

材料の力学1 Step 3 第12回演習問題（2019/7/16 実施）

- [1] 図1に示すように、直線的に変化する分布荷重 $f(x)$ を受ける長さ $2L$ の片持ちはりを考える（ただし、 $f(0)=0$, $f(2L)=f_0$ である）。なお、はりの曲げ剛性は EI_z とする。このとき以下の問い合わせに答えよ。

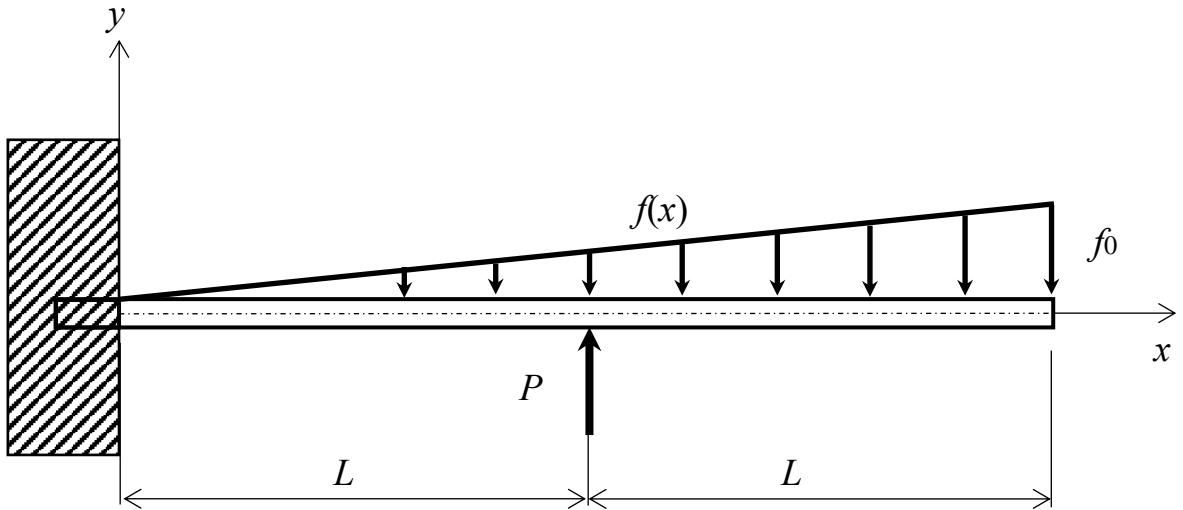


Fig.1 片持ちはり。

- (1) はりに作用する分布荷重 $f(x)$ を f_0 , x , L を用いて表せ。
- (2) はり全体のFBDを描き、壁から受ける反力 R_0 と反モーメント M_0 を求めよ。本問以降、 $f_0L = \frac{5}{4}P$ とし、解答にあたっては P を用いよ。
- (3) はりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示せよ（分布荷重 $f(x)$ によって生じる曲げモーメントを特異関数表示するには $f(x)$ を2回積分する）。
- (4) $x=2L$ においてはりに生じたたわみ v を求めよ。

(1) はりに作用する分布荷重 $f(x)$ を f_0 , x , L を用いて表せ.

分布荷重 $f(x)$ は、はりの端点に着目すると $f(0)=0$, $f(2L)=f_0$ であるので、式(1.1)のように表せる.

$$f(x) = \frac{f_0}{2L} x \quad (1.1)$$

(2) はり全体の FBD を描き、壁から受ける反力 R_O と反モーメント M_O を求めよ. 本問以降、 $f_0 L = \frac{5}{4} P$ とし、解答にあたっては P を用いよ.

はり全体の FBD は以下のように表される.

