(1,0\right)\text{[MPa]} \tag{2.2}$$

$$\text{半径：}r=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}{}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(-1-3\right)^2+4\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4\text{[MPa]} \tag{2.3}$$

(2) (1)で描いたモールの応力円から図 2(b)の応力テンソルを求めよ.

n-t 座標系は *x-y* 座標系を反時計回りに θ=60°回転させた座標系である．よって，モールの応力円上では反時計回りに 2θ＝120°回転させる.

図 2.1 に示すように角度を α とおくと， α は以下のように求められる.

$$\tan\alpha = \left|\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_c}\right| = \left|\frac{2\sqrt{3}}{-1-1}\right| = \sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha = 60° \tag{2.4}$$

よって，座標回転後(図 2(b))のモールの応力円は図 2.2 のようになる．

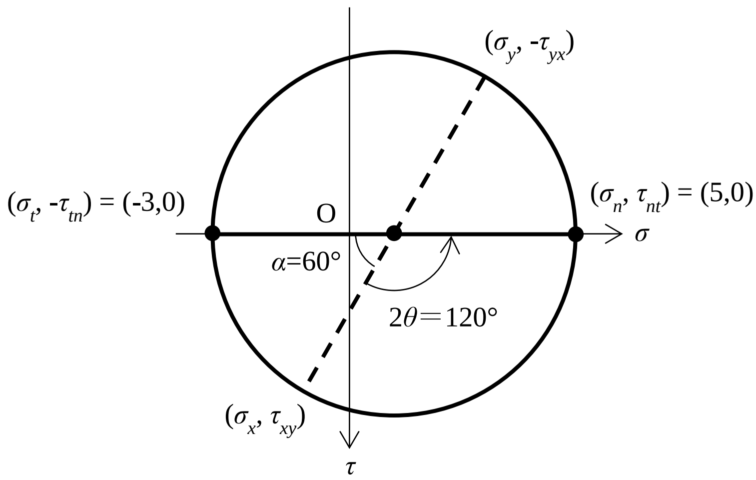

Fig. 2.2 図 2(b)におけるモールの応力円.

以上より，図 2(b)の応力テンソルは式(2.5)のようになる．

$$[\sigma'] = \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}] \tag{2.5}$$

(3) 図 2(a)について座標変換を行うことで図 2(b)の応力テンソルを求め，これが(2)の結果と一致することを示せ.

x-y 座標系における応力テンソルを[σ]とする．x-y 座標系から θ 回転させた x'-y'座標系における応力テンソル[σ’]は，座標変形マトリックス[L]を用いると以下のように表される．

$$[\sigma'] = [L][\sigma]\left[L^{-1}\right] \tag{2.6}$$

よって，x-y 座標系から反時計回りに 60°回転させた n-t 座標系における応力テンソルは式(2.7)のように表される．

$$
\begin{aligned}
[\sigma'] &= \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 60° & \sin 60° \\ -\sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{[MPa]}
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

(3)の結果は(2)と一致している．

(4) 図 2(c)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ．

図 2(c)において *n*-*t* 座標系で与えられた応力テンソルは式(2.8)のようになる．

$$
[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{[MPa]} \tag{2.8}
$$

応力テンソルより，図 2.3 のようなモールの応力円が描ける．

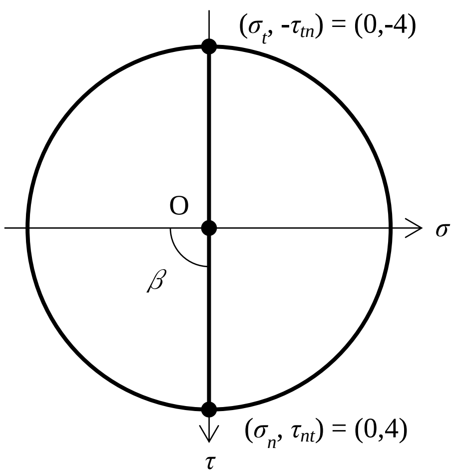

Fig. 2.3 図 2(c)におけるモールの応力円．

また，応力テンソルより，モールの応力円の中心と半径は以下のように求められる．

$$\text{中心：}\left(\sigma_c,\tau_c\right)=\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_n+\sigma_t\right),0\right)=\left(\frac{1}{2}\left(0+0\right),0\right)=\left(0,0\right)\,[\text{MPa}] \tag{2.9}$$

$$\text{半径：}\ r=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_n-\sigma_t\right)^2+4\tau_{nt}{}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(0-0\right)^2+4\left(4\right)^2}=4\,[\text{MPa}] \tag{2.10}$$

(5) (4)で描いたモールの応力円から図 2(d)の応力テンソルを求めよ．

x-y 座標系は n-t 座標系を反時計回りに θ=30°回転させた座標系である．よって，モールの応力円上では反時計回りに 2θ＝60°回転させる．図 2.3 に示すように角度を β とおくと，明らかに β=90°である．

座標回転後(図 2(d))のモールの応力円は図 2.4 のようになる．

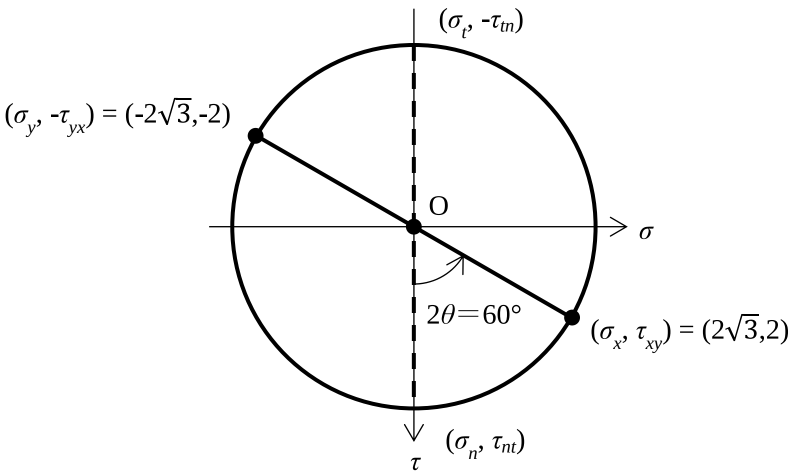

Fig. 2.4 図 2(d)におけるモールの応力円．

以上より，図 2(d)の応力テンソルは式(2.5)のようになる．

$$\left[\sigma'\right]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3} & 2\\ 2 & -2\sqrt{3}\end{pmatrix}[\text{MPa}] \tag{2.11}$$

(6) 図 2(c)について座標変換を行うことで図 2(d)の応力テンソルを求め，これが(5)の結果と一致することを示せ．

よって，n-t 座標系から時計回りに 30°回転させた x-y 座標系における応力テンソルは式(2.12)のように表される．

$$
\begin{aligned}
[\sigma'] &= \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{tn} & \sigma_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ 2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}]
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

(6)の結果は(5)と一致している.