

材料の力学1 Step 2 第7回演習問題（2019/6/4 実施）

- [1] 図1に示すような段付き丸棒部材がある。 (a), (b)ともに同一の部材で、(a)は片側、(b)は両側が壁に固定されている。また、(a)には点Aにねじりモーメント $3T$ 、点Bにねじりモーメント $2T$ が作用し、(b)には $A'B'$ 間に一様分布のねじりモーメント t が作用している。このとき以下の問い合わせよ。ただし、段付き丸棒部材の横弾性係数を G とし、ねじりモーメントは x 軸に対して右ねじの方向を正とする。

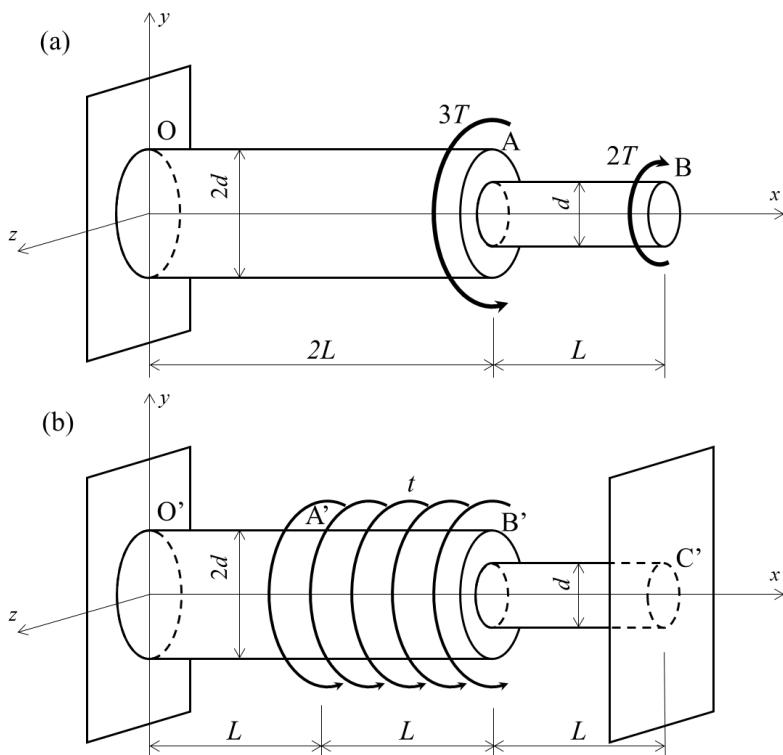


Fig. 1 壁に固定された段付き丸棒部材。

- (1) 段付き丸棒部材について、直径 $2d$ の部分の断面二次極モーメント I_{p1} 、直径 d の部分の断面二次極モーメント I_{p2} を求めよ。
- (2) (a)において、全体のFBDを描き、点Oにおける壁からの反モーメント M_0 を求めよ。
- (3) (a)において、丸棒部材に作用するねじりモーメント $M(x)$ の x 方向変化を図示せよ。
- (4) (a)において、OB間に生じるねじれ角 ϕ_{OB} を求めよ。
- (5) (b)において、点O'、点C'における壁からの反モーメントをそれぞれ $M_{O'}$ 、 $M_{C'}$ として、モーメントのつり合い式を示せ。
- (6) (b)において、 $O'A'$ 間、 $A'B'$ 間、 $B'C'$ 間に生じるねじれ角 $\phi_{O'A'}$ 、 $\phi_{A'B'}$ 、 $\phi_{B'C'}$ を求めよ。
- (7) (b)において、反モーメント $M_{O'}$ 、 $M_{C'}$ を求め、丸棒部材に作用するねじりモーメント $M'(x)$ の x 方向変化を図示せよ。

- (1) 段付き丸棒部材について、直径 $2d$ の部分の断面二次極モーメント I_{p1} 、直径 d の部分の断面二次極モーメント I_{p2} を求めよ。
- 断面二次極モーメント I_p は次式のように求められる。

$$I_p = \int r^2 dA \quad (1.1)$$

ここで、微小面積 dA は、

$$dA = 2\pi r dr \quad (1.2)$$

と表される。よって、直径 $2d$ の部分の断面二次極モーメント I_{p1} 、直径 d の部分の断面二次極モーメント I_{p2} は以下のように求まる。

$$I_{p1} = \int r^2 dA = \int_0^d 2\pi r^3 dr = \frac{1}{2}\pi d^4 \quad (1.3)$$

$$I_{p2} = \int r^2 dA = \int_0^{d/2} 2\pi r^3 dr = \frac{1}{32}\pi d^4 \quad (1.4)$$

