材料の力学 1　Step 3　第 10 回演習問題（2019/7/2 実施）

[1]　図 1 のように, 一方の端（点 O）が壁に固定された長さ $4L$ のはりにおいて, 点 A（$x=3L$）に集中荷重 $P=2pL$ が下向き，全体に分布荷重 p が上向きに負荷されている．はりの縦弾性係数を E，断面 2 次モーメントを I として，以下の問いに答えよ．

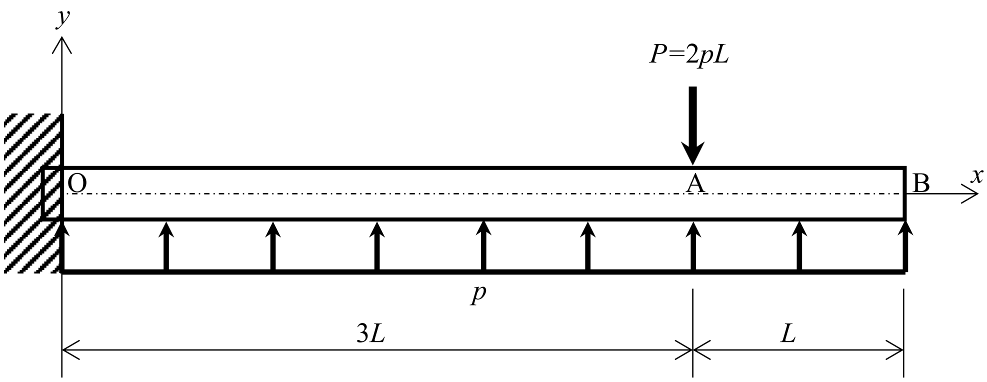

Fig. 1 壁に固定された荷重を受けるはり．

(1)　はりの FBD を描き，点 O に作用する反力 R_O，反モーメント M_O をそれぞれ求めよ．

(2)　はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$をそれぞれ求め，SFD および BMD を図示せよ．

(3)　はりのたわみ角 $v'(x)$およびたわみ $v(x)$に関して成り立つ境界条件を 4 つ求めよ．なお，$0 \le x \le 3L$ でのたわみ角，たわみをそれぞれ $v_1'(x)$，$v_1(x)$および $3L \le x \le 4L$ でのたわみ角，たわみをそれぞれ $v_2'(x)$，$v_2(x)$とする．

(4)　はりのたわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$をそれぞれ求めよ．

(1)　はりの FBD を描き，点 O に作用する反力 R_O，反モーメント M_O をそれぞれ求めよ．

はりの FBD は

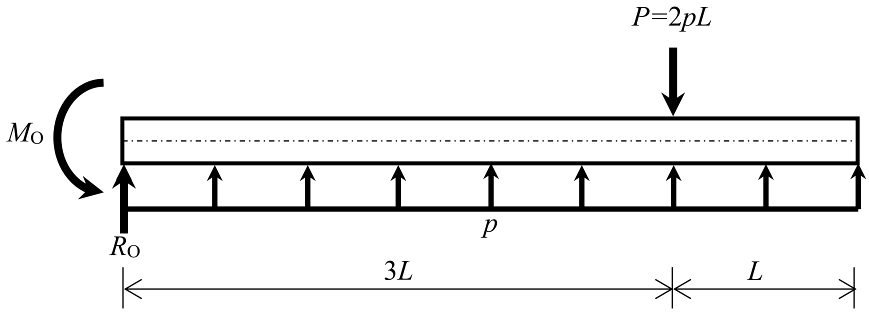

Fig 1.1　はり全体の FBD.

と表される．図 1.1 より，はり全体に関する力のつり合い式および点 O まわりのモーメントのつり合い式は

$$R_O + 4pL - P = 0 \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} -M_O - \int_0^{4L} px\,dx + P \cdot 3L = 0 \\ -M_O - 8pL^2 + 3PL = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

で表される．これらより，点 O に作用する反力 R_O，反モーメント M_O は

$$\begin{aligned} R_O &= P - 4pL \\ &= 2pL - 4pL \\ &= -2pL \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} M_O &= 3PL - 8pL^2 \\ &= 6pL^2 - 8pL^2 \\ &= -2pL^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

となる．

(2) はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$をそれぞれ求め，SFD および BMD を図示せよ．

（ｉ） $0 \le x \le 3L$ の場合

この場合の仮想断面に生じるせん断力を $Q_1(x)$，曲げモーメントを $M_1(x)$とする．このとき FBD を描くと以下のようになる．

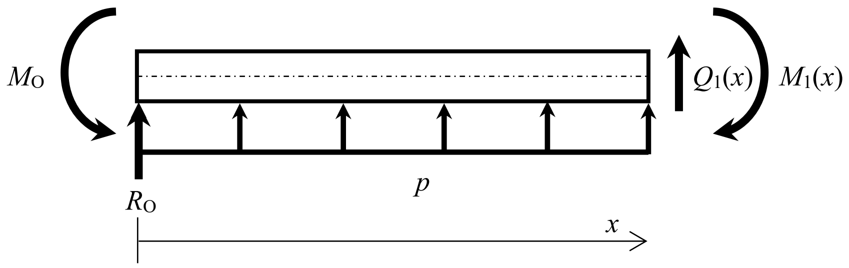

Fig. 1.2 はりの FBD （$0 \le x \le 3L$ の場合）.

