

## 材料の力学 1 Step 1 第 6 回演習問題 (2019/5/28 実施)

- [1] 平面応力状態にある十分に薄い弾性体において, 図 1 のように  $x$ - $y$  座標系から反時計回りに  $60^\circ$  傾いた  $n$ - $t$  座標系に沿う正方形微小要素を考える. 薄い弾性体に対して  $x$  方向に引張応力  $5\sigma$ ,  $y$  方向に圧縮応力  $2\sigma$  が作用している. 弾性体の縦弾性係数を  $E$ , 横弾性係数を  $G$ , ポアソン比を  $\nu$  として, 以下の問いに答えよ.

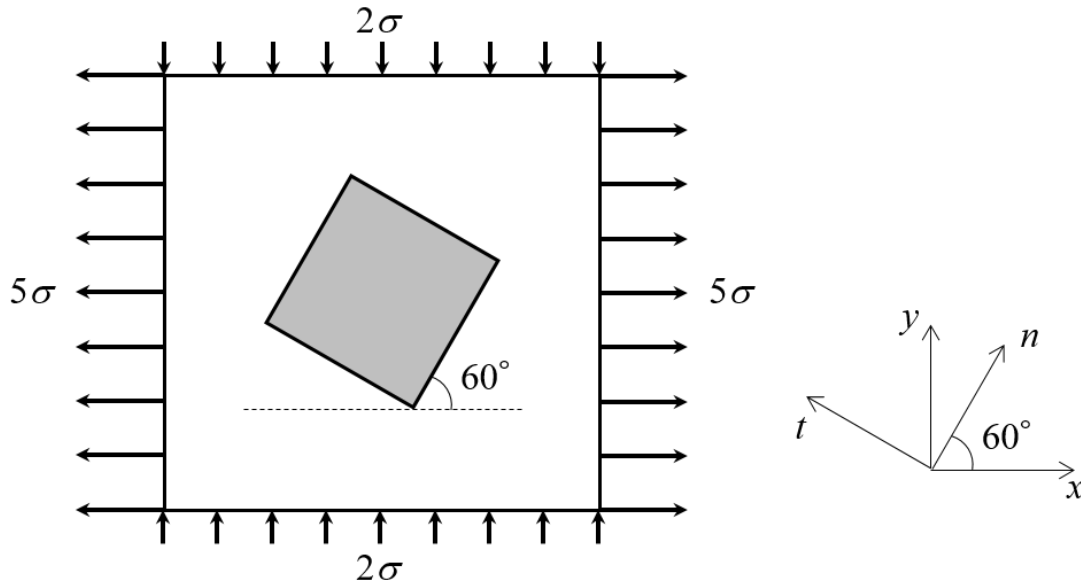


Fig. 1 平面応力状態にある弾性体.

- (1)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルからモールの応力円を描き, その中心と半径を求めよ.
- (2) (1)で描いたモールの応力円より,  $n$ - $t$  座標系における応力テンソル $[\sigma]$ を求めよ.
- (3)  $x$ ,  $y$  方向のひずみ $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ とせん断ひずみ $\gamma_{xy}$ をそれぞれ $\sigma$ ,  $E$ ,  $\nu$ を用いて表せ.
- (4)  $x$ - $y$  座標系におけるひずみテンソルからモールのひずみ円を描き, その中心と半径を求めよ.
- (5) (4)で描いたモールのひずみ円より,  $n$ - $t$  座標系におけるひずみテンソル $[\epsilon]$ を求めよ.
- (6)  $n$ - $t$  座標系におけるせん断応力 $\tau_{nt}$ とせん断ひずみ $\gamma_{nt}$ の関係を踏まえ, 横弾性係数  $G$  を  $E$ ,  $\nu$ を用いて表せ.

- (1)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルからモールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ。  
 $x$ - $y$  座標系における応力テンソル $[\sigma]$ は次式で表される。

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sigma & 0 \\ 0 & -2\sigma \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

よって、モールの応力円は図 1.1 のように描ける。

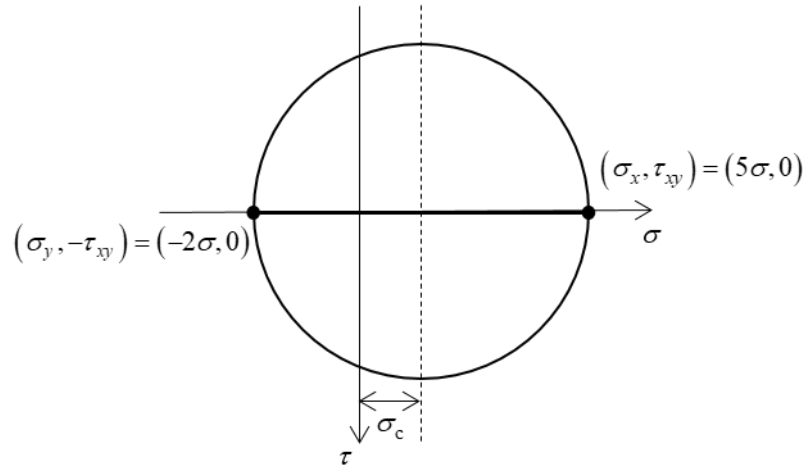


Fig. 1.1 モールの応力円.

