材料の力学 1　Step 3　第 9 回演習問題（2019/06/25 実施）

[1]　図 1.1 に示すような長さ L の片持ちはりにおいて，OA 間に分布荷重 p 及び C 点に集中荷重 P (P=2pl) がそれぞれ下向きに作用している．また，はりの断面は図 1.2 に示す形状となっている．このとき以下の問いに答えよ．

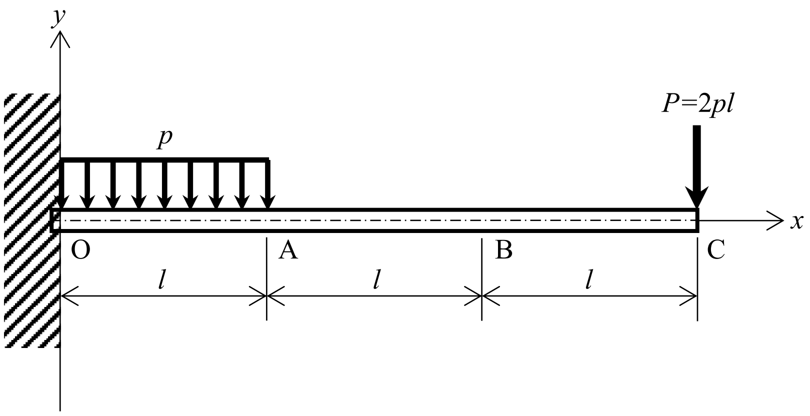

Fig. 1.1 分布荷重及び集中荷重を受ける片持ちはり．

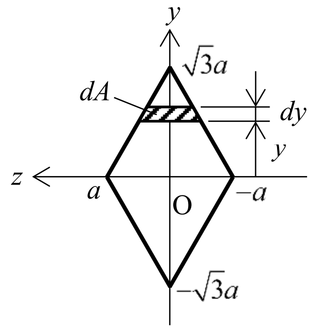

Fig. 1.2 片持ちはり断面形状．

(1)　図 1.2 に示す斜線部の微小面積 dA を求めることによりはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

(2)　はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 R_O 及び反モーメント M_O を求めよ．

(3)　位置 x の仮想断面においてはりに作用するせん断力 $Q(x)$及び曲げモーメント $M(x)$を求め，SFD 及び BMD を描け．

(4)　はりに生じる最大曲げ応力σ_{max}を求めよ．

(1)　図 1.2 に示す斜線部の微小面積 *dA* を求めることによりはりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

断面は z 軸対称であることから，z 軸上部について考える．

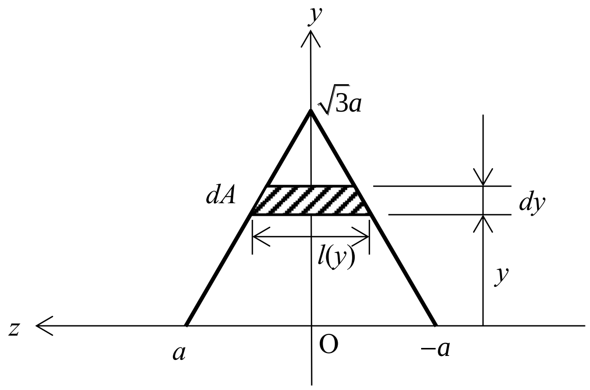

Fig. 1.3　はりの断面.