- (2) (a)において、全体の FBD を描き、点 O における壁からの反モーメント M_O を求めよ。
- 点 O における壁からの反モーメント M_O を用いて FBD を描くと下図のようになる。

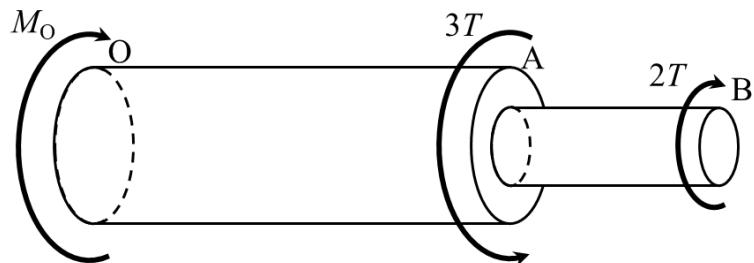


Fig. 1.1 (a)における全体の FBD.

図 1.1においてモーメントのつり合い式を考えると、反モーメント M_O は、

$$\begin{aligned} -M_O + 3T - 2T &= 0 \\ \therefore M_O &= T \end{aligned} \quad (1.5)$$

と求められる。

(3) (a)において、丸棒部材に作用するねじりモーメント $M(x)$ の x 方向変化を図示せよ。

OA 間、AB 間に作用しているねじりモーメント $M(x)$ を求める。

(i) $0 \leq x \leq 2L$ のとき

FBD を描くと下図のようになる。

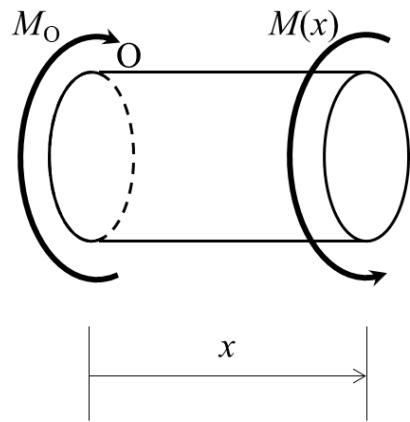


Fig. 1.2 (a)における FBD ($0 \leq x \leq 2L$).

モーメントのつり合い式より式(1.5)を踏まえるとねじりモーメント $M(x)$ は以下のように示される。

$$\begin{aligned} -M_O + M(x) &= 0 \\ \therefore M(x) &= M_O = T \end{aligned} \tag{1.6}$$

(ii) $2L \leq x \leq 3L$ のとき

FBD を描くと下図のようになる。

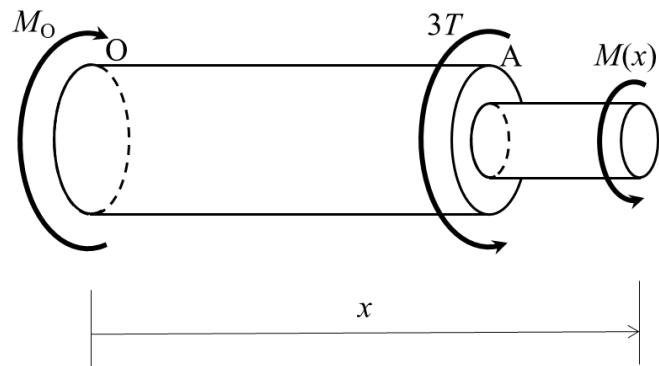


Fig. 1.3 (a)における FBD ($2L \leq x \leq 3L$).

