[1]　図 1 に示すように，外径 $3d$，内径 d，長さ $3L$ の中空円筒 1 と外径 $2d$，内径 d，長さ L の中空円筒 2 が剛体円盤 C で接合され，それぞれ他の端は剛体壁 A，B に固定されている．剛体円盤 C にはねじりモーメント T が作用している．中空円筒 1，2 の横弾性係数がともに G であるとき，以下の問いに答えよ．なお，剛体円盤の厚さについては無視できるものとする．

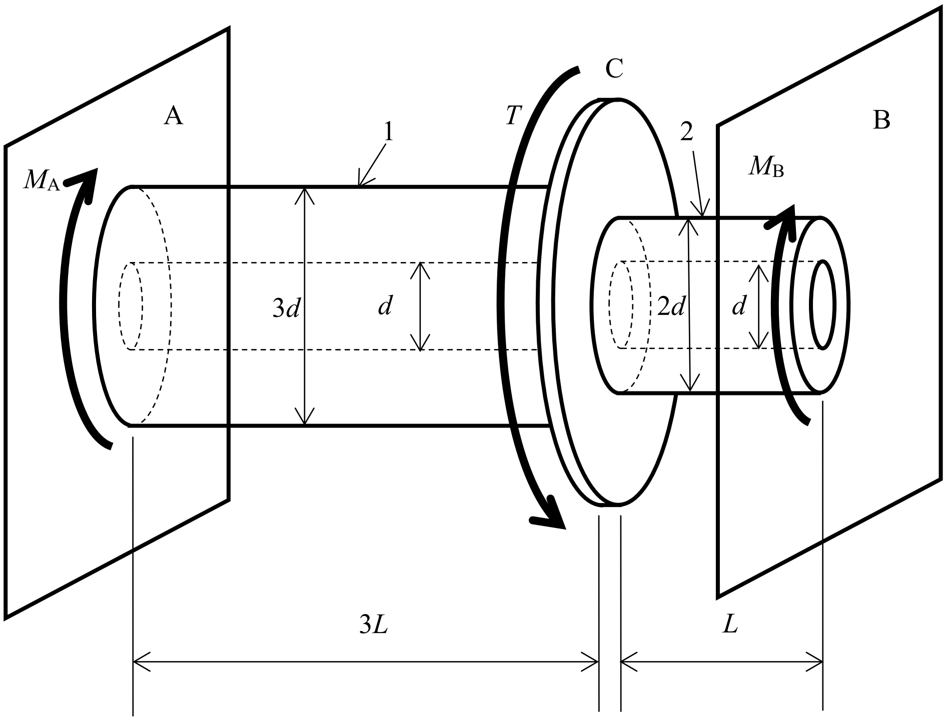


Fig. 1 中空円筒．

(1)　中空円筒 1，2 の断面二次極モーメント I_1，I_2 をそれぞれ求めよ．

(2)　AC 間，CB 間で中空円筒に生じるねじれ角 φ_{AC}，φ_{CB} を A，B において生じる反モーメント M_A，M_B を用いて表せ．

(3)　反モーメント M_A，M_B を T を用いて表せ．

(4)　中空円筒 1，2 に生じる最大せん断応力をそれぞれ求め，AB 間に生じる最大せん断応力の大きさ τ_{max} を求めよ．

(1)　中空円筒 1，2 の断面二次極モーメント I_1，I_2 をそれぞれ求めよ．

中空円筒 1，2 の断面二次極モーメント I_1，I_2 は以下のように求められる．

$$I_1 = \int_A r^2 dA = \int_{d/2}^{3d/2} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}d\right)^4 - \left(\frac{1}{2}d\right)^4\right\} = \frac{5}{2}\pi d^4 \tag{1.1}$$

$$I_2 = \int_A r^2 dA = \int_{d/2}^{d} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2}\left\{d^4 - \left(\frac{1}{2}d\right)^4\right\} = \frac{15}{32}\pi d^4 \tag{1.2}$$

