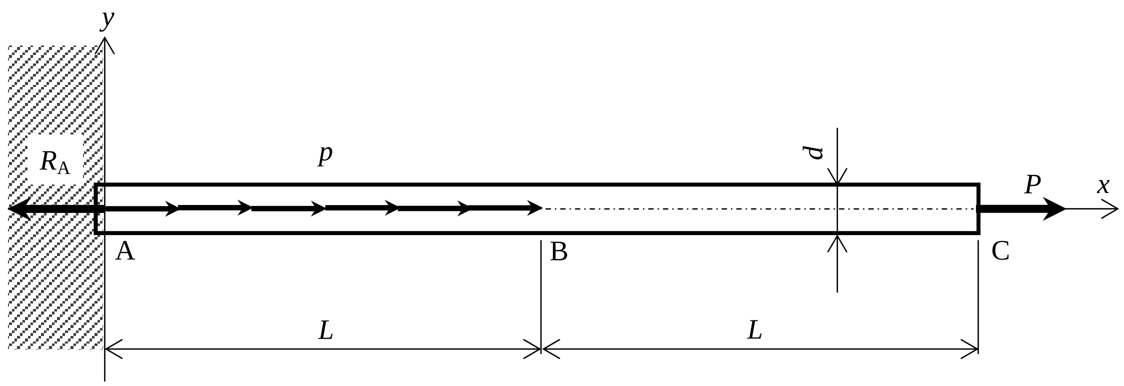
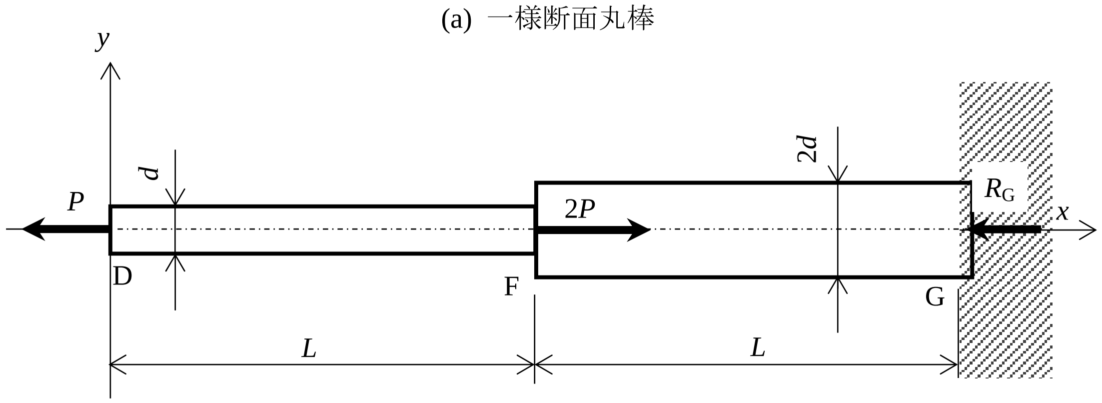
材料の力学 1　Step 1　第 1 回演習問題（2021/4/13 実施）

[1]　一端が壁に固定された一様断面丸棒(a)，段付き丸棒(b)がある．(a)は長さ $2L$，直径 d の丸棒が A で壁に固定されており，AB 間に分布荷重 p が x 軸正方向，C に外力 P が x 軸正方向にそれぞれ作用している．(b)は長さ L，直径 d の丸棒と長さ L，直径 $2d$ の丸棒からなる段付き丸棒が G で壁に固定されており，D に外力 P が x 軸負方向，F に外力 $2P$ が x 軸正方向に作用している．壁からの反力 R_A，R_G を図 1 のように仮定し，以下の問いに答えよ．ただし，各部材のヤング率 E とする．



(a)　一様断面丸棒



(b)　段付き丸棒

Fig. 1　壁に固定された棒状部材

(1)　各部材の FBD をそれぞれ描き，壁からの反力 R_A，R_G を求めよ．

(2)　各部材に作用している軸力 $N(x)$の x 方向変化を縦軸:N, 横軸:x としてそれぞれ図示せよ．

(3)　各部材に作用している垂直応力$\sigma(x)$の x 方向の変化を考え，さらに，各部材について，x 軸方向の変位δ_a，δ_b をそれぞれ求めよ．ただし，変位量δは次式で表される．

$$\delta = \int \varepsilon(x)\,dx$$

[1]

(1) 各部材の FBD をそれぞれ描き，壁からの反力 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}$ を求めよ.