図 1.2 より，はりに関する力のつり合い式および位置 x まわりのモーメントのつり合い式は

$$Q_1(x) + R_O + px = 0 \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} -M_O + R_O x + \int_0^x px\,dx + M_1(x) = 0 \\ -M_O + R_O x + \frac{1}{2}px^2 + M_1(x) = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

で表される．これらより，はりに生じるせん断力 $Q_1(x)$，曲げモーメント $M_1(x)$は式(1.3)，式(1.4)を踏まえると

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= -px - R_O \\ &= -px + 2pL \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} M_1(x) &= -\frac{1}{2}px^2 - R_O x + M_O \\ &= -\frac{1}{2}px^2 + 2pLx - 2pL^2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

となる．

（ⅱ） $3L \le x \le 4L$ の場合

この場合の仮想断面に生じるせん断力を $Q_2(x)$，曲げモーメントを $M_2(x)$とする．このときFBD を描くと以下のようになる．

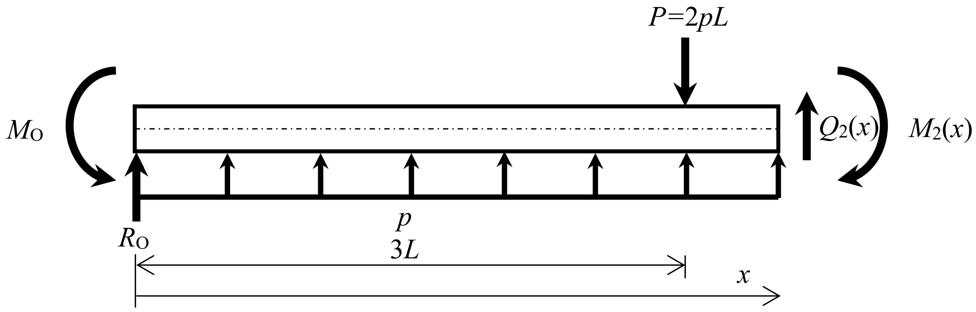

Fig. 1.3 はりの FBD （$3L \le x \le 4L$ の場合）.

図 1.3 より，はりに関する力のつり合い式および位置 x まわりのモーメントのつり合い式は

$$Q_2(x) + R_O + px - P = 0 \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} -M_O + R_O x + \int_0^x px dx - P(x-3L) + M_2(x) = 0 \\ -M_O + R_O x + \frac{1}{2}px^2 - P(x-3L) + M_2(x) = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

で表される．これらより，はりに生じるせん断力 $Q_2(x)$，曲げモーメント $M_2(x)$は式(1.3)，式(1.4)を踏まえると

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= -px + P - R_O \\ &= -px + 2pL + 2pL \\ &= -px + 4pL \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} M_2(x) &= -\frac{1}{2}px^2 - R_O x + P(x-3L) + M_O \\ &= -\frac{1}{2}px^2 + 2pLx + 2pL(x-3L) - 2pL^2 \\ &= -\frac{1}{2}px^2 + 4pLx - 8pL^2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

となる．

よって，はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$は

$$Q(x)=\begin{cases}-px+2pL & (0\le x\le 3L)\\ -px+4pL & (3L\le x\le 4L)\end{cases} \tag{1.13}$$

$$M(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}px^2+2pLx-2pL^2 & (0\le x\le 3L)\\ -\dfrac{1}{2}px^2+4pLx-8pL^2 & (3L\le x\le 4L)\end{cases} \tag{1.14}$$

と表される．以上を用いると，SFD と BMD はそれぞれ以下のようになる．

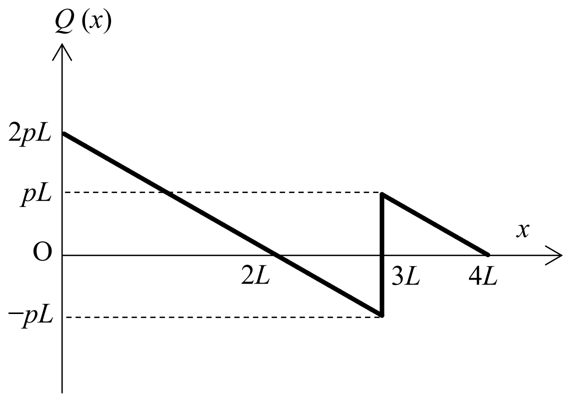

Fig 1.4 SFD

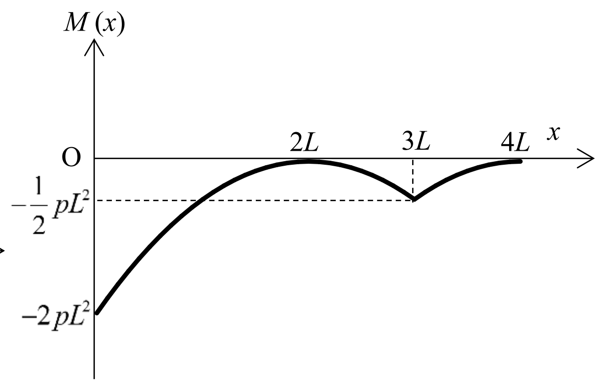

Fig 1.5 BMD

(3) はりのたわみ角 $v'(x)$およびたわみ $v(x)$に関して成り立つ境界条件を 4 つ求めよ．なお，$0\le x\le 3L$ でのたわみ角，たわみをそれぞれ $v_1'(x)$，$v_1(x)$および $3L\le x\le 4L$ でのたわみ角，たわみをそれぞれ $v_2'(x)$，$v_2(x)$とする．