図 1.3 より微小面積 *dA* は,

$$
\begin{aligned}
dA &= l(y)dy \\
&= 2\left\{a - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)y\right\}dy
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

と分かる．したがって，z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z は次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
\frac{I_z}{2} &= \int_A y^2 dA \\
&= \int_0^{\sqrt{3}a} y^2 \cdot 2\left\{a - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)y\right\}dy \\
&= 2a\int_0^{\sqrt{3}a} y^2 dy - \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}a} y^3 dy \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}a^4
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

$$
\therefore\ I_z = \sqrt{3}a^4 \tag{1.3}
$$

(2)　はり全体の FBD を描き，壁から受ける反力 R_O 及び反モーメント M_O を求めよ．

はり全体の FBD は次のようになる．

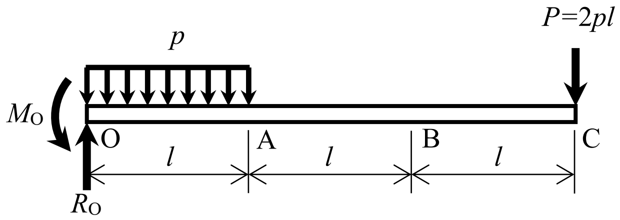

Fig. 1.4　はり全体の FBD.

図 1.4 において，力のつり合い式は次のようになる．

$$R_O - pl - P = 0 \tag{1.4}$$

反力 R_O は，式(1.4)から次のように求められる．

$$\begin{aligned} R_O &= pl + P \\ &= 3pl \end{aligned} \tag{1.5}$$

また，O 点まわりのモーメントのつり合い式は次のようになる．

$$-M_O + \int_0^l pxdx + P \cdot 3l = 0 \tag{1.6}$$

反モーメント M_O は，式(1.6)から次のように求められる．

$$\begin{aligned} M_O &= \int_0^l pxdx + P \cdot 3l \\ &= \frac{1}{2}pl^2 + 6pl^2 \\ &= \frac{13}{2}pl^2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

(3)　位置 x の仮想断面においてはりに作用するせん断力 $Q(x)$及び曲げモーメント $M(x)$を求め，SFD 及び BMD を描け．

(i) $0 \le x \le l$ のとき

はりの FBD は次のように描ける．

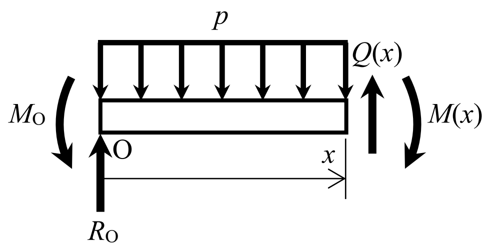

Fig. 1.5 はりの FBD ($0 \le x \le l$).

図 1.5 において，力のつり合い式は次のようになる．

$$R_O - px + Q(x) = 0 \tag{1.8}$$

せん断力 $Q(x)$は，式(1.8)から次のように求められる．

$$\begin{aligned} Q(x) &= px - R_O \\ &= px - 3pl \\ &= p(x - 3l) \end{aligned} \tag{1.9}$$

また，O 点まわりのモーメントのつり合い式は次のようになる．

$$-M_O + \int_0^x pxdx - Q(x)x + M(x) = 0 \tag{1.10}$$

曲げモーメント $M(x)$は，式(1.10)から次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
M(x) &= M_{\mathrm{O}} - \int_0^x pxdx + Q(x)x \\
&= \frac{13}{2}pl^2 - \frac{1}{2}px^2 + p(x-3l)\cdot x \\
&= \frac{1}{2}p\left(x^2 - 6lx + 13l^2\right)
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

(ii) $l \le x \le 3l$ のとき
はりの FBD は次のように描ける．

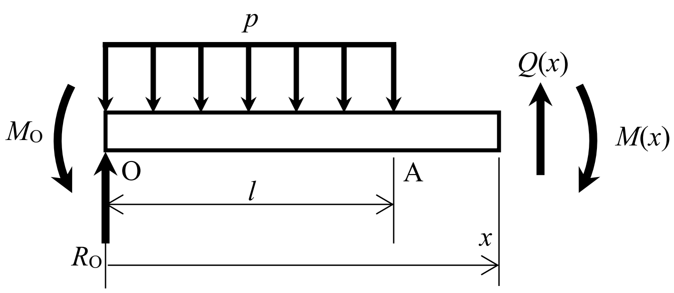

Fig. 1.6 はりの FBD ($l \le x \le 3l$).