(a)の FBD は以下のように描ける.

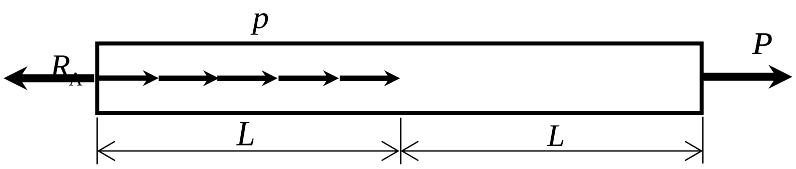


Fig.1.1 (a) FBD.

つりあいの式により，反力 R_{A} は以下のように求められる.

$$-R_{\mathrm{A}} + pL + P = 0 \tag{1.1}$$

$$R_{\mathrm{A}} = P + pL$$

(b)の FBD は以下のように描ける.

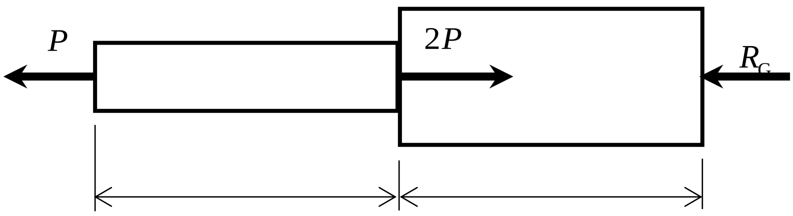


Fig.1.2 (b) FBD.

つりあいの式により，反力 R_{G} は以下のように求められる.

$$-P + 2P - R_{\mathrm{G}} = 0 \tag{1.2}$$

$$R_{\mathrm{G}} = P$$

(2)　各部材に作用している軸力 *N*(*x*)の *x* 方向変化を縦軸:*N*，横軸:*x* としてそれぞれ図示せよ．

(a)の FBD は原点からの距離 x によって以下のように描ける．

(i) $0 \le x < L$

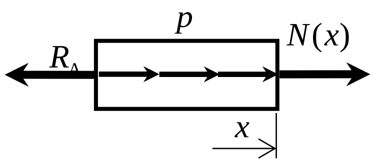


Fig.1.3 (a) FBD ($0 \le x < L$).

つりあいの式により，軸力 $N(x)$は以下のように求められる．

$$-R_A + px + N(x) = 0$$

$$\begin{aligned} N(x) &= R_A - px \\ &= P + p\left(L - x\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

(ii) $L \le x < 2L$

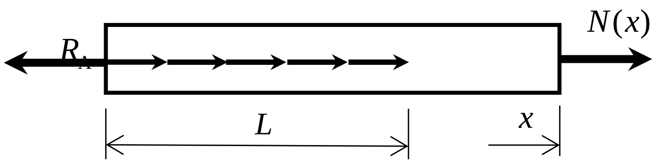


Fig.1.4 (a) FBD ($L \le x < 2L$).

つりあいの式により，軸力 $N(x)$は以下のように求められる．

$$-R_A + pL + N\left(x\right) = 0$$

$$\begin{aligned} N(x) &= R_A - pL \\ &= P \end{aligned} \tag{1.4}$$

よって，(a)における軸力 $N(x)$の x 方向の変化は以下のように表される．

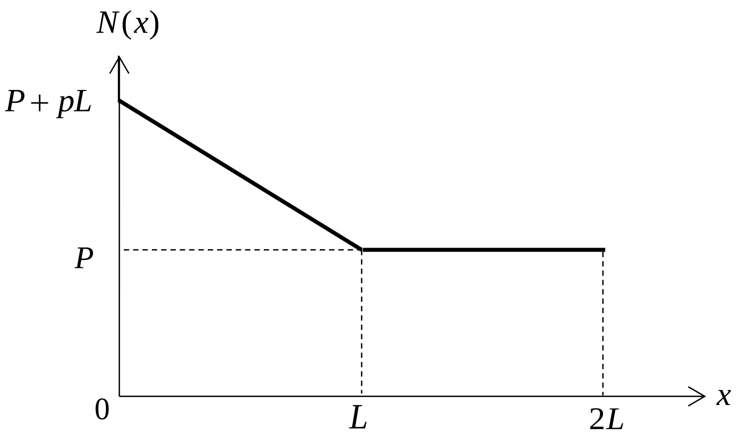


Fig.1.5 (a) 軸力.