モーメントのつり合い式より式(1.5)を踏まえるとねじりモーメント $M(x)$ は以下のように示される.

$$\begin{aligned} -M_O + 3T + M(x) &= 0 \\ \therefore M(x) &= -3T + M_O = -2T \end{aligned} \quad (1.7)$$

したがって、ねじりモーメント $M(x)$ の x 方向変化を図示すると下図のようになる。

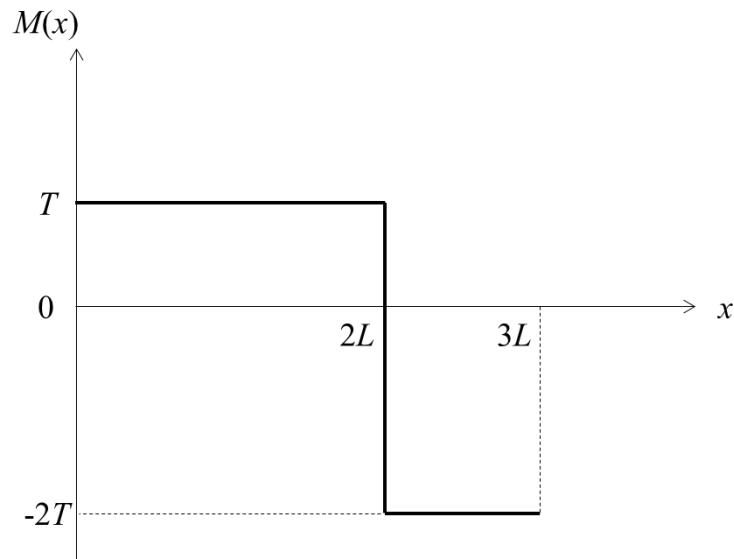


Fig. 1.4 ねじりモーメント $M(x)$ の x 方向変化.

(4) (a)において、OB間に生じるねじれ角 φ_{OB} を求めよ.

ねじれ角 φ は一般に次式のように表される.

$$\varphi = \int \frac{M}{GI_p} dx \quad (1.8)$$

式(1.3), (1.4), (1.6), (1.7)を用いて OA 間, AB 間におけるねじれ角 φ_{OA} , φ_{BC} を求めると,

$$\begin{aligned}
\varphi_{OA} &= \int_0^{2L} \frac{M(x)}{GI_{pl}} dx \\
&= \int_0^{2L} \frac{T}{G\left(\frac{1}{2}\pi d^4\right)} dx
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{2T}{\pi G d^4} x \right]_0^{2L} \\
&= \frac{4LT}{\pi G d^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{AB} &= \int_{2L}^{3L} \frac{M(x)}{GI_{p2}} dx \\
&= \int_{2L}^{3L} \frac{-2T}{G\left(\frac{1}{32}\pi d^4\right)} dx
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{64T}{\pi G d^4} x \right]_{2L}^{3L} \\
&= -\frac{64LT}{\pi G d^4}
\end{aligned}$$

となる。したがって、丸棒部材全体のねじれ角 φ_{OB} は式(1.9), (1.10)より,

$$\varphi_{OB} = \varphi_{OA} + \varphi_{AB} = -\frac{60LT}{\pi G d^4} \tag{1.11}$$

と求められる。

(5) (b)において、点 O', 点 C'における壁からの反モーメントをそれぞれ $M_{O'}$, $M_{C'}$ として、モーメントのつり合い式を示せ。

点 O', 点 C'における壁からの反モーメント $M_{O'}$, $M_{C'}$ を用いて FBD を描くと下図のようになる。

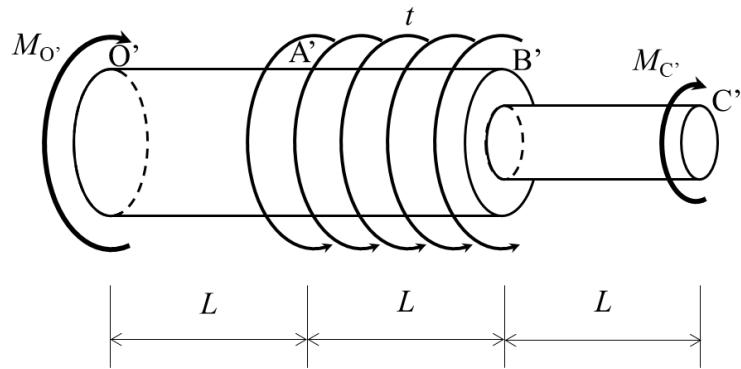


Fig. 1.5 (b)における全体の FBD.