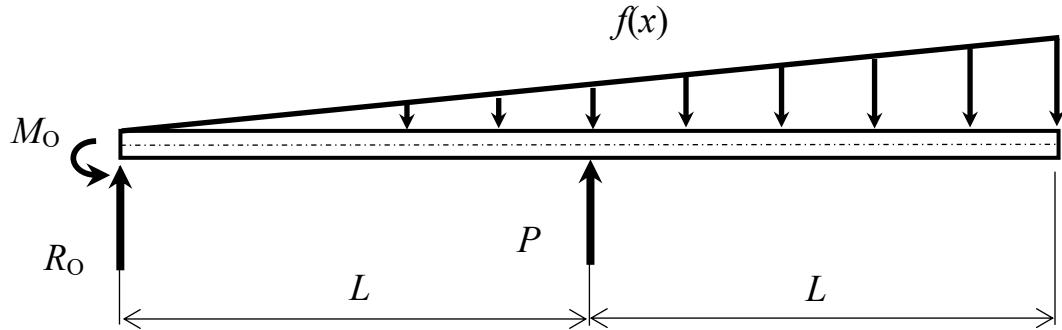


Fig.1.1 はり全体の FBD.

図 1.1 より、力のつり合い式から反力 R_O は、

$$\begin{aligned} R_O + P - \int_0^{2L} f(x) dx &= 0 \\ R_O &= f_0 L - P \\ &= \frac{1}{4} P \end{aligned} \quad (1.2)$$

原点まわりのモーメントのつり合い式から反モーメント M_O は、

$$\begin{aligned}
-M_O + \int_0^{2L} f(x) \cdot x dx - PL &= 0 \\
M_O &= \int_0^{2L} \frac{f_0 x^2}{2L} dx - PL \\
&= \frac{4}{3} f_0 L^2 - PL \\
&= \frac{2}{3} PL
\end{aligned} \tag{1.3}$$

(3) はりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示せよ (分布荷重 $f(x)$ によって生じる曲げモーメントを特異関数表示するには $f(x)$ を2回積分する) .

分布荷重 $f(x)$ によって生じる曲げモーメントを特異関数表示するには $f(x)$ を2回積分すればよいので、式(1.4)のように表される.

$$\text{分布荷重 } f(x) \text{ によって生じる曲げモーメントの特異関数: } \frac{f_0}{12L} \langle x \rangle^3 = \frac{5P}{48L^2} \langle x \rangle^3 \tag{1.4}$$

ゆえに、はりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示すると式(1.2), (1.3)を踏まえ、

$$\begin{aligned}
M(x) &= M_O \langle x \rangle^0 - R_O \langle x \rangle^1 + \frac{5}{48} \frac{P}{L^2} \langle x \rangle^3 - P \langle x - L \rangle^1 \\
&= \frac{2}{3} PL \langle x \rangle^0 - \frac{1}{4} P \langle x \rangle^1 + \frac{5}{48} \frac{P}{L^2} \langle x \rangle^3 - P \langle x - L \rangle^1
\end{aligned} \tag{1.5}$$

(4) $x=2L$ においてはりに生じるたわみ v を求めよ.

はりのたわみの基礎式に式(1.5)を適用し積分すると、積分定数 C_1, C_2 を用いて以下のように表すことができる.

$$-EI_z v''(x) = M(x) = \frac{2}{3} PL \langle x \rangle^0 - \frac{1}{4} P \langle x \rangle^1 + \frac{5}{48} \frac{P}{L^2} \langle x \rangle^3 - P \langle x - L \rangle^1 \tag{1.6}$$

$$-EI_z v'(x) = \frac{2}{3} PL \langle x \rangle^1 - \frac{1}{8} P \langle x \rangle^2 + \frac{5}{192} \frac{P}{L^2} \langle x \rangle^4 - \frac{1}{2} P \langle x - L \rangle^2 + C_1 \tag{1.7}$$

$$-EI_z v(x) = \frac{1}{3} PL \langle x \rangle^2 - \frac{1}{24} P \langle x \rangle^3 + \frac{1}{192} \frac{P}{L^2} \langle x \rangle^5 - \frac{1}{6} P \langle x - L \rangle^3 + C_1 x + C_2 \tag{1.8}$$