(b)の FBD も距離 x によって以下のように描ける.

(i) $0 \le x < L$

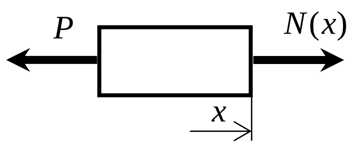


Fig.1.6 (b) FBD ($0 \le x < L$).

つりあいの式より軸力 $N(x)$は以下のように求められる.

$$-P + N(x) = 0$$

$$N(x) = P \tag{1.5}$$

(ii) $L \le x < 2L$

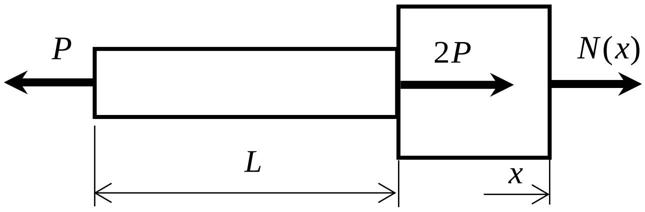


Fig.1.7 (b) FBD ($L \le x < 2L$).

つりあいの式より軸力 $N(x)$は以下のように求められる．

$$-P+2P+N\left(x\right)=0$$

$$N(x)=-P \tag{1.6}$$

よって，(b)における軸力 $N(x)$の x 方向の変化は以下のように表される．

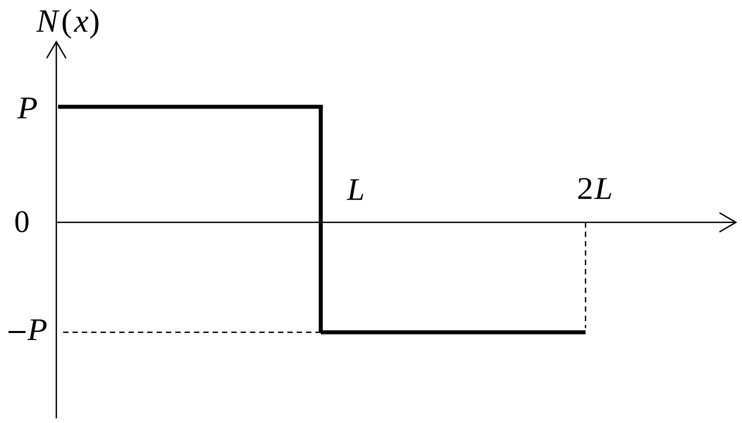


Fig.1.8 (b) 軸力.

(3) 各部材に作用している垂直応力$\sigma(x)$の x 方向の変化を考え，さらに，各部材について，x 軸方向の変位δ_a，δ_b をそれぞれ求めよ．ただし，変位量δは次式で表される．

$$\delta=\int\varepsilon(x)dx \tag{1.7}$$

原点からの距離xにおける仮想断面に作用する垂直応力は断面積をSとすると以下の式によって表される．

$$\sigma(x)=\frac{N(x)}{S} \tag{1.8}$$

(a)の断面積 S_a は次式で表される．

$$S_a=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{\pi d^2}{4} \tag{1.9}$$

よって，(a)の垂直応力 σ_a は以下のように求められる．

$$\sigma_{\mathrm{a}}(x) = \frac{4}{\pi d^2}(P + pL - px)\left(0 \le x \le L\right) \tag{1.10}$$

$$\sigma_{\mathrm{a}}\left(x\right) = \frac{4}{\pi d^2}P\left(L \le x \le 2L\right) \tag{1.11}$$

以上により，(a)の垂直応力の x 方向変化を図示すると以下のようになる.

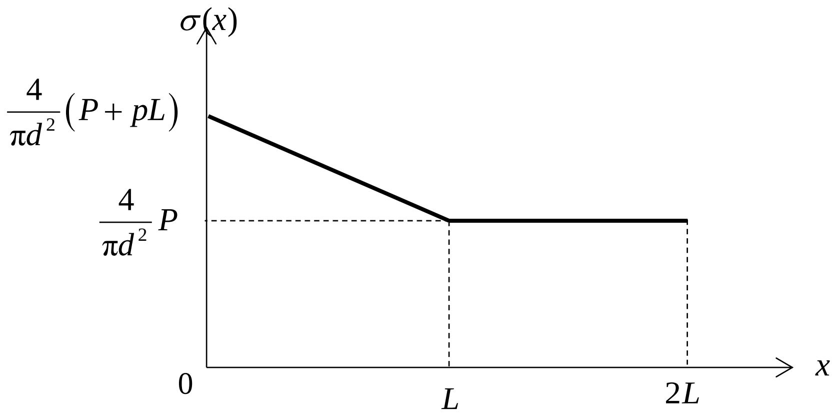


Fig.1.9 (a) 垂直応力.