図 1.6 において，力のつり合い式は次のようになる．

$$
R_{\mathrm{O}} - pl + Q(x) = 0 \tag{1.12}
$$

せん断力 $Q(x)$は，式(1.12)から次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= pl - R_{\mathrm{O}} \\
&= pl - 3pl \\
&= -2pl
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

また，O 点まわりのモーメントのつり合い式は次のようになる．

$$
-M_{\mathrm{O}} + \int_0^l pxdx - Q(x)x + M(x) = 0 \tag{1.14}
$$

曲げモーメント $M(x)$は，式(1.14)から次のように求められる．

$$\begin{aligned} M(x) &= M_{\mathrm{O}} - \int_0^l pxdx + Q(x)x \\ &= \frac{13}{2}pl^2 - \frac{1}{2}pl^2 - 2plx \\ &= -2pl(x-3l) \end{aligned} \tag{1.15}$$

以上を用いると，SFD と BMD はそれぞれ次の図のようになる．

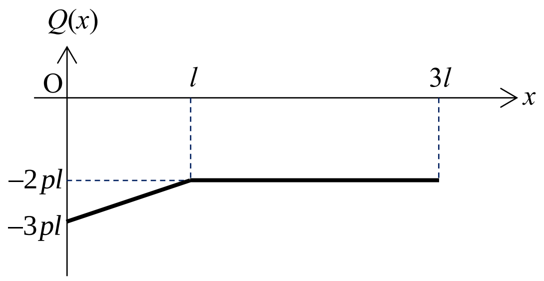

Fig. 1.7 SFD.

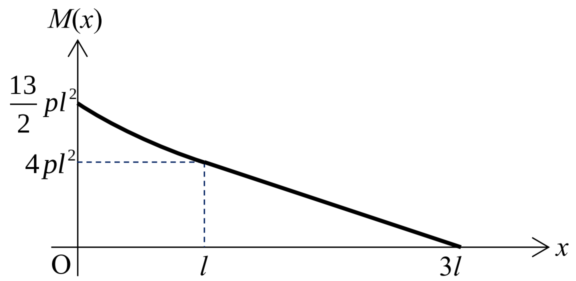

Fig. 1.8 BMD.

(4)　はりに生じる最大曲げ応力σ_{max}を求めよ．

最大曲げ応力σ_{max}は，

$$\sigma_{\mathrm{max}} = \left| \frac{M_{\mathrm{max}}}{I_z} y \right| \tag{1.16}$$

と求められる．図 1.8 の BMD より $x = 0$ において最大曲げモーメント M_{max} が生じ，

$$M_{\mathrm{max}} = \frac{13}{2}pl^2 \tag{1.16}$$

と分かる．最大曲げ応力σ_{max}は最大曲げモーメント M_{max} が作用する位置において z 軸から最も離れた点，すなわち $y = \pm\sqrt{3}a$ である点に作用する．したがって，$y = \sqrt{3}a$ のときを考えることにより最大曲げ応力σ_{max}は，

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{\max}}{I_z} y \right| = \left| \frac{\frac{13}{2} pl^2}{\sqrt{3}a^4} \cdot \sqrt{3}a \right| = \frac{13pl^2}{2a^3} \tag{1.17}$$

と求められる.

[2]　図 2.1 に示すような長さ $3L$ のはりにおいて A 点に長さ $2L$ の剛体レバーがついている．剛体レバーには分布荷重 p が下向きに, C 点には集中荷重 P が下向きに作用している．また，はりの断面は図 2.2 に示す形状となっている．このとき以下の問いに答えよ．ただし，P=4pL である．