まず，x=0 においてはりが壁に固定されていることから x=0 でのたわみ角 $v_1'(x)$，たわみ $v_1(x)$は 0 となる．よって，以下の 2 つの境界条件が得られる．

$$v_1'(0)=0 \tag{1.15}$$

$$v_1(0)=0 \tag{1.16}$$

次に，x=3L においてたわみ角 $v'(x)$およびたわみ $v(x)$は連続である．よって，以下の 2 つの境界条件が得られる．

$$v_1'(3L) = v_2'(3L) \tag{1.17}$$

$$v_1(3L) = v_2(3L) \tag{1.18}$$

(4)　はりのたわみ角 *v'*(*x*)，たわみ *v*(*x*)をそれぞれ求めよ．

　はりのたわみに関する基礎式は

$$-EIv''(x) = M(x) \tag{1.19}$$

で表される．

(ｉ) $0 \le x \le 3L$ の場合

式(1.19)に式(1.14)を代入すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} -EIv_1''(x) &= M_1(x) \\ &= -\frac{1}{2}px^2 + 2pLx - 2pL^2 \end{aligned} \tag{1.20}$$

これを解くと

$$v_1'(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}px^3 - pLx^2 + 2pL^2x + C_1\right) \tag{1.21}$$

$$v_1(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}px^4 - \frac{1}{3}pLx^3 + pL^2x^2 + C_1x + C_2\right) \tag{1.22}$$

となる．ここで，式(1.15)，式(1.16)より C_1 と C_2 を導出する．

$$\begin{aligned} v_1'(0) &= 0 \\ C_1 &= 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.24}$$

得られた C_1，C_2 よりたわみ角 $v_1'(x)$，たわみ $v_1(x)$は

$$v_1'(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}px^3-pLx^2+2pL^2x\right) \tag{1.25}$$

$$v_1(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}px^4-\frac{1}{3}pLx^3+pL^2x^2\right) \tag{1.26}$$

となる．

(ⅱ) $3L \le x \le 4L$ の場合

式(1.19)に式(1.14)を代入すると以下のようになる．

$$\begin{aligned} -EIv_2''(x)&=M_2(x) \\ &=-\frac{1}{2}px^2+4pLx-8pL^2 \end{aligned} \tag{1.27}$$

これを解くと

$$v_2'=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}px^3-2pLx^2+8pL^2x+C_3\right) \tag{1.28}$$

$$v_2=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}px^4-\frac{2}{3}pLx^3+4pL^2x^2+C_3x+C_4\right) \tag{1.29}$$

となる．ここで，式(1.17)，式(1.18)より C_3 と C_4 を導出する．

$$\begin{gathered} v_1'(3L)=v_2'(3L) \\ \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}p(3L)^3-pL(3L)^2+2pL^2(3L)\right) \\ =\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}p(3L)^3-2pL(3L)^2+8pL^2(3L)+C_3\right) \\ C_3=-9pL^3 \end{gathered} \tag{1.30}$$

$$\begin{gathered} v_1'(3L)=v_2'(3L) \\ \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}p(3L)^4-\frac{1}{3}pL(3L)^3+pL^2(3L)^2\right) \\ =\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}p(3L)^4-\frac{2}{3}pL(3L)^3+4pL^2(3L)^2+C_3(3L)+C_4\right) \\ C_4=9pL^4 \end{gathered} \tag{1.31}$$

となる．得られた C_3，C_4 よりたわみ角 $v_2'(x)$，たわみ $v_2(x)$は

$$v_2' = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}px^3 - 2pLx^2 + 8pL^2x - 9pL^3\right) \tag{1.32}$$

$$v_2 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}px^4 - \frac{2}{3}pLx^3 + 4pL^2x^2 - 9pL^3x + 9pL^4\right) \tag{1.33}$$

となる．

よって，はりのたわみ角 $v'(x)$，はりのたわみ $v(x)$は

$$v'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{6}px^3 - pLx^2 + 2pL^2x\right) & (0 \le x \le 3L) \\ \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{6}px^3 - 2pLx^2 + 8pL^2x - 9pL^3\right) & (3L \le x \le 4L) \end{cases} \tag{1.34}$$

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{24}px^4 - \dfrac{1}{3}pLx^3 + pL^2x^2\right) & (0 \le x \le 3L) \\ \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{24}px^4 - \dfrac{2}{3}pLx^3 + 4pL^2x^2 - 9pL^3x + 9pL^4\right) & (3L \le x \le 4L) \end{cases} \tag{1.35}$$

