材料の力学 1　Step 1　第 2 回演習問題（2021/4/20 実施）

[1] 図 1(a)のように長さ L，断面積 $2A$ の丸棒と長さ L，断面積 A の丸棒からなる部材が点 O において壁に固定されており，部材の OA 間 $L \leq x \leq 2L$ に分布荷重 p が x 軸方向に一様に作用しているとする．図 1(a)においては点 B で拘束されていないが，図 1(b)において点 O’, B’において壁に固定されている．棒のヤング率を E として以下の問いに答えよ．ただし，壁は変形しない．

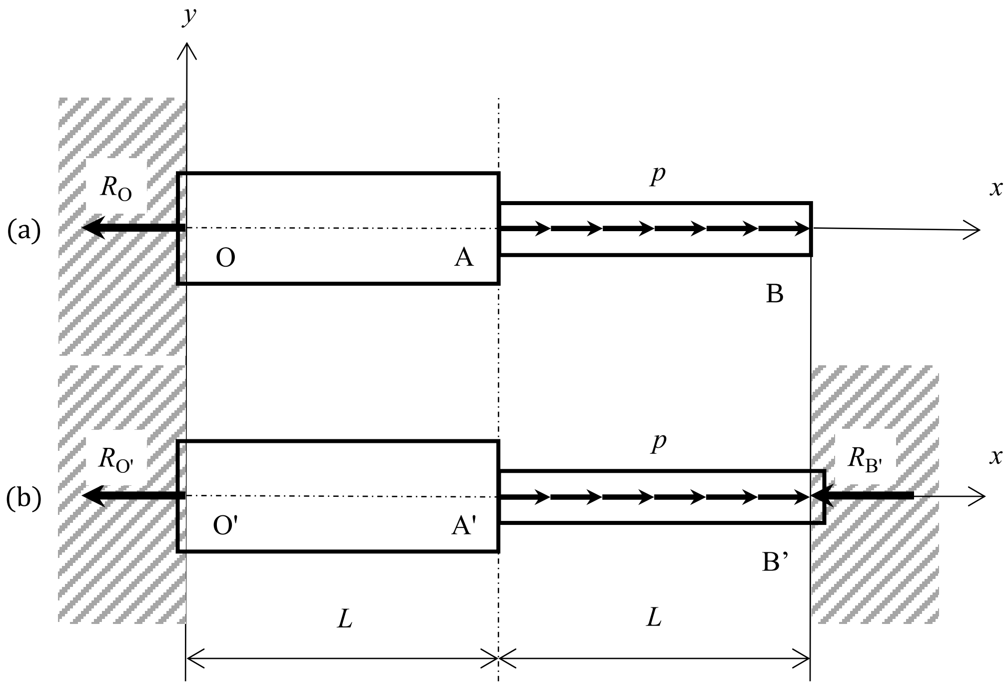

Fig.1 片端固定及び両端固定され分布荷重 p が働く棒.

図 1(a)について，

(1) 点 O での壁からの反力を R_O として FBD を描き，R_O を求めよ.

(2) 点 B の変位 δ_B を求めよ.

図 1(b)について

(3) 点 O’，B’における壁からの反力をそれぞれ $R_{O'}$，$R_{B'}$ として FBD を描け.

(4) 点 B’の変位 $\delta_{B'}=0$ となることから，壁からの反力 $R_{O'}$, $R_{B'}$ を求めよ.（必ず FBD を書くこと）

[1]

(1) 点 O での壁からの反力を $\boldsymbol{R}_{\mathrm{O}}$ として FBD を描き，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{O}}$ を求めよ．

(a)の FBD は以下のように描ける．

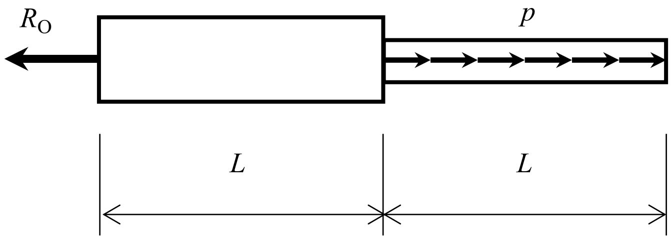

Fig.1.1 (a) FBD

つりあいの式により，反力 R_o は以下のように求められる．

$$-R_o+pL=0$$
$$R_o=pL \tag{1.1}$$

(2) 点 B の変位δ_Bを求めよ．

(a)の FBD は原点からの距離 x によって以下のように描ける．

(i)$0\leq x<L$のとき

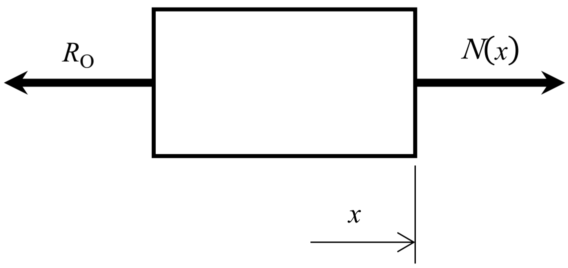

Fig.1.2 (a) FBD ($0\leq x<L$).