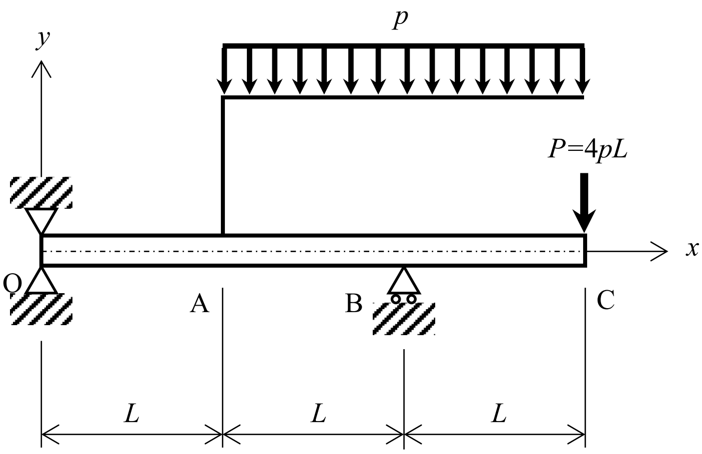

Fig. 2.1 剛体レバーが付いたはり．

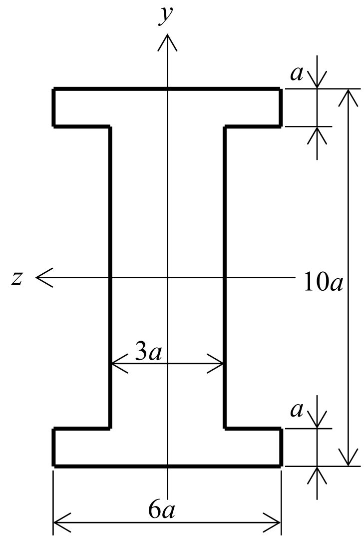

Fig. 2.2 はりの断面形状．

(1)　はりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

(2)　剛体レバーの FBD を描き，A 点での反力 R_A，反モーメント M_A を求めよ．ただし，以下の問いにおいて，反力は y 軸方向を正，反モーメントは反時計回りを正とする．

(3)　O，B 点における支点反力 R_O，R_B を求めよ．

(4)　はりに生じるせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$を求め，SFD と BMD を描け．

(5)　はりに生じる最大曲げ応力 σ_{max} および生じる位置(x, y)を求めよ．

(1)　はりの z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z を求めよ．

z 軸が幅 b，高さ h の長方形断面の図心を通る場合，z 軸に関する断面 2 次モーメント I_z は次式のようになる．

$$I_z = \frac{1}{12} b h^3 \tag{2.1}$$

はりの断面 2 次モーメントは，図 2.3 に示す通り幅 $6a$，高さ $10a$ の長方形の断面 2 次モーメントから幅 $1.5a$，高さ $8a$ の長方形の断面 2 次モーメントの 2 倍を引くことにより求めることができる．よって，はりの断面 2 次モーメント I_z は次式の通りとなる．

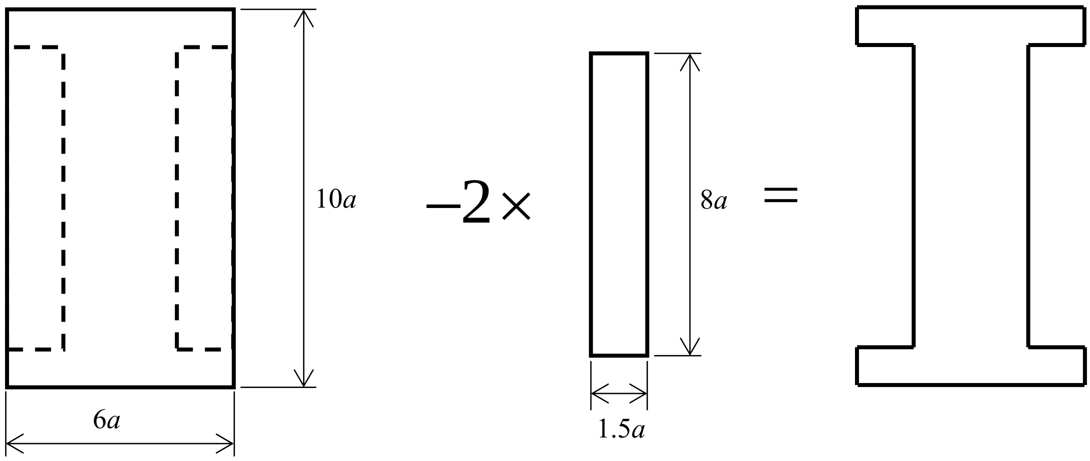

Fig. 2.3 断面 2 次モーメントの導出方法.