となる．

[2] 図 2 のように，両端を単純支持された直径 d，長さ $4L$ の円形断面を持つはり OA において，点 B (x=L) ，点 D (x=$3L$) に集中荷重 $2P$ がそれぞれ下向き，点 C (x=$2L$) に集中荷重 P が上向きに負荷されている．丸棒の縦弾性係数を E として，以下の問いに答えよ．

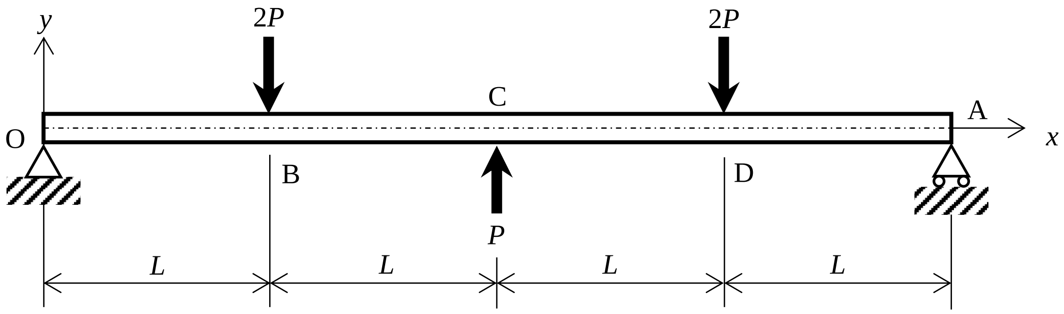

Fig. 2 両端を単純支持された荷重を受けるはり．

(1) はりの断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

以下の問題では，はりの断面 2 次モーメントを I として解答せよ．

(2) 対称性を利用して点 O，A に作用する反力 R_O，R_A を求め，はり全体の SFD，BMD を図示せよ．

(3) 点 O におけるたわみ v_O，点 C におけるたわみ角 v'_C を求めよ．

(4) はりのたわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$を求め，点 C におけるたわみ v_C を求めよ．ただし，求めるはりのたわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$は対称性を考慮し $0 \leq x \leq 2L$ の範囲でよい．

(1)　はりの断面 2 次モーメント I_z を求めよ.

図 2.1 に示す円形断面のはりについて，z 軸に関する断面 2 次モーメントを求める.

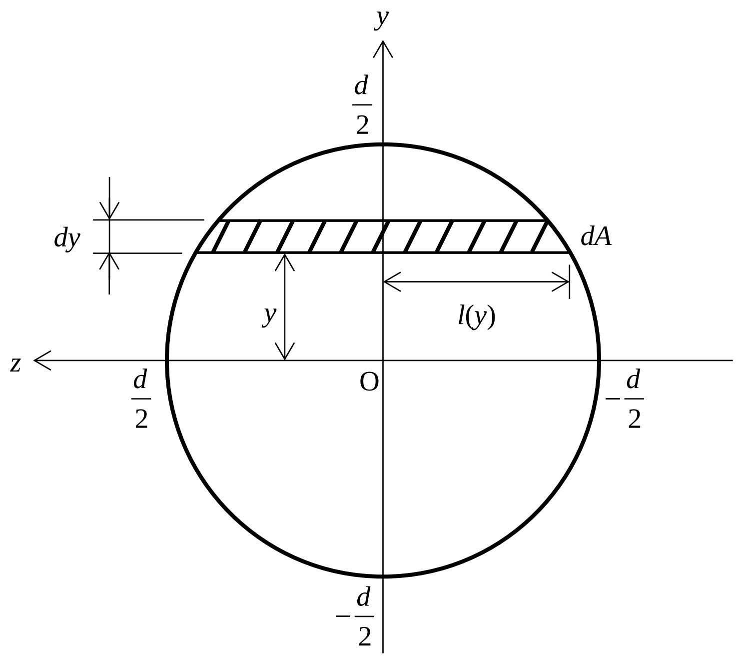

Fig. 2.1　はりの断面.

dA と dy について

$$
\begin{aligned}
dA &= 2l\left(y\right)dy \\
&= 2\sqrt{\frac{d^2}{4} - y^2}\,dy
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

が成り立ち,

$$
y = \frac{d}{2}\sin\theta \tag{2.2}
$$

とすると

$$
dy = \frac{d}{2}\cos\theta d\theta \tag{2.3}
$$

$$dA = \frac{d^2}{2}\cos^2\theta d\theta \tag{2.4}$$

となり，積分区間は

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \tag{2.5}$$

となる．式(2.2)，式(2.4)，式(2.5)を用いて断面二次モーメント I_z を計算すると

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cdot \frac{d^2}{2}\cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{d^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned} \tag{2.6}$$

と求められる．

(2) 対称性を利用して点 O，A に作用する反力 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{O}}$，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}$ を求め，はり全体の SFD，BMD を図示せよ．

はり全体の FBD を以下の図 2.1 に示す.