(2)　AC 間，CB 間で中空円筒に生じるねじれ角 φ_{AC}，φ_{CB} を A，B において生じる反モーメント M_{A}，M_{B} を用いて表せ．

全体の FBD は図 1.1 のようになる．

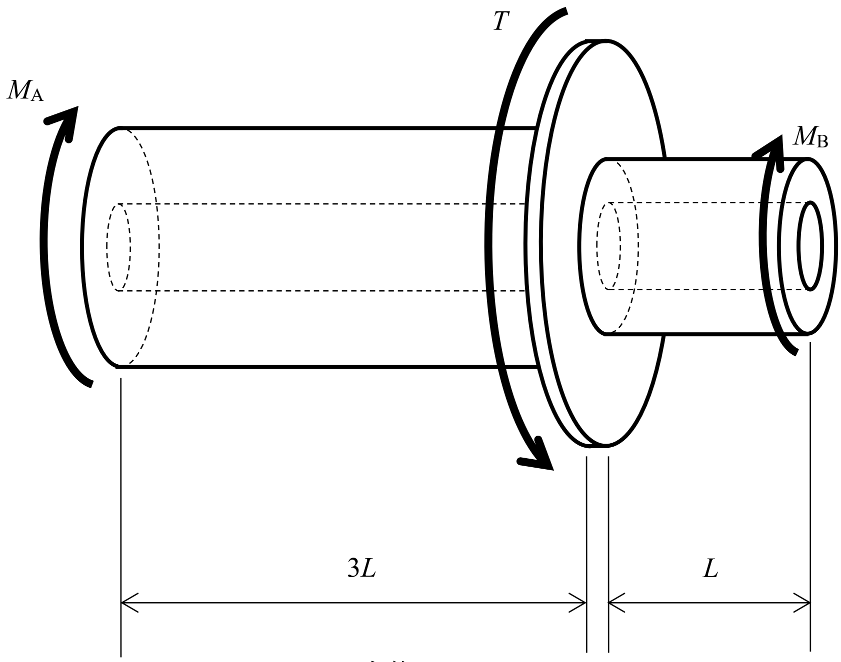


Fig. 1.1 全体の FBD.

全体の FBD よりモーメントのつりあい式が得られ，以下の式のようになる．

$$T - M_{\mathrm{A}} - M_{\mathrm{B}} = 0 \tag{1.3}$$

A 面における中空円筒 1 の中心を原点に取ると，原点からの距離 x におけるねじりモーメント $M(x)$は以下のように計算することができる．

(i) $0 \le x \le 3L$ のとき

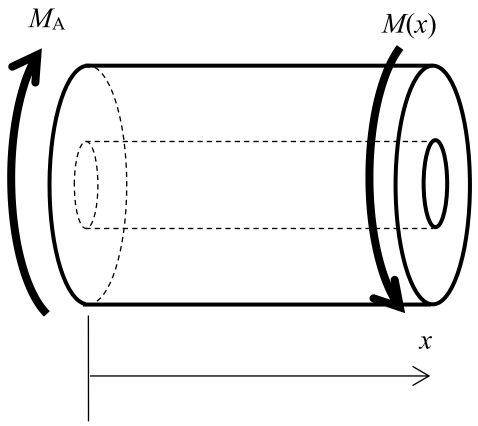


Fig. 1.2 FBD ($0 \le x \le 3L$).

$0 \le x \le 3L$ のとき，FBD は図 1.2 のように表せ，モーメントのつりあい式は以下の式のようになる．

$$
\begin{aligned}
M(x) - M_{\mathrm{A}} &= 0 \\
M(x) &= M_{\mathrm{A}}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