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{1}{12} \times 6a \times (10a)^3 - 2 \times \frac{1}{12} \times 1.5a \times (8a)^3 \\ &= 500a^4 - 128a^4 \\ &= 372a^4 \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2)　剛体レバーの FBD を描き，A 点での反力 $\boldsymbol{R}_\mathrm{A}$，反モーメント $\boldsymbol{M}_\mathrm{A}$ を求めよ．ただし，以下の問いにおいて，反力は $\boldsymbol{y}$ 軸方向を正，反モーメントは反時計回りを正とする．

図 2.4 に剛体レバーの FBD を示す.

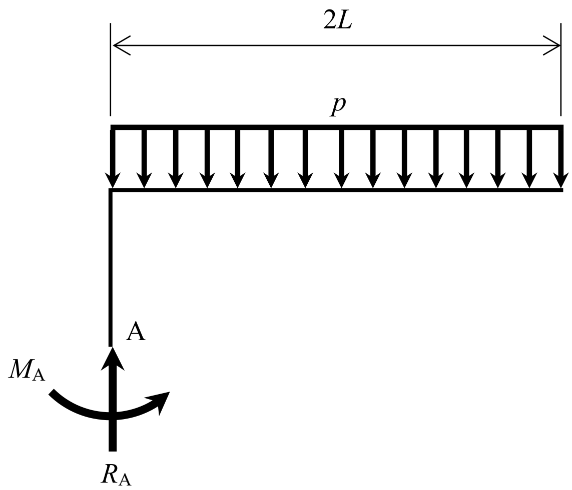

Fig. 2.4 剛体レバーの FBD.

力のつり合い式より,

$$
\begin{aligned}
R_\mathrm{A} - 2pL &= 0 \\
R_\mathrm{A} &= 2pL
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

A 点まわりのモーメントのつり合い式より,

$$
\begin{aligned}
-M_\mathrm{A} + \int_0^{2L} pxdx &= 0 \\
M_\mathrm{A} &= \int_0^{2L} pxdx \\
&= \left[\frac{1}{2}px^2\right]_0^{2L} \\
&= 2pL^2
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

(3)　O，B 点における支点反力 R_O，R_B を求めよ．

図 2.5 にはり全体の FBD を示す．なお，A 点に生じる力およびモーメントは(2)で導出した反力 R_A，反モーメント M_A から作用・反作用により求めることができる．

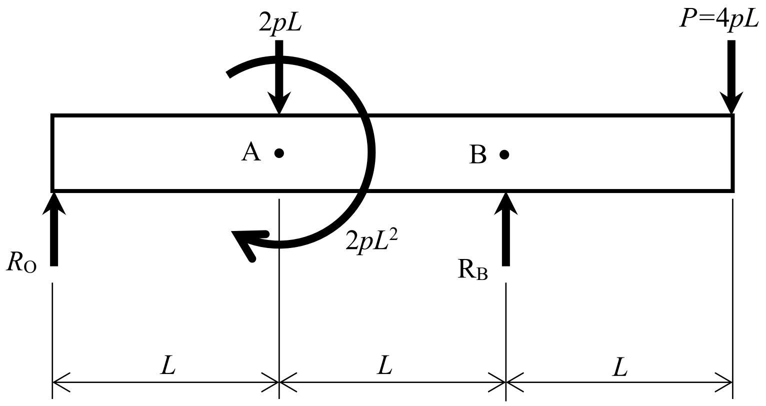

Fig. 2.5　はり全体の FBD.