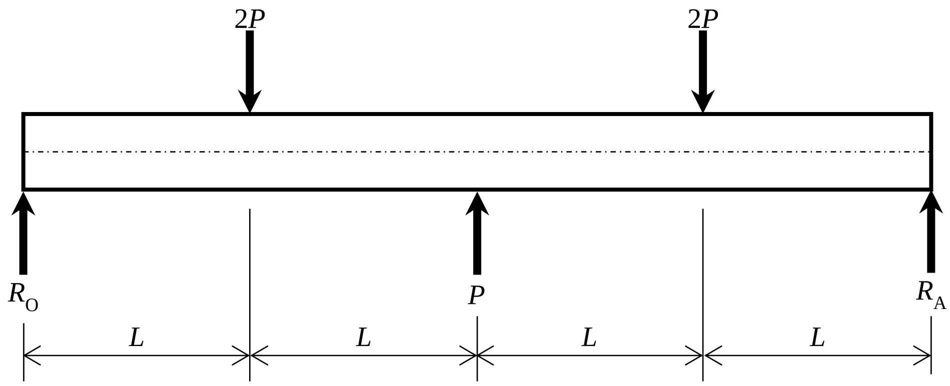

Fig 2.1 はり全体の FBD.

力のつり合い式より

$$R_\mathrm{O} - 2P + P - 2P + R_\mathrm{A} = 0 \tag{2.7}$$

$$R_\mathrm{O} + R_\mathrm{A} = 3P \tag{2.8}$$

である．対称性より R_O=R_A であるから

$$R_\mathrm{O} = R_\mathrm{A} = \frac{3}{2}P \tag{2.9}$$

となる．

以下，位置 x におけるせん断力を $Q(x)$，モーメントを $M(x)$として場合分けをする．

(i) $0 \le x \le L$ の場合

FBD は図 2.2 のようになる．

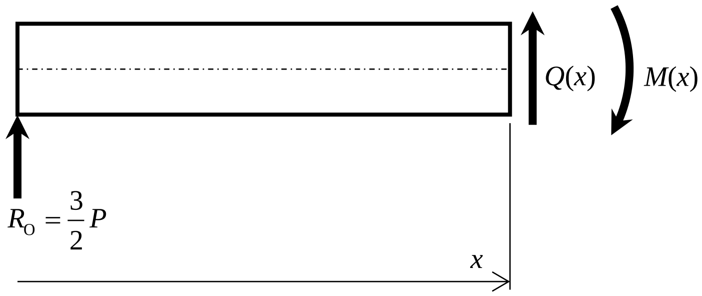

Fig. 2.2 FBD ($0 \le x \le L$) .

はりについて力のつり合い式，位置 x まわりのモーメントのつり合い式を立てると

$$\frac{3}{2}P + Q(x) = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{3}{2}Px + M(x) = 0 \tag{2.11}$$

となり，せん断力 $Q(x)$，モーメント $M(x)$はそれぞれ

$$Q(x) = -\frac{3}{2}P \tag{2.12}$$

$$M(x) = -\frac{3}{2}Px \tag{2.13}$$

となる．

(ii) $L \le x \le 2L$ の場合

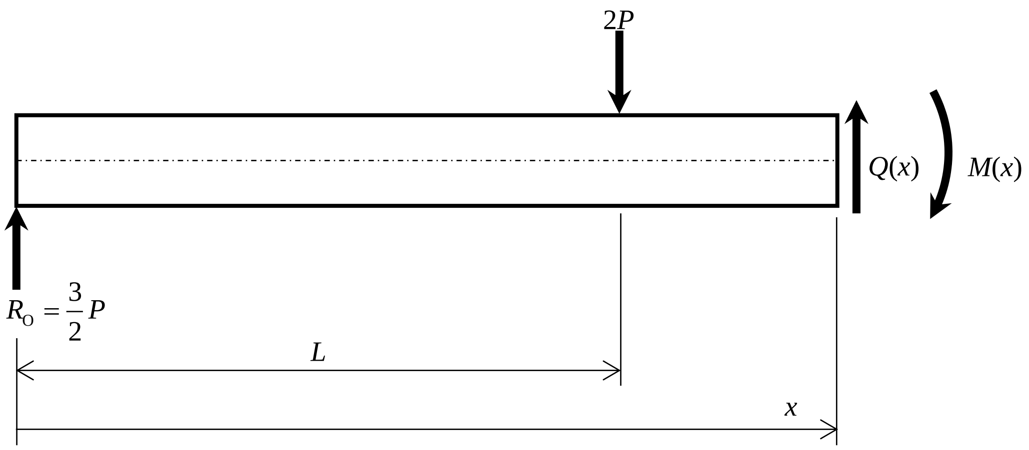

Fig 2.3 FBD ($L \le x \le 2L$) .