図 1.5においてモーメントのつり合い式を考えると以下のようになる.

$$-M_{O'} - M_{C'} + tL = 0 \quad (1.12)$$

(6) (b)において、O'A'間、A'B'間、B'C'間に生じるねじれ角 $\phi_{O'A'}$ 、 $\phi_{A'B'}$ 、 $\phi_{B'C'}$ を求めよ.

丸棒部材に作用するねじりモーメント $M'(x)$ を求め、O'A'間、A'B'間、B'C'間に生じるねじれ角 $\phi_{O'A'}$ 、 $\phi_{A'B'}$ 、 $\phi_{B'C'}$ を式(1.8)より求める.

(i) $0 \leq x \leq L$ のとき

FBD を描くと下図のようになる.

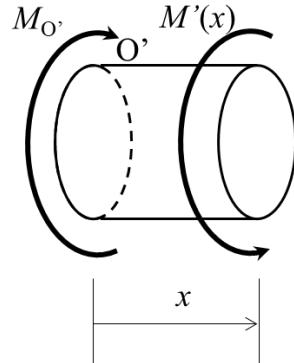


Fig. 1.6 (b)における FBD ($0 \leq x \leq L$).

モーメントのつり合い式よりねじりモーメント $M'(x)$ は以下のように示される.

$$\begin{aligned} -M_{O'} + M'(x) &= 0 \\ \therefore M'(x) &= M_{O'} \end{aligned} \quad (1.13)$$

したがって、O'A'間に生じるねじれ角 $\phi_{O'A'}$ は式(1.8)を用いると以下のように求められる.

$$\begin{aligned}
\varphi_{O'A'} &= \int_0^L \frac{M'(x)}{GI_{pl}} dx \\
&= \int_0^L \frac{M_{o'}}{G \left(\frac{1}{2} \pi d^4 \right)} dx \\
&= \left[\frac{2M_{o'}}{\pi G d^4} x \right]_0^L \\
&= \frac{2M_{o'} L}{\pi G d^4}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

(ii) $L \leq x \leq 2L$ のとき

FBD を描くと下図のようになる。

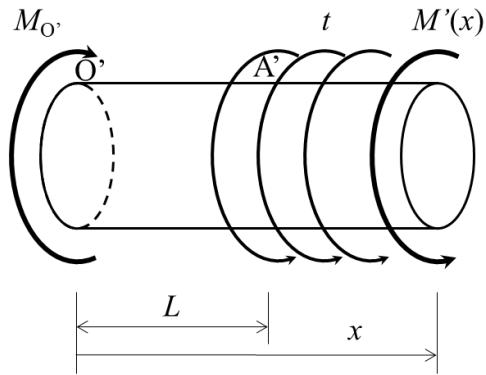


Fig. 1.7 (b)における FBD ($L \leq x \leq 2L$).

モーメントのつり合い式よりねじりモーメント $M'(x)$ は以下のように示される。

$$\begin{aligned}
-M_{o'} + t(x - L) + M'(x) &= 0 \\
\therefore M'(x) &= -tx + M_{o'} + tL
\end{aligned} \tag{1.15}$$

したがって、 $A'B'$ 間に生じるねじれ角 $\varphi_{A'B'}$ は式(1.8)を用いると以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
\varphi_{A'B'} &= \int_L^{2L} \frac{M'(x)}{GI_{pl}} dx \\
&= \int_L^{2L} \frac{(-tx + M_{o'} + tL)}{G\left(\frac{1}{2}\pi d^4\right)} dx \\
&= \left[\frac{1}{\pi G d^4} \{-tx^2 + 2(M_{o'} + tL)x\} \right]_L^{2L} \\
&= \frac{L}{\pi G d^4} (2M_{o'} - tL)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

(iii) $2L \leq x \leq 3L$ のとき

FBD を描くと下図のようになる。

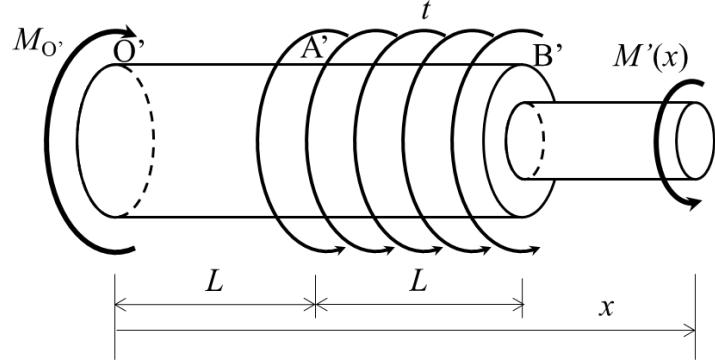


Fig. 1.8 (b)における FBD ($2L \leq x \leq 3L$).