(ii) $3L \le x \le 4L$ のとき

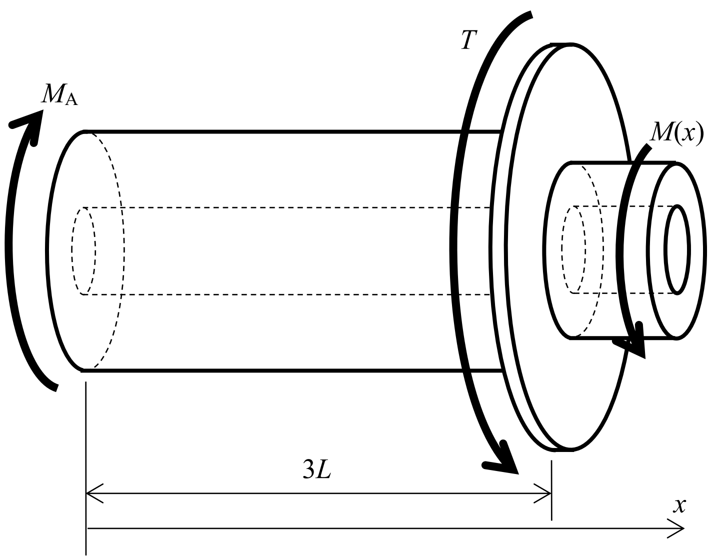


Fig. 1.3 FBD ($3L \le x \le 4L$).

$3L \le x \le 4L$ のとき，FBD は図 1.3 のように表せ，モーメントのつりあい式は以下の式のようになる．

$$\begin{aligned} -M_{\mathrm{A}} + T + M(x) &= 0 \\ M(x) &= M_{\mathrm{A}} - T \end{aligned} \tag{1.5}$$

一般に，ねじれ角 φ はねじりモーメント M，部材の長さ l，横弾性係数 G，断面二次極モーメント I_{p} を用いて以下の式により表される．

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_{\mathrm{p}}} \tag{1.6}$$

以上より，式(1.1)，式(1.2)，式(1.4)および式(1.5)を式(1.6)に代入すればねじれ角 φ_{AC}，φ_{CB} は以下のように求まる．

$$\varphi_{\mathrm{AC}} = \frac{M(x) \cdot 3L}{GI_1} = \frac{6M_{\mathrm{A}}L}{5\pi Gd^4} \tag{1.7}$$

$$\varphi_{\mathrm{CB}} = \frac{M(x) \cdot L}{GI_2} = \frac{32(M_{\mathrm{A}} - T)L}{15\pi Gd^4} \tag{1.8}$$

(3)　反モーメント M_{A}，M_{B} を T を用いて表せ．

両端が壁により固定されているため，部材全体でのねじれ角は 0 となる．これよりねじれ角について以下の条件が成り立つ．

$$\varphi_{\mathrm{AC}} + \varphi_{\mathrm{CB}} = 0 \tag{1.9}$$

式(1.9)に式(1.7)および式(1.8)を代入すると

$$\frac{6M_{\mathrm{A}}L}{5\pi Gd^4} + \frac{32(M_{\mathrm{A}} - T)L}{15\pi Gd^4} = 0 \tag{1.10}$$

これを M_{A} について整理すると

$$\frac{6M_{\mathrm{A}}L}{5\pi Gd^4}+\frac{32\left(M_{\mathrm{A}}-T\right)L}{15\pi Gd^4}=0$$

$$\frac{50M_{\mathrm{A}}L}{15\pi Gd^4}=\frac{32TL}{15\pi Gd^4} \tag{1.11}$$

$$M_{\mathrm{A}}=\frac{16}{25}T$$

と求まる．また，式(1.3)より

$$M_{\mathrm{B}}=T-M_{\mathrm{A}} \tag{1.12}$$

であることから式(1.11)を踏まえ

$$M_{\mathrm{B}}=\frac{9}{25}T \tag{1.13}$$

と求まる．

(4)　中空円筒 1，2 に生じる最大せん断応力をそれぞれ求め，AB 間に生じる最大せん断応力の大きさτ_{max}を求めよ．

せん断応力τはねじりモーメント M，断面二次極モーメント I_{p}，中心軸からの距離 r を用いて

$$\tau=\frac{M}{I_{\mathrm{p}}}r \tag{1.14}$$

と表せる．式(1.14)よりせん断応力τは部材の表面で最大になると考えられ，式(1.14)にそれぞれの中空円筒のねじりモーメント M，断面二次極モーメント I_{p}，中心軸から表面までの距離 r を代入することで各中空円筒に生じる最大せん断応力τ_{max}を求めることができる．

このことから，中空円筒 1 に生じる最大せん断応力$\tau_{1\mathrm{max}}$は，式(1.14)に式(1.1)，式(1.11)および中心軸から表面までの距離 $3d/2$ を代入することで以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
\tau_{1\,\max} &= \frac{M_{\mathrm{A}}}{I_1}\left(\frac{3}{2}d\right) \\
&= \frac{\frac{16}{25}T}{\frac{5}{2}\pi d^4}\left(\frac{3}{2}d\right) \\
&= \frac{48T}{125\pi d^3}
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

中空円筒 2 についても同様に考えると最大せん断応力$\tau_{2\max}$は以下の式のように求まる.