(i)同様に力のつり合い式，位置 x まわりのモーメントのつり合い式を立てると

$$\frac{3}{2}P - 2P + Q(x) = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{3}{2}Px - 2P(x-L) + M(x) = 0 \tag{2.15}$$

となり，せん断力 $Q(x)$，モーメント $M(x)$はそれぞれ

$$Q(x) = \frac{P}{2} \tag{2.16}$$

$$M(x) = \frac{1}{2}Px - 2PL \tag{2.17}$$

となる．

せん断力 $Q(x)$について，はりの中央である C 点に荷重が付加されていることから SFD は線対称にはならないため，$2L \le x \le 3L$，$3L \le x \le 4L$ の範囲に関しても求める．

(iii) $2L \le x \le 3L$ の場合

FBD を以下の図 2.4 に示す．

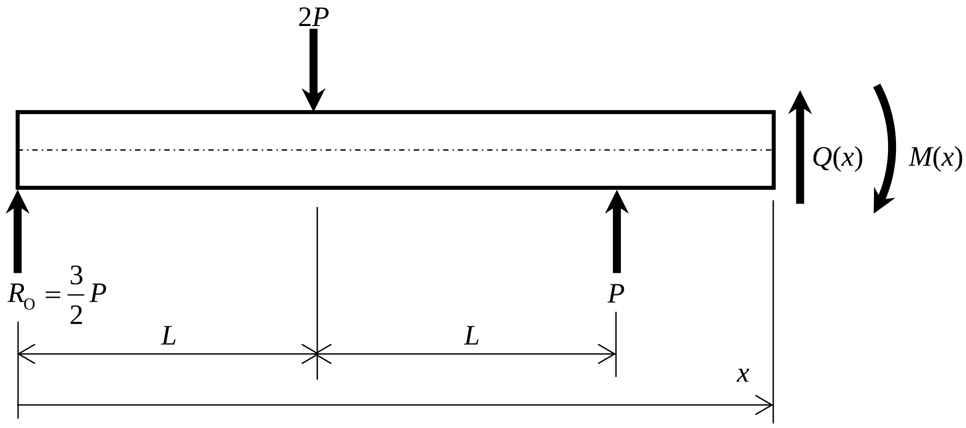

Fig. 2.4 FBD ($2L \le x \le 3L$) .

はりについて力のつり合い式を立てると

$$\frac{3}{2}P - 2P + P + Q(x) = 0 \tag{2.18}$$

となり，せん断力 $Q(x)$は

$$Q(x) = -\frac{1}{2}P \tag{2.19}$$

と求められる.

(iv) $3L \le x \le 4L$ の場合

FBD を以下の図 2.5 に示す.

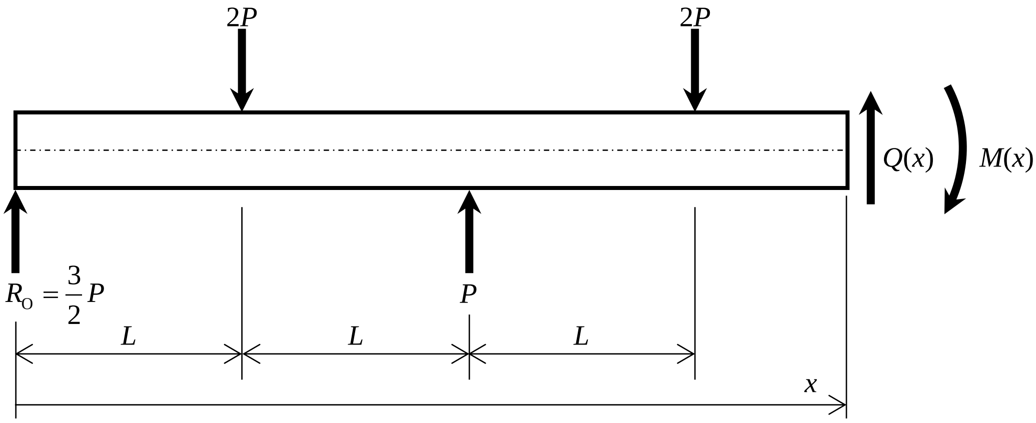

Fig. 2.5 FBD ($3L \le x \le 4L$) .