力のつり合い式より，

$$
\begin{aligned}
R_O + R_B - 2pL - 4pL = 0 \\
R_O + R_B = 6pL
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より，

$$
-R_B \times 2L + 2pL \times L + 2pL^2 + 4pL \times 3L = 0
$$

$$
\begin{aligned}
R_B &= \frac{2pL \times L + 2pL^2 + 4pL \times 3L}{2L} \\
&= \frac{16pL^2}{2L} \\
&= 8pL
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

よって，支点反力 R_O は式(2.5)，(2.6)より，

$$
R_O = -2pL \tag{2.7}
$$

(4)　はりに生じるせん断力 *Q*(*x*)，曲げモーメント *M*(*x*)を求め，SFD と BMD を描け.

(i) $0 \leq x \leq L$ のとき

図 2.6 に FBD を示す.

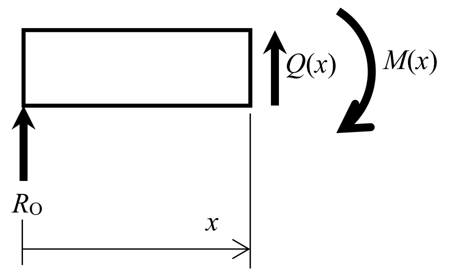

Fig. 2.6　はりの FBD ($0 \leq x \leq L$).

力のつり合い式より，

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{O}} + Q(x) &= 0 \\
Q(x) &= -R_{\mathrm{O}} \\
&= 2pL
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より式(2.8)を踏まえると，

$$
\begin{aligned}
M(x) - Q(x) \times x &= 0 \\
M(x) &= Q(x) \times x \\
&= 2pLx
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

(ⅱ) $L \leq x \leq 2L$ のとき

図 2.7 に FBD を示す.

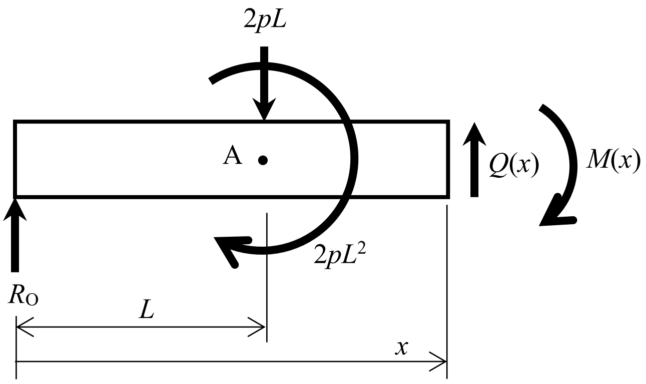

Fig. 2.7 はりの FBD ($L \leq x \leq 2L$).

力のつり合い式より,

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{O}} - 2pL + Q(x) &= 0 \\
Q(x) &= 2pL - R_{\mathrm{O}} \\
&= 4pL
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より式(2.10)を踏まえると,

$$
\begin{aligned}
M(x) + 2pL \times L + 2pL^2 - Q(x) \times x &= 0 \\
M(x) &= Q(x) \times x - 2pL \times L - 2pL^2 \\
&= 4pL(x - L)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

(ⅲ) $2L \leq x \leq 3L$ のとき
図 2.8 に FBD を示す.

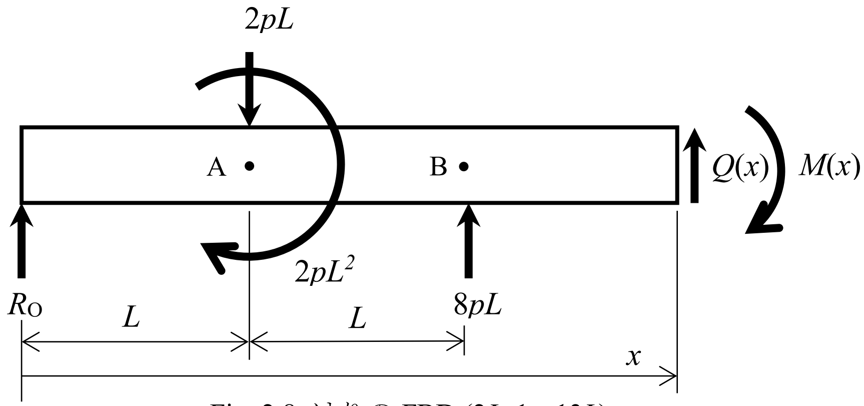

Fig. 2.8 はりの FBD ($2L \leq x \leq 3L$).