たわみ角 $v'(x)$ とたわみ $v(x)$ に関して整理して,

$$v'(x) = -\frac{1}{EI_z} \left(\frac{2}{3} PL \langle x \rangle^1 - \frac{1}{8} P \langle x \rangle^2 + \frac{5}{192} \frac{P}{L^2} \langle x \rangle^4 - \frac{1}{2} P \langle x-L \rangle^2 + C_1 \right) \quad (1.9)$$

$$v(x) = -\frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{3} PL \langle x \rangle^2 - \frac{1}{24} P \langle x \rangle^3 + \frac{1}{192} \frac{P}{L^2} \langle x \rangle^5 - \frac{1}{6} P \langle x-L \rangle^3 + C_1 x + C_2 \right) \quad (1.10)$$

ここで, はりが $x=0$ において壁固定されていることから, 境界条件は $v'(0)=v(0)=0$ なので,

$$C_1 = C_2 = 0 \quad (1.11)$$

したがって, たわみ $v(x)$ は,

$$v(x) = -\frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{3} PL \langle x \rangle^2 - \frac{1}{24} P \langle x \rangle^3 + \frac{1}{192} \frac{P}{L^2} \langle x \rangle^5 - \frac{1}{6} P \langle x-L \rangle^3 \right) \quad (1.12)$$

ゆえに, $x=2L$ におけるはりのたわみ v は,

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{3} PL \langle 2L \rangle^2 - \frac{1}{24} P \langle 2L \rangle^3 + \frac{1}{192} \frac{P}{L^2} \langle 2L \rangle^5 - \frac{1}{6} P \langle 2L-L \rangle^3 \right) \\ &= -\frac{PL^3}{EI_z} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) \\ &= -\frac{PL^3}{EI_z} \end{aligned} \quad (1.13)$$

- [2] 図2に示すように、長さ $2L$ のはりがO, B点で支持され、A点には x 軸からの距離 $L/2$ に外力 P が作用した剛体棒が付いている。はりの断面2次モーメントを I 、弾性係数を E として、以下の問い合わせに答えよ。

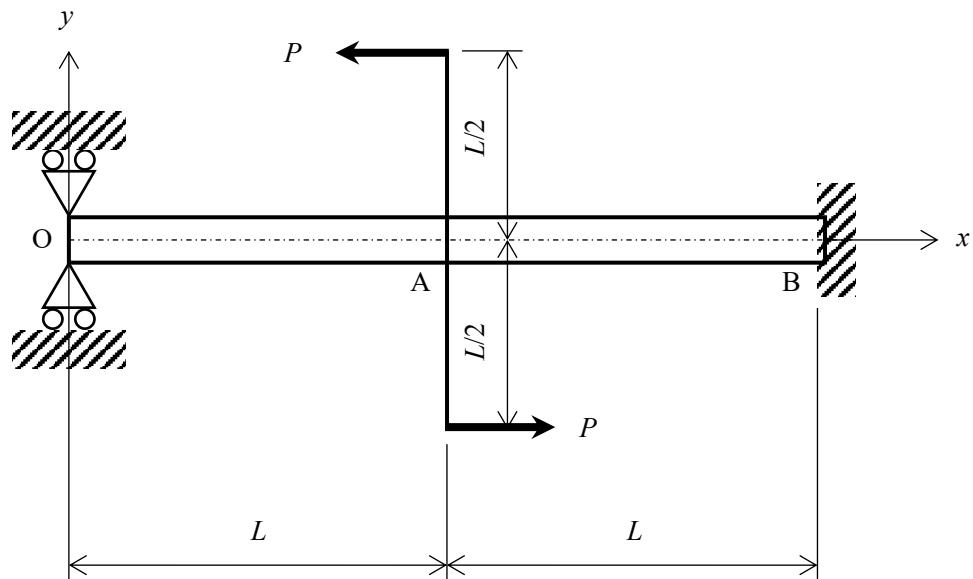


Fig. 2 剛体棒が付いたはり.