モーメントのつり合い式よりねじりモーメント $M'(x)$ は以下のように示される。

$$\begin{aligned}
-M_{o'} + tL + M'(x) &= 0 \\
\therefore M'(x) &= M_{o'} - tL
\end{aligned} \tag{1.17}$$

したがって、 $B'C'$ 間に生じるねじれ角 $\varphi_{B'C'}$ は式(1.8)を用いると以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
\varphi_{B'C'} &= \int_{2L}^{3L} \frac{M'(x)}{GI_{p2}} dx \\
&= \int_{2L}^{3L} \frac{M_{O'} - tL}{G \left(\frac{1}{32} \pi d^4 \right)} dx \\
&= \left[\frac{32(M_{O'} - tL)}{\pi G d^4} x \right]_{2L}^{3L} \\
&= \frac{32L}{\pi G d^4} (M_{O'} - tL)
\end{aligned} \tag{1.18}$$

(7) (b)において、反モーメント $M_{O'}$, $M_{C'}$ を求める、丸棒部材に作用するねじりモーメント $M'(x)$ の x 方向変化を図示せよ。

式(1.14), (1.16), (1.18)より $O'C'$ 間のねじれ角 $\varphi_{O'C'}$ は以下のように求められる。

$$\varphi_{O'C'} = \varphi_{O'A'} + \varphi_{A'B'} + \varphi_{B'C'} = \frac{L}{\pi G d^4} (36M_{O'} - 33tL) \tag{1.19}$$

ここで、(b)は両端固定であるため $O'C'$ 間のねじれ角 $\varphi_{O'C'}$ は 0 となる。よって、式(1.19)は

$$\begin{aligned}
\frac{L}{\pi G d^4} (36M_{O'} - 33tL) &= 0 \\
12M_{O'} - 11tL &= 0
\end{aligned} \tag{1.20}$$

と変形できる。したがって、式(1.12)と式(1.20)より $M_{O'}$, $M_{C'}$ はそれぞれ、

$$M_{O'} = \frac{11}{12} tL \tag{1.21}$$

$$M_{C'} = \frac{1}{12} tL \tag{1.22}$$

と求められる。式(1.13), (1.15), (1.17)に代入するとねじりモーメント $M'(x)$ は以下のよう求められ、 x 方向変化を図示すると図 1.9 のようになる。

$$\begin{aligned}
 M'(x) &= M_{O'} = \frac{11}{12}tL & (0 \leq x \leq L) \\
 M'(x) &= -tx + M_{O'} + tL = \frac{23}{12}tL - tx & (L \leq x \leq 2L) \\
 M'(x) &= M_{O'} - tL = -\frac{1}{12}tL & (2L \leq x \leq 3L)
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

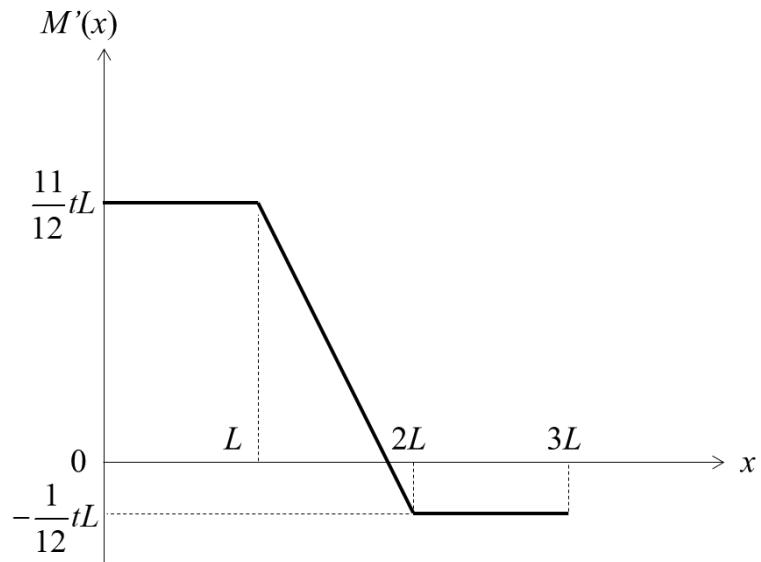


Fig. 1.9 ねじりモーメント M' の x 方向変化.