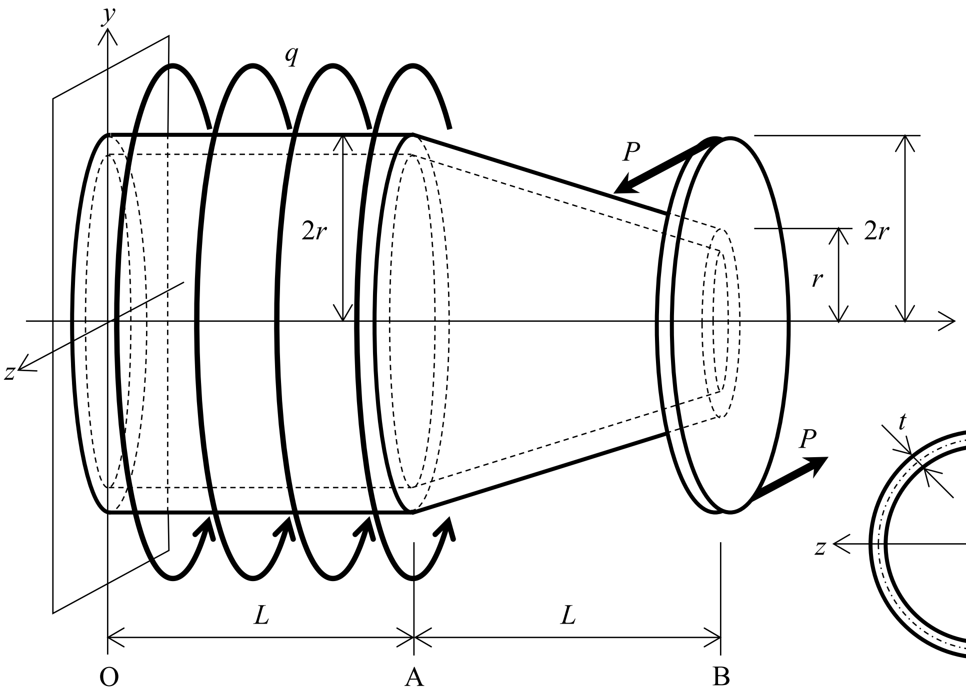
$$
\begin{aligned}
\tau_{2\,\max} &= \frac{\left(M_{\mathrm{A}} - T\right)}{I_2} d \\
&= \frac{-M_{\mathrm{B}}}{I_2} d \\
&= \frac{-\frac{9}{25}T}{\frac{15}{32}\pi d^4} d \\
&= -\frac{96T}{125\pi d^3}
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

以上より，最大せん断応力は中空円筒 2 で生じておりその大きさ$\tau_{\max}$は

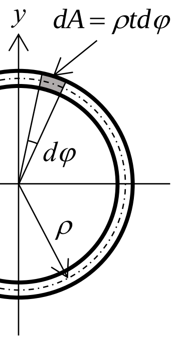
$$
\tau_{\max} = \left| -\frac{96T}{125\pi d^3} \right| = \frac{96T}{125\pi d^3} \tag{1.17}
$$

と得られる.

[2]　図 2(a)に示すように，右端に半径 $2r$ の剛体円盤が取り付けられた薄肉円筒が左端を壁で固定されている．図 2(b)には薄肉円筒の任意断面を示している．薄肉円筒には $0 \le x \le L$ において分布モーメント q が作用し，剛体円盤には外力 P が対称に作用している．このとき以下の問いに答えよ．なお，モーメントは右ねじの方向を正とする．また，薄肉円筒の肉厚 t は径と比べて十分に小さいものとし（$t<<r$），剛体円盤の厚さは無視できるものとする．



(a) 部材全体図.