- (1) O点における反力を R_O 、B点における反力を R_B 、反モーメントを M_B としてはり全体のFBDを描き、力のつり合い式とO点まわりのモーメントのつり合い式を求めよ。
- (2) はりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示せよ。ただし、 R_O を用いてよい。
- (3) はりのたわみ角 $v'(x)$ 、たわみ $v(x)$ を表す式および反モーメント M_B を求めよ。
- (4) たわみが最大となる x と最大たわみ v_{\max} を求めよ。また、たわみ $v(x)$ の x 方向分布を示せ。

(1) **O** 点における反力を R_O , **B** 点における反力を R_B , 反モーメントを M_B としてはり全体の FBD を描き, 力のつり合い式と **O** 点まわりのモーメントのつり合い式を求めよ.

はり全体の FBD を描くと図 2.1 のようになる. A 点に作用するモーメント M_A は式(2.1)のように求められる.

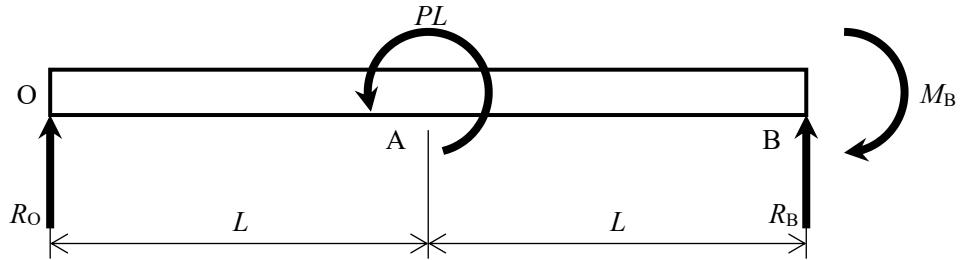


Fig. 2.1 はり全体の FBD.

$$M_A = 2 \cdot P \cdot \frac{L}{2} = PL \quad (2.1)$$

はり全体の力のつり合いの式は以下のようになる.

$$R_O + R_B = 0 \quad (2.2)$$

また, **O** 点まわりのモーメントのつり合いの式は以下のようになる.

$$-PL - 2R_B L + M_B = 0 \quad (2.3)$$

(2) はりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示せよ. ただし, R_O を用いてよい.

はりの曲げモーメント $M(x)$ を特異関数表示すると以下のようになる.

$$M(x) = -R_O \langle x \rangle^1 + PL \langle x - L \rangle^0 \quad (2.4)$$

(3) はりのたわみ角 $v'(x)$, たわみ $v(x)$ を表す式および反モーメント M_B を求めよ.

(2)で求めた特異関数をたわみの基礎式に代入すると以下のように計算される.

$$\begin{aligned}
-EIv'' &= -R_O \langle x \rangle^1 + PL \langle x - L \rangle^0 \\
-EIv' &= -\frac{R_O}{2} \langle x \rangle^2 + PL \langle x - L \rangle^1 + C_1 \\
-EIv &= -\frac{R_O}{6} \langle x \rangle^3 + \frac{PL}{2} \langle x - L \rangle^2 + C_1x + C_2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで、境界条件は $x=0$ において $v=0$, $x=2L$ において $v'=v=0$ である。 $x=0$ のとき $v=0$ より

$$C_2 = 0 \tag{2.6}$$

$x=2L$ のとき $v'=0$ より

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{R_O}{2} (2L)^2 + PL(2L-L) + C_1 \\
\therefore C_1 &= 2R_O L^2 - PL^2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

また、 $x=2L$ のとき $v=0$ より式(2.7)を踏まえると反力 R_O は

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{R_O}{6} (2L)^3 + \frac{PL}{2} (2L-L)^2 + (2R_O L^2 - PL^2) \cdot 2L \\
\therefore R_O &= \frac{9}{16} P
\end{aligned} \tag{2.8}$$

式(2.2)より反力 R_B は

$$R_B = -\frac{9}{16} P \tag{2.9}$$

式(2.3)から反モーメント M_B は以下のようになる。

$$M_B = -\frac{PL}{8} \tag{2.10}$$

式(2.7), (2.8)から C_1 は以下のようになる。

$$C_1 = \frac{PL^2}{8} \quad (2.11)$$

よって、たわみ角 $v'(x)$ とたわみ $v(x)$ は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{EI} \left[\frac{9}{32} P \langle x \rangle^2 - PL \langle x - L \rangle^1 - \frac{PL^2}{8} \right] \\ v(x) &= \frac{1}{EI} \left[\frac{3}{32} P \langle x \rangle^3 - \frac{PL}{2} \langle x - L \rangle^2 - \frac{PL^2}{8} x \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