- [2] 図 2 に示すように、右端に半径 $2r$ の剛体円盤が取り付けられた段付きの丸棒部材が点 O で壁に固定されている。剛体円盤には外力 P が対称かつ z 軸に平行に作用している。このとき以下の問い合わせよ。ただし、丸棒部材の横弾性係数は G とする。

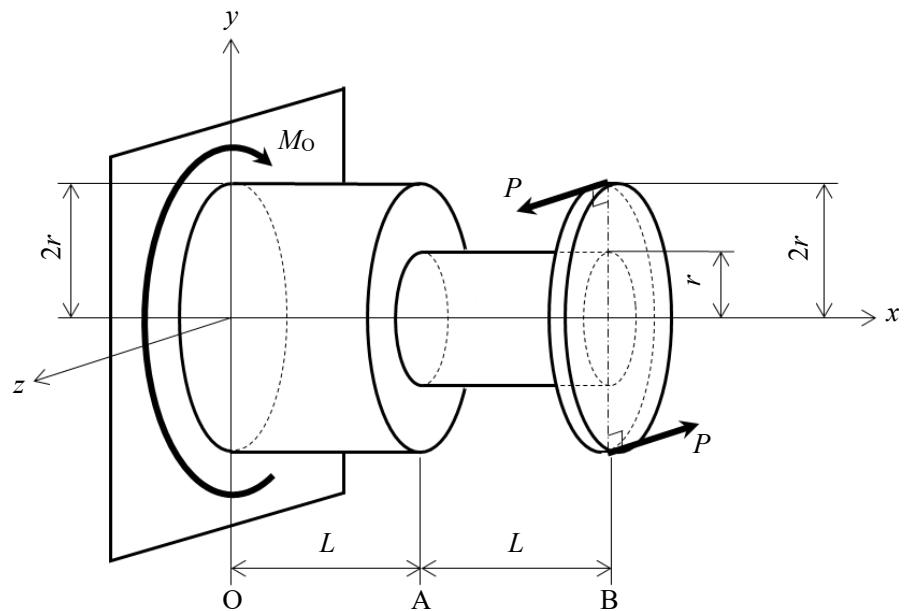


Fig. 2 剛体円盤が取り付けられた段付き丸棒部材.

- (1) 段付き丸棒部材について、半径 $2r$ の部分の断面二次極モーメント I_{p1} 、半径 r の部分の断面二次極モーメント I_{p2} を求めよ。
- (2) 壁からの反モーメント M_0 を求めよ。
- (3) OB 間に生じるねじれ角 ϕ_{OB} を求めよ。
- (4) $x = 2L$ において丸棒部材に生じる最大せん断応力 τ_{\max} を求めよ。

- (1) 段付き丸棒部材について、半径 $2r$ の部分の断面二次極モーメント I_{p1} 、半径 r の部分の断面二次極モーメント I_{p2} をそれぞれ求めよ。

半径 ρ の丸棒部材において断面二次極モーメント I_p は

$$I_p = \int_A y^2 dA \quad (2.1)$$

と表せる。ここで、微小面積 dA は次のようになる。

$$dA = 2\pi y dy \quad (2.2)$$

したがって、断面二次極モーメント I_p は

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A y^2 dA \\ &= \int_0^\rho 2\pi y^3 dx \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho^4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

と表される。よって、半径 $2r$ の部分の断面二次極モーメント I_{p1} 、半径 r の部分の断面二次極モーメント I_{p2} は

$$\begin{aligned} I_{p1} &= \frac{1}{2}\pi\rho^4 \\ &= \frac{1}{2}\pi \times (2r)^4 \\ &= 8\pi r^4 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} I_{p2} &= \frac{1}{2}\pi\rho^4 \\ &= \frac{1}{2}\pi \times r^4 \\ &= \frac{1}{2}\pi r^4 \end{aligned} \quad (2.5)$$

と求められる。

(2) 壁からの反モーメント M_0 を求めよ.