(b) 任意断面図.

Fig. 2 薄肉円筒.

(1)　位置 x における薄肉円筒の半径 $r(x)$を求めよ．

(2)　図 2(b)を参考にして半径ρである薄肉円筒の断面二次極モーメント I_p を求めよ．

(3)　(1)，(2)の結果を踏まえて位置 x における薄肉円筒の断面二次極モーメント $I_p(x)$を求め，x 軸方向変化を図示せよ．

(4)　薄肉円筒全体の FBD を描き，壁からの反モーメント M_O を求めよ．

(5)　薄肉円筒のねじりモーメント $M(x)$を求めよ．

(6)　薄肉円筒表面に生じるせん断応力$\tau(x)$を求め，x 軸方向変化を図示せよ．なお，$q = 4Pr/L$ として計算せよ．

(7)　薄肉円筒の許容せん断応力τ_a = 150 [MPa]であるとき，肉厚 t が満たすべき条件を有効数字 3 桁で単位とあわせて答えよ．ただし，P = 500 [N]，q = 450 [N]，L = 100 [mm]，r = 30 [mm]とする．

(1)　位置 x における薄肉円筒の半径 $r(x)$を求めよ．

OA 間において半径 $r(x)$は一定であり

$$r(x)=2r \quad (0\le x\le L) \tag{2.1}$$

を満たす．AB 間において半径 $r(x)$は直線的に減少し $r(L) = 2r$，$r(2L) = r$ であることから

$$r(x)=\left(3-\frac{x}{L}\right)r \quad (L\le x\le 2L) \tag{2.2}$$

を満たす．以上より，薄肉円筒の位置 x における半径 $r(x)$は以下のように表される．

$$\begin{cases} r(x)=2r & (0\le x\le L) \\ r(x)=\left(3-\dfrac{x}{L}\right)r & (L\le x\le 2L) \end{cases} \tag{2.3}$$

(2)　図 2(b)を参考にして半径ρである薄肉円筒の断面二次極モーメント I_p を求めよ．

断面二次極モーメント I_p は一般に

$$I_p=\int_A \rho^2 dA \tag{2.4}$$

と表される．薄肉円筒の場合，微小面積 dA は図 2(b)に示したように

$$dA=t\cdot\rho d\varphi=\rho t d\varphi \tag{2.5}$$

として求められる．半径ρの薄肉円筒における断面二次極モーメント I_p は式(2.4)と式(2.5)から以下のように求まる．

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^{2\pi} \rho^3 t d\varphi \\ &= 2\pi\rho^3 t \end{aligned} \tag{2.6}$$

(3)　(1)と(2)の結果を踏まえて薄肉円筒の位置 x における断面二次極モーメント $I_\mathrm{p}(x)$を求め，x 軸方向変化を図示せよ．

薄肉円筒の位置 x における断面二次極モーメント $I_\mathrm{p}(x)$は式(2.6)に式(2.3)を代入することで以下のように求まる．

$$
\begin{cases}
I_\mathrm{p}(x) = 2\pi(2r)^3 t \\
\qquad = 16\pi r^3 t & (0 \le x \le L) \\
I_\mathrm{p}(x) = 2\pi\left\{\left(3-\dfrac{x}{L}\right)r\right\}^3 t \\
\qquad = 2\pi r^3 t\left(3-\dfrac{x}{L}\right)^3 & (L \le x \le 2L)
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

断面二次極モーメント $I_\mathrm{p}(x)$の x 軸方向変化を図示すると図 2.1 のように表せる．

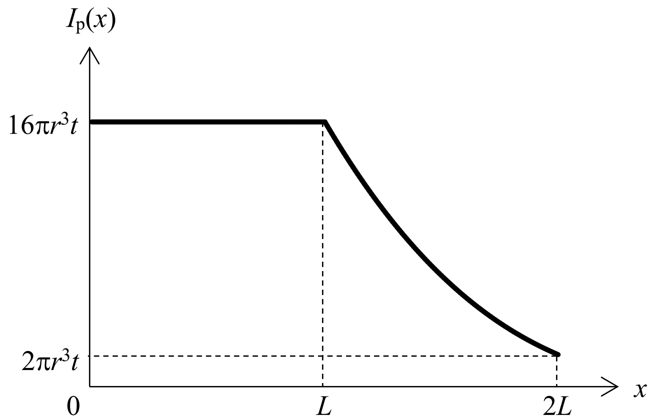


Fig. 2.1 断面二次極モーメント $I_\mathrm{p}(x)$の x 軸方向変化.