- (4) たわみが最大となる x と最大たわみ v_{\max} を求めよ。また、たわみ $v(x)$ の x 方向分布を示せ。

たわみ角 $v'(x)$ が 0 となる x を考える。 $0 \leq x \leq L$ でたわみ角 $v'(x)$ が 0 となる x は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{9}{32} x^2 - \frac{PL^2}{8} \right) \\ x^2 &= \frac{4}{9} L^2 \\ \therefore x &= \frac{2}{3} L \end{aligned} \quad (2.13)$$

$x = 2L/3$ のときたわみ v は以下のようになる。

$$\begin{aligned} v\left(\frac{2L}{3}\right) &= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{3P}{32} \left(\frac{2L}{3}\right)^3 - \frac{PL^2}{8} \cdot \frac{2L}{3} \right\} \\ &= -\frac{PL^3}{18EI} \end{aligned} \quad (2.14)$$

また、 $L \leq x \leq 2L$ でたわみ角 $v'(x)$ が 0 となる x は以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{9P}{32}x^2 - PL(x-L) - \frac{PL^2}{8} \right) \\
&= -\frac{P}{32} (9x^2 - 32Lx + 28PL^2) \\
&= (x-2L)(9x-14L) \\
\therefore x &= \frac{14}{9}L, 2L
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$x = 14L/9$ のとき、たわみ v は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
v\left(\frac{14}{9}L\right) &= \frac{1}{EI} \left\{ \frac{3P}{32} \left(\frac{14L}{9}\right)^3 - \frac{PL}{2} \left(\frac{14L}{9} - L\right)^2 - \frac{PL^2}{8} \cdot \frac{14L}{9} \right\} \\
&= \frac{PL^3}{EI} \left(\frac{343}{972} - \frac{25}{162} - \frac{7}{36} \right) \\
&= \frac{PL^3}{243EI}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

よって、たわみ $v(x)$ に関する増減表は表 2.1 のようになる。

Table. 2.1 増減表。

x	0	...	$\frac{2L}{3}$...	$\frac{14L}{9}$...	$2L$
$v'(x)$		-	0	+	0	-	0
$v(x)$	0	↓	$-\frac{PL^3}{18EI}$	↗	$\frac{PL^3}{243EI}$	↓	0

増減表からたわみが最大となる x および最大たわみ v_{\max} は以下のようになる。

$$x = \frac{2L}{3}, \quad v_{\max} = -\frac{PL^3}{18EI} \tag{2.17}$$

また、たわみ $v(x)$ の x 方向分布を以下に示す。

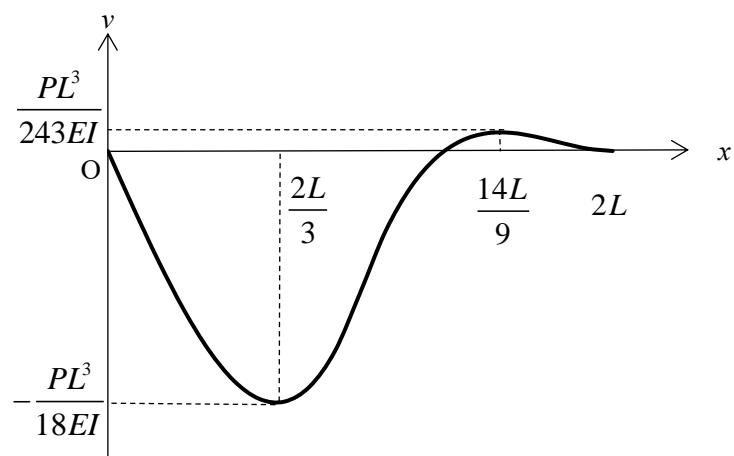


Fig. 2.2 たわみ $v(x)$ の x 方向分布.