(b)の断面積 S_{b} は以下のようになる.

$$S_{\mathrm{b}} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}\,(0 \le x < L) \tag{1.12}$$

$$S_{\mathrm{b}} = \pi d^2\,(L \le x < 2L) \tag{1.13}$$

よって，(b)の垂直応力 σ_{b} は以下のように求められる.

$$\sigma_{\mathrm{b}}(x) = \frac{4}{\pi d^2}P\left(0 \le x \le L\right) \tag{1.14}$$

$$\sigma_{\mathrm{b}}\left(x\right) = -\frac{P}{\pi d^2}\left(L \le x \le 2L\right) \tag{1.15}$$

以上により，(b)の垂直応力の x 方向変化を図示すると以下のようになる．

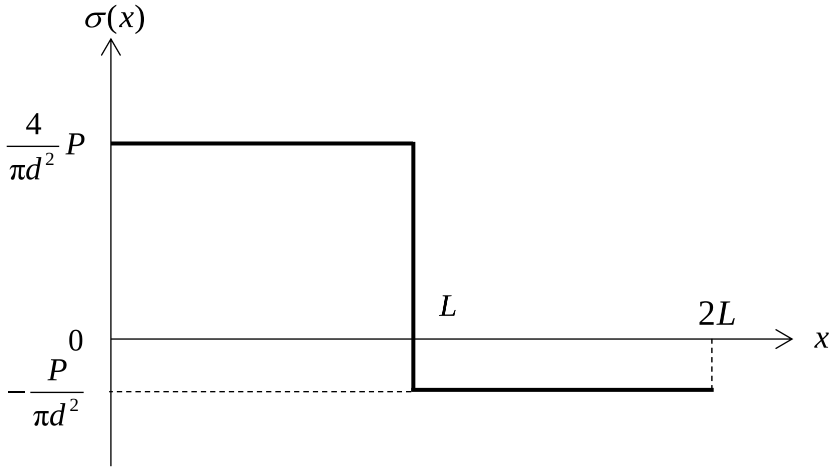


Fig.1.10 (b) 垂直応力.

応力とひずみの関係式

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{1.16}$$

により，各部材の変位量 δ は以下のように表される．

$$\delta = \int \varepsilon(x)dx = \int \frac{\sigma(x)}{E}dx \tag{1.17}$$

(a)の変位量 δ_{a} は

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{a}} &= \int_0^{2L} \frac{\sigma_{\mathrm{a}}}{E}dx \\
&= \frac{1}{E}\left[\int_0^L \sigma_{\mathrm{a}}(x)dx + \int_L^{2L} \sigma_{\mathrm{a}}(x)dx\right] \\
&= \frac{1}{E}\left\{\int_0^L \frac{4}{\pi d^2}(P + pL - px)dx + \int_L^{2L} \frac{4}{\pi d^2}Pdx\right\} \\
&= \frac{4}{\pi E d^2}\left\{\left(PL + \frac{1}{2}pL^2\right) + PL\right\} \\
&= \frac{2L}{\pi E d^2}(4P + pL)
\end{aligned} \tag{1.18}$$

(a)は伸びる．

(b)の変位量 δ_{b} は

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{b}} &= \int_0^{2L} \frac{\sigma_{\mathrm{b}}}{E} dx \\
&= \frac{1}{E}\left[\int_0^{L} \sigma_{\mathrm{b}}\left(x\right) dx + \int_L^{2L} \sigma_{\mathrm{b}}\left(x\right) dx\right] \\
&= \frac{1}{E}\left\{\int_0^{L} \frac{4P}{\pi d^2} dx + \int_L^{2L}\left(-\frac{P}{\pi d^2}\right) dx\right\} \\
&= \frac{P}{\pi E d^2}\left\{4L - \left(2L - L\right)\right\} \\
&= \frac{3PL}{\pi E d^2}
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

(b)は伸びる.