外力 P によるモーメント M は

$$M = 2 \times P \times 2r = 4Pr \quad (2.6)$$

より、部材全体の FBD は以下のようになる.

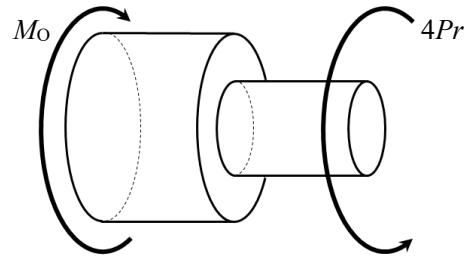


Fig. 2.1 部材全体の FBD.

モーメントのつり合い式より

$$-M_0 + 4Pr = 0 \quad (2.7)$$

が成り立つ. よって、壁からの反モーメント M_0 は

$$M_0 = 4Pr \quad (2.8)$$

となる.

(3) OB 間に生じるねじれ角 ϕ_{OB} を求めよ.

ねじれ角 ϕ_{OB} は次のように求められる.

$$\begin{aligned} \phi_{OB} &= \phi_{OA} + \phi_{AB} \\ &= \int_0^L \theta_1(x) dx + \int_L^{2L} \theta_2(x) dx \\ &= \int_0^L \frac{M(x)}{GI_{pl}} dx + \int_L^{2L} \frac{M(x)}{GI_{p2}} dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

ただし, θ は単位長さあたりのねじれ角(比ねじれ角), $M(x)$ は位置 x の仮想断面におけるねじりモーメントを表す. ここで, ねじりモーメント $M(x)$ を求める. 図2.2のようにFBDを描くとモーメントのつり合い式は

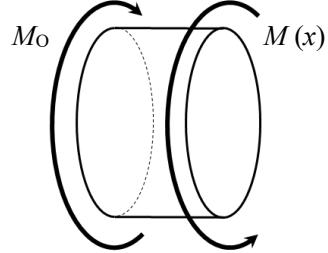


Fig. 2.2 FBD.

$$-M_0 + M(x) = 0 \quad (2.10)$$

となり, 式(2.8)を踏まえると

$$M(x) = M_0 = 4Pr \quad (2.11)$$

と得られる. よって, 式(2.9)に式(2.4), (2.5), (2.11)を代入することでねじれ角 ϕ_{OB} は

$$\begin{aligned} \phi_{OB} &= \int_0^L \frac{M(x)}{GI_{p1}} dx + \int_L^{2L} \frac{M(x)}{GI_{p2}} dx \\ &= \int_0^L \frac{4Pr}{8\pi Gr^4} dx + \int_L^{2L} \frac{4Pr}{\frac{1}{2}\pi Gr^4} dx \\ &= \frac{P}{2\pi Gr^3} [x]_0^L + \frac{8P}{\pi Gr^3} [x]_L^{2L} \\ &= \frac{PL}{2\pi Gr^3} + \frac{8PL}{\pi Gr^3} \\ &= \frac{17PL}{2\pi Gr^3} \end{aligned} \quad (2.12)$$

と求められる.

(4) $x = 2L$ において丸棒部材に生じる最大せん断応力 τ_{max} を求めよ.

位置 x において, せん断応力は表面で最大となる. 位置 x での中心軸から距離 ρ 離れた表

面におけるせん断応力 $\tau_{\max}(x)$ は

$$\begin{aligned}\tau_{\max}(x) &= G\rho\theta(x) \\ &= \frac{M(x)}{I_p}\rho\end{aligned}\tag{2.13}$$

となる。

よって、 $x = 2L$ における最大せん断応力 τ_{\max} は式 (2.5), (2.11) を代入すると

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{4Pr}{I_{p2}} \times r \\ &= \frac{4Pr^2}{\frac{1}{2}\pi r^4} \\ &= \frac{8P}{\pi r^2}\end{aligned}\tag{2.14}$$

と求められる。