はりについて力のつり合い式を立てると

$$\frac{3}{2}P-2P+P-2P+Q\left(x\right)=0 \tag{2.20}$$

となり，せん断力 $Q(x)$は

$$Q\left(x\right)=\frac{3}{2}P \tag{2.21}$$

と求められる．

以上より，BMD について対称性を考慮すると SFD，BMD はそれぞれ以下に示す図 2.6, 図 2.7 のようになる．

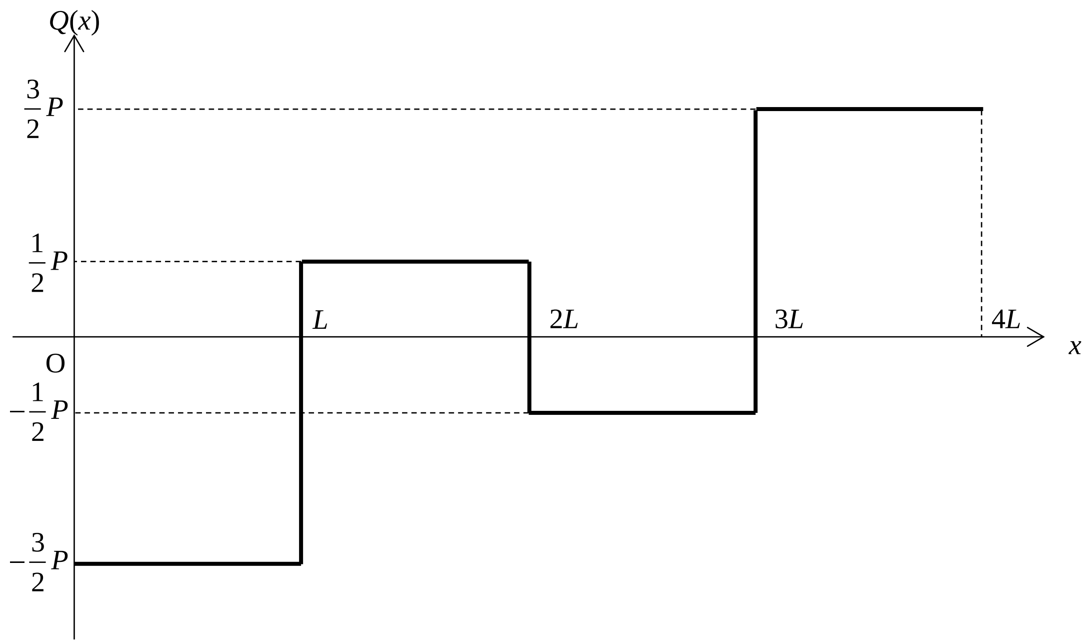

Fig. 2.6 SFD.

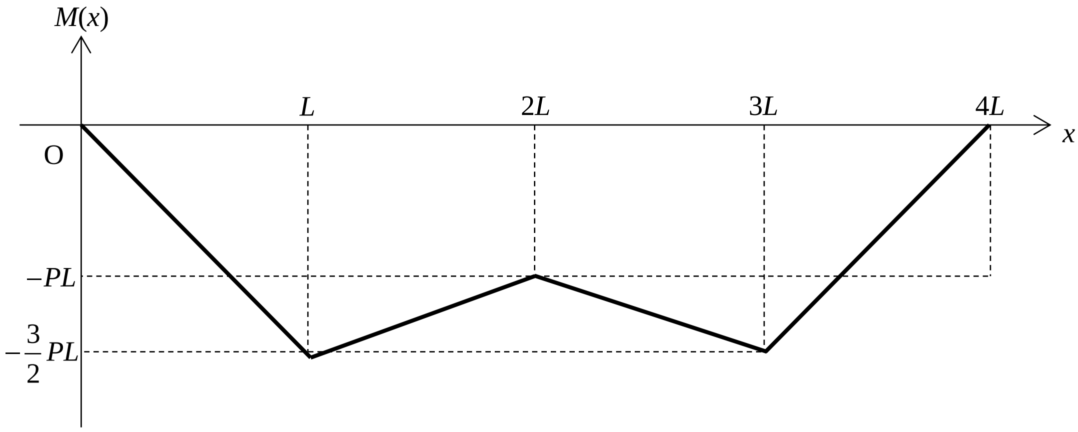

Fig. 2.7 BMD.

図 2.6 より荷重がはりに対称に付加された場合，SFD は点対称となる．

(3) 点 O におけるたわみ v_O，点 C におけるたわみ角 v'_C を求めよ．

点 O においてはりは単純支持されているため，たわみ v_O は

$$v_O = 0 \tag{2.22}$$

を満たす．また，点 C に関してはりは対称であるため，たわみ角 v'_C は

$$v'_C = 0 \tag{2.23}$$

となる．

(4) $0 \le x \le 2L$ の範囲ではりのたわみ $v(x)$，たわみ角 $v'(x)$を求め，点 C におけるたわみ v_C を求めよ．

OB 間のたわみ角およびたわみをそれぞれ $v_1'(x)$，$v_1(x)$，BC 間のたわみ角およびたわみをそれぞれ $v_2'(x)$，$v_2(x)$とする．たわみの基礎式は

$$-EIv''(x) = M(x) \tag{2.24}$$

と表される．$0 \le x \le L$ の場合，式(2.10)を式(2.21)に代入し

$$-EIv_1''(x) = -\frac{3}{2}Px \tag{2.25}$$

となる．これを積分することで

$$v_1'(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{3}{4}Px^2+C_1\right) \tag{2.26}$$

$$v_1(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{4}Px^3+C_1x+C_2\right) \tag{2.27}$$

と求められる．$L\le x\le 2L$ の場合，式(2.14)を式(2.21)に代入し

$$-EIv_2''(x)=\frac{1}{2}Px-2PL \tag{2.28}$$

となる．これを積分して

$$v_2'(x)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{4}Px^2+2PLx+C_3\right) \tag{2.29}$$

$$v_2(x)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{12}Px^3+PLx^2+C_3x+C_4\right) \tag{2.30}$$

となる．

ここで，式(2.19)，(2.20)より

$$\begin{gathered}v_1(0)=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{4}P\cdot 0+C_1\cdot 0+C_2\right)=0\\ \therefore C_2=0\end{gathered} \tag{2.31}$$

$$\begin{gathered}v_2'(2L)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{4}P\cdot(2L)^2+2PL\cdot 2L+C_3\right)=0\\ \therefore C_3=-3PL^2\end{gathered} \tag{2.32}$$