つりあいの式により，軸力 $N(x)$は以下のように求められる．

$$-R_o+N(x)=0$$
$$N(x)=R_o=pL \tag{1.2}$$

このとき断面積は $2A$ より垂直応力$\sigma(x)$は

$$\sigma(x)=\frac{N(x)}{2A}=\frac{pL}{2A} \tag{1.3}$$

(ii)$L \le x < 2L$のとき

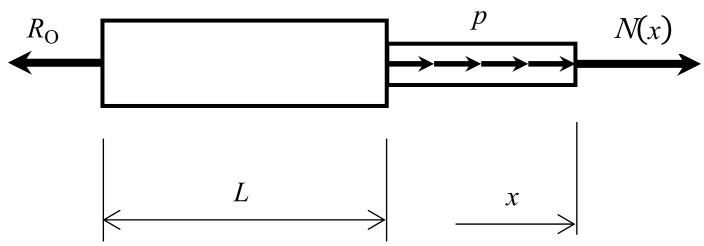

Fig.1.3 (a) FBD ($L \le x < 2L$).

つりあいの式により，軸力 $N(x)$は以下のように求められる．

$$-R_o+p(x-L)+N(x)=0$$
$$N(x)=R_o+p(L-x)=p(2L-x) \tag{1.4}$$

このとき断面積は A より垂直応力$\sigma(x)$は

$$\sigma(x)=\frac{N(x)}{A}=\frac{p(2L-x)}{A} \tag{1.5}$$

よって，(a)の垂直応力$\sigma(x)$の x 方向変化は以下のように表される．

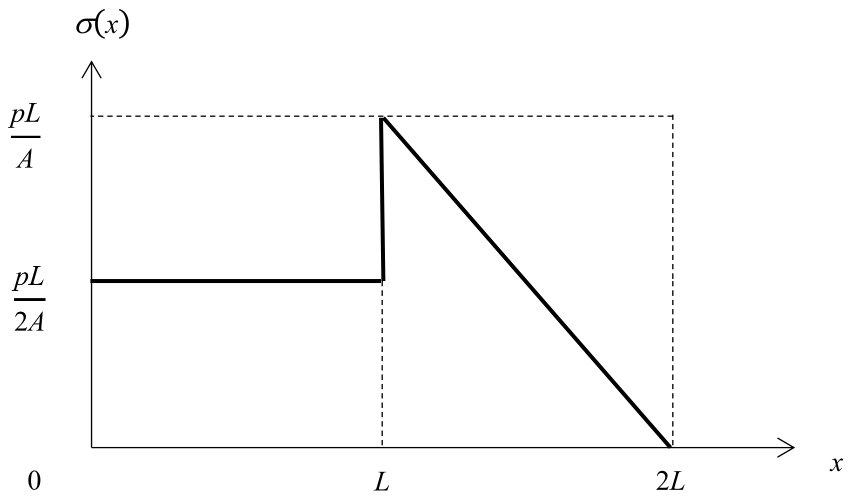

Fig.1.4 (a) 垂直応力.

変位量δは垂直応力を用いて次式で表される．

$$\delta=\int \frac{\sigma(x)}{E}dx \tag{1.6}$$

したがって，点 B の変位量δ_Bは式(1.3)，(1.5)により各範囲で積分を行い以下のように求められる．

$$\begin{aligned}\delta_B&=\int_0^{2L}\frac{\sigma(x)}{E}dx\\&=\frac{1}{E}\left[\int_0^L \sigma(x)\,dx+\int_L^{2L}\sigma(x)\,dx\right]\\&=\frac{1}{E}\left[\int_0^L \frac{pL}{2A}dx+\int_L^{2L}\frac{p(2L-x)}{A}dx\right]\\&=\frac{1}{E}\left[\frac{pL^2}{2A}+\frac{pL^2}{2A}\right]\\&=\frac{pL^2}{EA}\end{aligned} \tag{1.7}$$

(3) 点 O'，B'における壁からの反力をそれぞれ $\boldsymbol{R_{O'}}$，$\boldsymbol{R_{B'}}$として FBD を描け．