(4)　薄肉円筒全体の FBD を描き，壁からの反モーメント M_O を求めよ．

剛体円板に作用する外力 P により薄肉円筒にかかるモーメント M は

$$
\begin{aligned}
M &= P \cdot 2r \cdot 2 \\
&= 4Pr
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

である．よって，薄肉円筒全体の FBD を描くと図 2.2 のように表される．

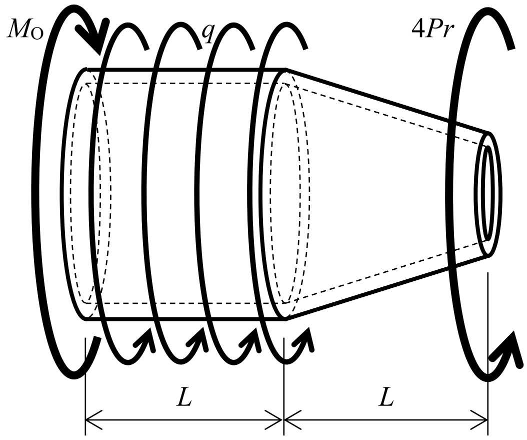


Fig. 2.2 薄肉円筒全体の FBD.

よって，薄肉円筒全体のモーメントのつり合い式は

$$-M_{\mathrm{O}} + qL + 4Pr = 0 \tag{2.9}$$

となり，反モーメント M_{O} は以下のように求まる．

$$M_{\mathrm{O}} = qL + 4Pr \tag{2.10}$$

(5) 薄肉円筒のねじりモーメント *M*(*x*)を求めよ．

薄肉円筒について距離 x における仮想断面でのねじりモーメント $M(x)$を $0 \le x \le L$, $L \le x \le 2L$ に場合分けして考える．

(ｉ) $0 \le x \le L$ の場合

FBD を描くと図 2.3 のようになる．

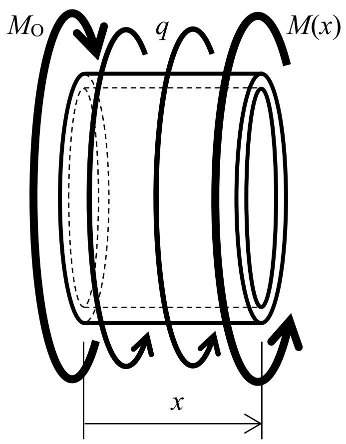


Fig. 2.3 FBD ($0 \le x \le L$).

よって，モーメントのつり合い式は

$$-M_{\mathrm{O}}+qx+M\left(x\right)=0 \tag{2.11}$$

となり，式(2.10)を踏まえるとねじりモーメント $M(x)$は

$$M\left(x\right)=q\left(L-x\right)+4Pr \tag{2.12}$$

と得られる．

(ⅱ) $L \le x \le 2L$ の場合

FBD を描くと図 2.4 のようになる．

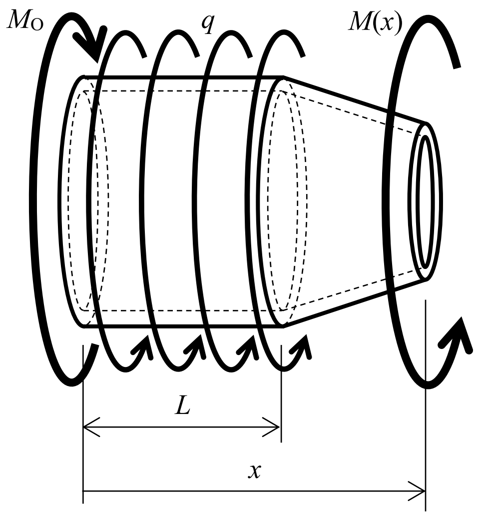


Fig. 2.4 FBD ($L \le x \le 2L$).