力のつり合い式より,

$$R_O - 2pL + 8pL + Q(x) = 0$$

$$Q(x) = 2pL - 8pL - R_O \qquad (2.12)$$

$$= -4pL$$

O 点まわりのモーメントのつり合い式より式(2.12)を踏まえると,

$$M(x) + 2pL \times L + 2pL^2 - 8pL \times 2L - Q(x) \times x = 0$$

$$M(x) = Q(x) \times x - 2pL \times L + 2pL^2 + 8pL \times 2L \qquad (2.13)$$

$$= 4pL(3L - x)$$

以上より求めたせん断力 $Q(x)$と曲げモーメント $M(x)$から SFD と BMD はそれぞれ図 2.9 と図 2.10 で表される．

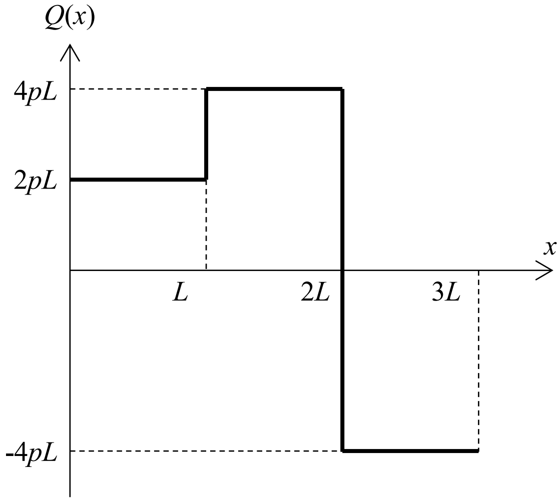

Fig. 2.9 SFD.

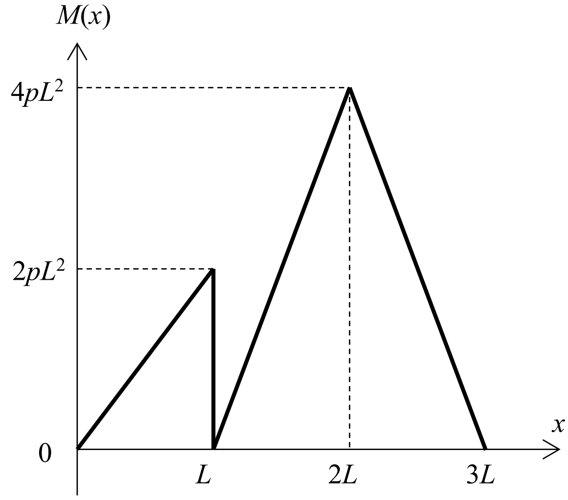

Fig. 2.10 BMD.

(5) はりに生じる最大曲げ応力σ_{max}および生じる位置(x, y)を求めよ．

最大曲げ応力σ_{max}は曲げモーメント $M(x)$の大きさが最大となり z 軸から最も離れた点に作用する．図 2.2 および図 2.10 より，最大曲げ応力σ_{max}が生じる点は$(x, y)=(2L, 5a)$と分かる．また，BMD より $x=2L$ において最大曲げモーメント $M_{max}=4pL^2$ が生じることが分かる．よって，最大曲げ応力σ_{max}は，

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \left|\frac{M_{max}}{I_z}y\right| \\ &= \left|\frac{4pL^2}{372a^4}\times 5a\right| \\ &= \frac{5pL^2}{93a^3}\end{aligned} \tag{2.14}$$

となる．