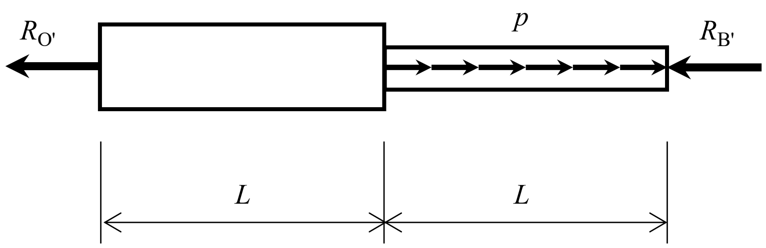

Fig.1.5 (b) FBD

(4) 点 B'の変位$\boldsymbol{\delta_{B'}}$=0 となることから，壁からの反力 $\boldsymbol{R_{O'}}$, $\boldsymbol{R_{B'}}$を求めよ．

(b)の FBD は原点からの距離 x によって以下のように描ける．

(i)$0\leq x<L$のとき

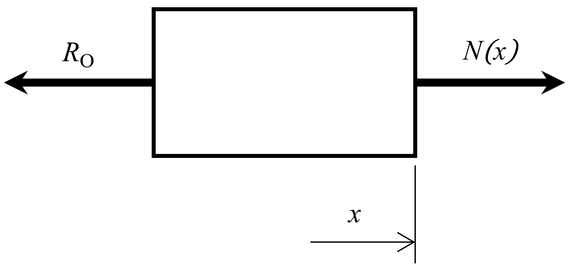

Fig.1.6 (b) FBD ($0\leq x<L$).

つりあいの式により，軸力 $N(x)$は以下のように求められる．

$$-R_{o'}+N(x)=0$$
$$N(x)=R_{o'} \tag{1.8}$$

このとき断面積は $2A$ より垂直応力$\sigma'(x)$は

$$\sigma'(x)=\frac{N(x)}{2A}=\frac{R_{o'}}{2A} \tag{1.9}$$

(ii)$L\leq x<2L$のとき

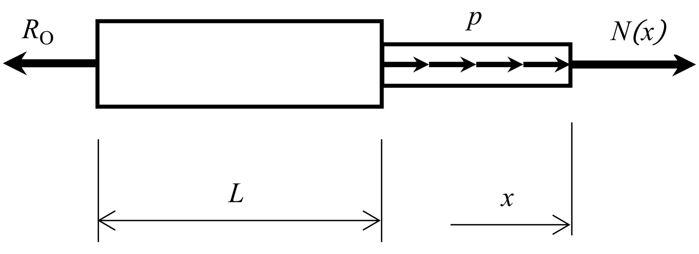

Fig.1.7 (b) FBD ($L\leq x<2L$).

つりあいの式により，軸力 $N(x)$は以下のように求められる．

$$-R_{o'}+p(x\text{-}L)+N(x)=0$$
$$N(x)=R_{o'}+p\left(L\text{-}x\right) \tag{1.10}$$

このとき断面積はAより垂直応力$\sigma'(x)$は

$$\sigma'(x)=\frac{N(x)}{A}=\frac{R_{o'}+p(L-x)}{A} \tag{1.11}$$

したがって，点 B’の変位量$\delta_{B'}$は式(1.9)，(1.11)により各範囲で積分を行い以下のように求められる．

$$\begin{aligned}\delta_B&=\int_0^{2L}\frac{\sigma'(x)}{E}dx\\&=\frac{1}{E}\left[\int_0^L\sigma'(x)\,dx+\int_L^{2L}\sigma'(x)\,dx\right]\\&=\frac{1}{E}\left[\int_0^L\frac{R_{o'}}{2A}dx+\int_L^{2L}\frac{R_{o'}+p(L-x)}{A}dx\right]\\&=\frac{1}{E}\left[\frac{R_{o'}L}{2A}+\left(\frac{R_{o'}L}{A}-\frac{pL^2}{2A}\right)\right]\\&=\frac{3R_{o'}L-pL^2}{2EA}\end{aligned} \tag{1.12}$$

よって，点 B’の変位$\delta_{B'}=0$となることから，壁からの反力$R_{O'}$は次のように求められる．

$$\begin{aligned}\frac{3R_{o'}L-pL^2}{2EA}&=0\\R_{o'}&=\frac{1}{3}pL\end{aligned} \tag{1.13}$$

また，(3)の FBD よりつり合いの式は次式となることから，壁からの反力$R_{B'}$は次のように求められる．

$$\begin{aligned}-R_{o'}+pL-R_{B'}&=0\\R_{B'}&=\frac{2}{3}pL\end{aligned} \tag{1.14}$$