[2] 図 2 に示すように，先端が平坦な丸棒(パンチ，直径 d=60 mm)で，固定された厚さ t =0.45mm の平板に荷重 P を加え，パンチ穴を開けることを考える．このときパンチ及び押さえの台は変形しないものとして，以下の問いに答えよ．なお図 2 の平板の厚さは誇張して描いてある．

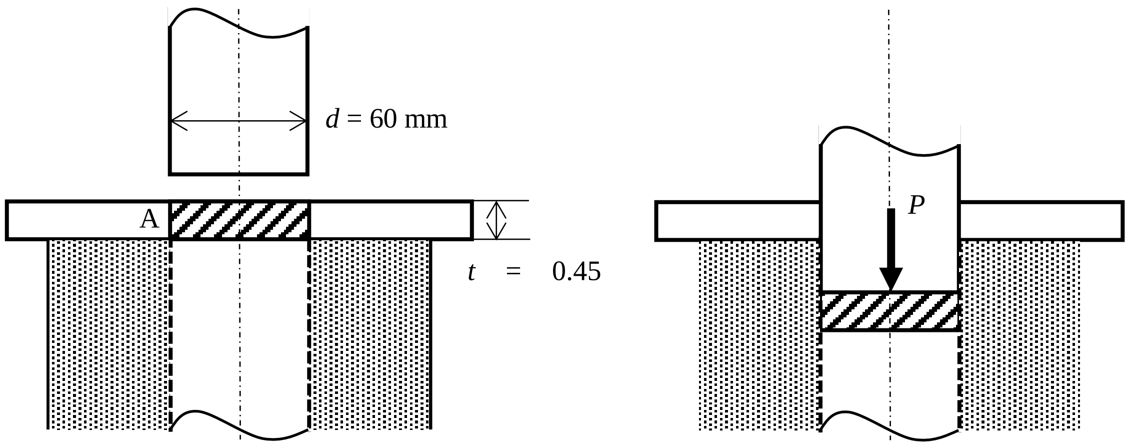


Fig.2 パンチ

(1) 斜線部 A において FBD を描き，斜線部 A の縁に作用するせん断力 Q を求めよ．

(2) 平板のせん断強度が τ_u＝100 [MPa] であるとき，この平板にパンチ穴を開けるために必要な荷重 P[N]はいくら以上であるか．有効数字 3 桁で答えよ

[2]

(1)　斜線部 A において FBD を描き，斜線部 A の縁に作用するせん断力 *Q* を求めよ.

斜線部 A の FBD は次のようになる.

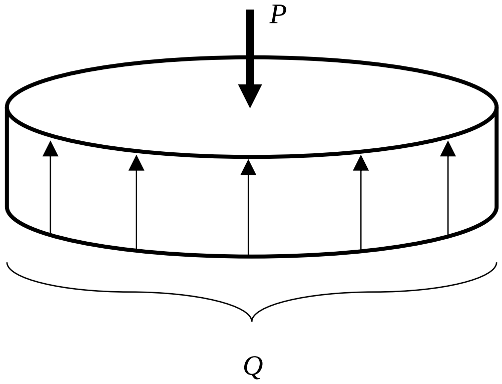


Fig. 2.1 FBD

これより，斜線部 A の縁にかかるせん断力 Q は力のつりあいより

$$
\begin{aligned}
&-P+Q=0 \\
&\therefore Q=P
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

と求められる.

(2)　平板のせん断強度が $\boldsymbol{\tau_u}$＝100[MPa]　であるとき, この平板にパンチ穴を開けるために必要な荷重 *P*[N]はいくら以上であるか.　有効数字 3 桁で答えよ.

まず，斜線部 A の縁の部分の面積を S とすると，

$$S=\pi dt \tag{2.2}$$

となり，斜線部 A の縁でのせん断応力 τ は

$$\tau=\frac{Q}{S}=\frac{P}{\pi dt} \tag{2.3}$$

と表される.

このとき，平板にパンチ穴をあけるには以下の条件式を満たしていればよい．

$$\tau \geq \tau_u \tag{2.4}$$

式(2.4)に式(2.3)と各値を代入することで，荷重 P の条件は次のように求められる．

$$\begin{aligned} \frac{P}{\pi d t} &\geq \tau_u \\ \therefore P &\geq 8478\left[N\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

以上より，平板にパンチ穴をあけるには荷重が **<u>8.48×10^3[N]</u>**以上であればよい．

（本解答では円周率を3.14とした. 円周率を3.141…とした際, 答えは8.49×10^3[N] となる.）