となる．また，点 B においてはりは連続であるため

$$v_1'(L)=v_2'(L) \tag{2.33}$$

$$v_1(L)=v_2(L) \tag{2.34}$$

が成り立つことから式(2.28)，(2.29)を踏まえると

$$v_1'(L) = v_2'(L)$$

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{3}{4}PL^2 + C_1\right) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{4}PL^2 + 2PL^2 - 3PL^2\right) \tag{2.35}$$

$$C_1 = -2PL^2$$

$$v_1(L) = v_2(L)$$

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{4}PL^3 - 2PL^3\right) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{12}PL^3 + PL^3 - 3PL^3 + C_4\right) \tag{2.36}$$

$$C_4 = \frac{1}{3}PL^3$$

と求められる．

以上より，$0 \le x \le 2L$ の範囲におけるはりのたわみ角 $v'(x)$，たわみ $v(x)$は

$$v'(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{EI}\left(\dfrac{3}{4}x^2 - 2L^2\right) & (0 \le x \le L) \\ \dfrac{P}{EI}\left(-\dfrac{1}{4}x^2 + 2Lx - 3L^2\right) & (L \le x \le 2L) \end{cases} \tag{2.37}$$

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{EI}\left(\dfrac{1}{4}x^3 - 2L^2x\right) & (0 \le x \le L) \\ \dfrac{P}{EI}\left(-\dfrac{1}{12}x^3 + Lx^2 - 3L^2x + \dfrac{1}{3}L^3\right) & (L \le x \le 2L) \end{cases} \tag{2.38}$$

となる．点 C におけるたわみ v_C は

$$\begin{aligned} v(2L) &= \frac{P}{EI}\left(-\frac{1}{12}(2L)^3 + L\cdot(2L)^2 - 3L^2\cdot 2L + \frac{1}{3}L^3\right) \\ &= -\frac{7PL^3}{3EI} \end{aligned} \tag{2.39}$$

と求められる．

補足

(i) (1)の別解

はりの断面について z 軸が図心を通るため，断面 2 次モーメント I_y，I_z と断面 2 次極モーメント I_p との間に以下の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A r^2 dA \\ &= \int_A \left(y^2 + z^2\right) dA \\ &= \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA \\ &= I_y + I_z \end{aligned} \tag{2.A-1}$$

はりの断面は円形であるので

$$\begin{aligned} I_y &= I_z \\ I_z &= \frac{1}{2} I_p \end{aligned} \tag{2.A-2}$$

が成り立つ．よって断面 2 次モーメント I_z は

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{1}{2} I_p \\ &= \frac{1}{2} \int_A r^2 dA \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{d}{2}} r^2 \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned} \tag{2.A-3}$$

と求められる．

(iii) たわみの図示

$v(x)$について，$v_1(x)$，$v_2(x)$より対称性を考慮し，以下の図 2.A-2 に示す．

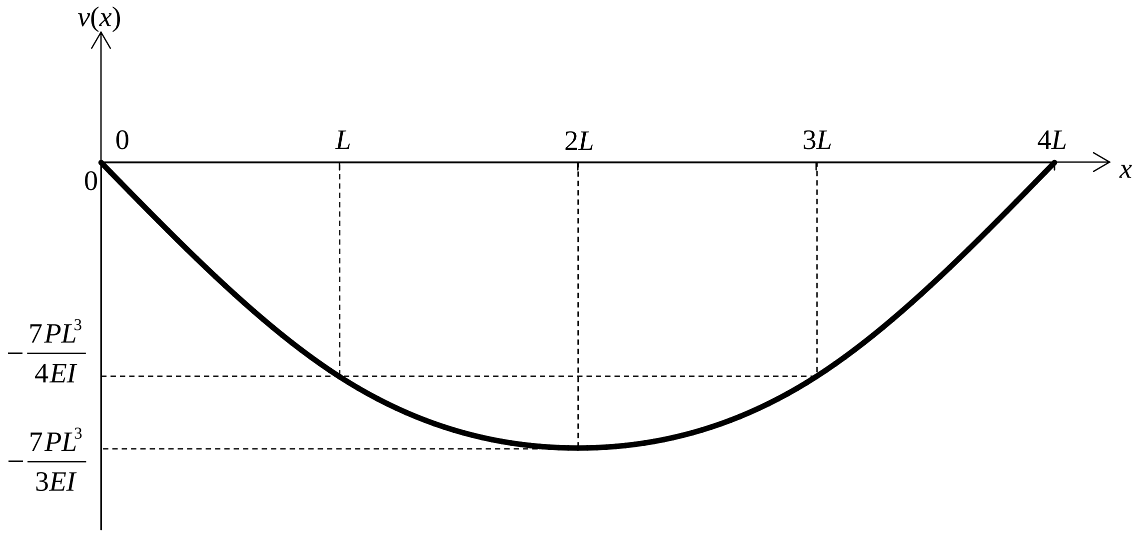

Fig. 2.A-2 はりのたわみ.