[2] 微小弾性体が図 2 に示す応力状態にある($\tau_{xy}=\tau_{yx}=0$)．このとき以下の問いに答えよ．ただし，$\overline{\mathrm{OB}}=\mathrm{S}$ とし，z 軸方向厚さは単位長さ，$-90°\leq\theta\leq 90°$とする．

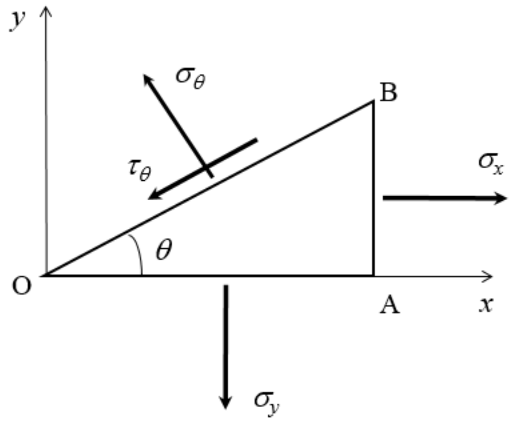

Fig.2　応力状態にある微小弾性体

(1)図 2 において，力のつり合い式を立て，σ_θ，τ_θをそれぞれσ_x，σ_y，θを用いて表せ．

(2) $\sigma_x=\sigma$，$\sigma_y=-\sigma$としたとき，(1)の結果を用いて，$\sigma_\theta=\tau_\theta$を満足する$\theta$を求めよ．

(3) $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$としたとき, σ_θはθに依存せず最大となることを確認し, そのときのτ_θを求めよ．

(1)図 2 において，力のつり合い式を立て，σ_θ，τ_θをそれぞれσ_x，σ_y，θを用いて表せ．
　微小弾性体に作用する x，y 方向それぞれの力のつり合い式をたてると，

$$\sigma_x \cdot \overline{\mathrm{AB}} - \sigma_\theta \sin\theta \cdot \overline{\mathrm{OB}} - \tau_\theta \cos\theta \cdot \overline{\mathrm{OB}} = 0 \tag{2.1}$$

$$-\sigma_y \cdot \overline{\mathrm{OA}} + \sigma_\theta \cos\theta \cdot \overline{\mathrm{OB}} - \tau_\theta \sin\theta \cdot \overline{\mathrm{OB}} = 0 \tag{2.2}$$

それぞれ，$\overline{\mathrm{OB}}=\mathrm{S}$，$\overline{\mathrm{OA}}=\mathrm{S}\cos\theta$，$\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{S}\sin\theta$を代入して整理すると，

$$\sigma_x \sin\theta - \sigma_\theta \sin\theta - \tau_\theta \cos\theta = 0 \tag{2.3}$$

$$-\sigma_y \cos\theta + \sigma_\theta \cos\theta - \tau_\theta \sin\theta = 0 \tag{2.4}$$

式(2.3)×($-\sin\theta$)＋式(2.4)×$\cos\theta$と，式(2.3)×$\cos\theta$＋式(2.4)×$\sin\theta$より，

$$-\sigma_x \sin^2\theta - \sigma_y \cos^2\theta + \sigma_\theta = 0 \tag{2.5}$$

$$\sigma_x \sin\theta\cos\theta - \sigma_y \sin\theta\cos\theta - \tau_\theta = 0 \tag{2.6}$$

式(2.5)，(2.6)より

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta \tag{2.7}$$

$$\tau_\theta = \left(\sigma_x - \sigma_y\right) \sin\theta\cos\theta \tag{2.8}$$

と求められる(τ_θは$\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sin 2\theta/2$でも可)．

(2) $\sigma_x=\sigma$，$\sigma_y=-\sigma$としたとき，(1)の結果を用いて，$\sigma_\theta=\tau_\theta$を満足する$\theta$を求めよ．
　式(2.7)，(2.8)に代入すると，

$$\sigma_\theta = \sigma\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) = -\sigma\cos 2\theta \tag{2.9}$$

$$\tau_\theta = 2\sigma \sin\theta\cos\theta = \sigma\sin 2\theta \tag{2.10}$$

となる．以上より，$\sigma_\theta=\tau_\theta$を満たすのは，

$$\theta = -\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi \tag{2.11}$$

のときである．

(3) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$としたとき, σ_θはθに依存せず最大となることを確認し, そのときのτ_θを求めよ.
式(2.7)より,

$$\sigma_\theta = \sigma\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = \sigma \cdot 1 = \sigma \tag{2.12}$$

となることから，σ_θはθに依存せず最大となる．そのときのτ_θは，式(2.8)より,

$$\tau_\theta = (\sigma - \sigma)\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{2.13}$$

と求められる.