よって，モーメントのつり合い式は

$$-M_{\mathrm{O}}+qL+M\left(x\right)=0 \tag{2.13}$$

となり，先と同様にして式(2.10)を踏まえるとねじりモーメント $M(x)$は

$$M\left(x\right)=4Pr \tag{2.14}$$

と得られる．

以上，(ⅰ)と(ⅱ)から薄肉円筒のねじりモーメント $M(x)$は以下のように求まる．

$$\begin{cases} M(x) = q(L-x) + 4Pr & (0 \le x \le L) \\ M(x) = 4Pr & (L \le x \le 2L) \end{cases} \tag{2.15}$$

(6) 薄肉円筒表面に生じるせん断応力$\tau(x)$を求め，x 軸方向変化を図示せよ．なお，$q = 4pr/L$ として計算せよ．

丸棒断面において中心からρ離れた位置に作用するせん断応力τは

$$\tau = \frac{M}{I_\mathrm{p}}\rho \tag{2.16}$$

と表される．よって，薄肉円筒表面に生じるせん断応力$\tau(x)$は式(2.16)に式(2.3)，式(2.7)および式(2.15)を代入しさらに $q = 4Pr/L$ として計算することで以下のように求まる．

$$\begin{cases} \tau(x) = \dfrac{q(L-x)+4Pr}{16\pi r^3 t}\cdot 2r \\ \quad = \dfrac{q(L-x)+4Pr}{8\pi r^2 t} \\ \quad = \dfrac{P(2L-x)}{2\pi rtL} & (0 \le x \le L) \\ \tau(x) = \dfrac{4Pr}{2\pi r^3 t\left(3-\dfrac{x}{L}\right)^3}\cdot r\left(3-\dfrac{x}{L}\right) \\ \quad = \dfrac{4P}{2\pi rt\left(3-\dfrac{x}{L}\right)^2} \\ \quad = \dfrac{2PL^2}{\pi rt(3L-x)^2} & (L \le x \le 2L) \end{cases} \tag{2.17}$$

せん断応力$\tau(x)$の x 軸方向変化を図示すると図 2.5 のように表せる．

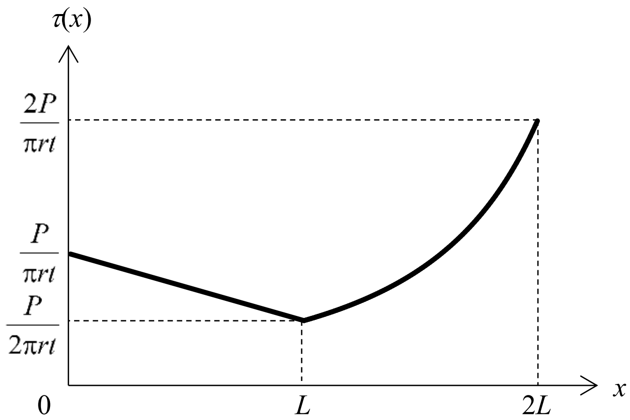


Fig. 2.5 せん断応力$\tau(x)$の x 軸方向変化.

(7) 薄肉円筒の許容せん断応力τ_a = 150 [MPa]であるとき，肉厚 t が満たすべき条件を有効数字 3 桁で単位とあわせて答えよ．ただし，P = 500 [N]，q = 450 [N]，L = 100 [mm]，r = 30 [mm]とする．

式(2.17)より薄肉円筒表面に生じる最大せん断応力τ_{max}は

$$\tau_{max} = \frac{2P}{\pi r t} \tag{2.18}$$

である．よって，薄肉円筒の肉厚 t が満たすべき条件は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} \frac{2P}{\pi r t} &\leq \tau_a \\ \frac{2P}{\pi r \tau_a} &\leq t \\ \frac{2 \times 500[\mathrm{N}]}{\pi \times 30[\mathrm{mm}] \times 150[\mathrm{MPa}]} &\leq t \\ \frac{2}{9\pi}[\mathrm{mm}] &\leq t \\ 7.07 \times 10^{-2}[\mathrm{mm}] &\leq t \end{aligned} \tag{2.19}$$