図 1.1 においてモールの応力円の中心 $(\sigma_c, 0)$ と半径 $r$ は次のようになる。

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{3}{2}\sigma \quad (1.2)$$

$$(\sigma_c, 0) = \left( \frac{3}{2}\sigma, 0 \right)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{7}{2}\sigma \quad (1.3)$$

- (2) (1)で描いたモールの応力円より、 $n$ - $t$  座標系における応力テンソル $[\sigma]$ を求めよ。

$n$ - $t$  座標系は  $x$ - $y$  座標系を反時計回りに $\theta=60^\circ$ 回転させたものである。よって、モールの応力円上では図 1.2 のように反時計回りに $2\theta=120^\circ$ 回転させればよい。

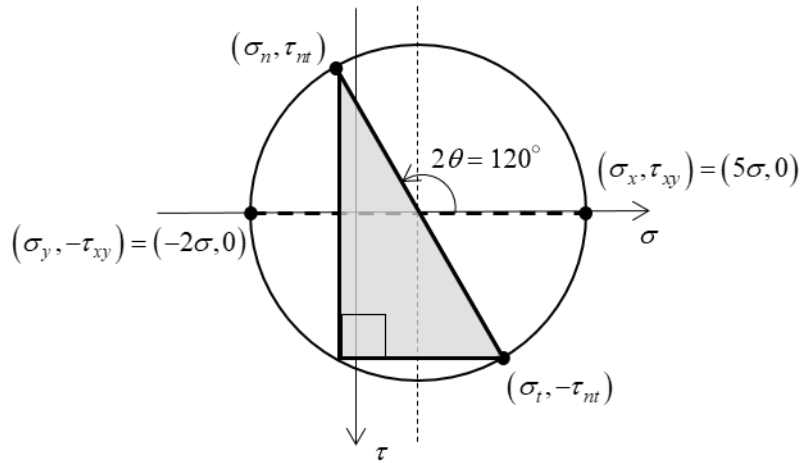


Fig. 1.2  $2\theta=120^\circ$ 回転させたモールの応力円.

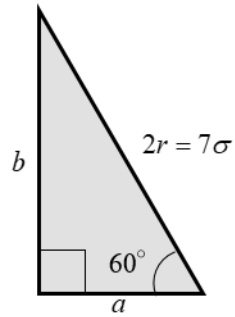


Fig. 1.3 モールの応力円内の三角形.

ここで図 1.2 に示した直角三角形について考える. この直角三角形は図 1.3 のように表され, 式(1.3)を踏まえ斜辺が  $2r=7\sigma$  であることから, 各辺の大きさ  $a$  と  $b$  は次のように分かる.

$$a = \frac{7}{2}\sigma \quad b = \frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma \quad (1.4)$$

これより図 1.2 から  $n$ - $t$  座標系における垂直応力  $\sigma_n$ ,  $\sigma_t$  とせん断応力  $\tau_{nt}$  が求められる.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_c - \frac{a}{2} \\ &= \frac{3}{2}\sigma - \frac{7}{4}\sigma \\ &= -\frac{\sigma}{4} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_t &= \sigma_c + \frac{a}{2} \\
&= \frac{3}{2}\sigma + \frac{7}{4}\sigma \\
&= \frac{13\sigma}{4}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{nt} &= -\frac{b}{2} \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{2}\sigma \\
&= -\frac{7\sqrt{3}}{4}\sigma
\end{aligned} \tag{1.7}$$

よって、 $n$ - $t$  座標系における応力テンソル $[\sigma]$ は次のようになる。

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{4} & -\frac{7\sqrt{3}}{4}\sigma \\ -\frac{7\sqrt{3}}{4}\sigma & \frac{13\sigma}{4} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

(3)  $x$ ,  $y$  方向のひずみ $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ とせん断ひずみ $\gamma_{xy}$ を $\sigma$ ,  $E$ ,  $\nu$ を用いて表せ。

応力-ひずみの関係式から、平面応力状態を考慮すると  $x$ - $y$  座標系における垂直ひずみ $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ とせん断ひずみ $\gamma_{xy}$ はそれぞれ下式のように表される。

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \tag{1.10}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{1.11}$$

$\sigma_x=5\sigma$ ,  $\sigma_y=-2\sigma$ ,  $\tau_{xy}=0$  を式(1.9)~(1.11)に代入すると、垂直ひずみ $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ とせん断ひずみ $\gamma_{xy}$ は下式のようになる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{5\sigma - \nu(-2\sigma)\} \\ &= \frac{\sigma}{E} (5 + 2\nu)\end{aligned}\tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{(-2\sigma) - \nu \cdot 5\sigma\} \\ &= -\frac{\sigma}{E} (2 + 5\nu)\end{aligned}\tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{0}{G} \\ &= 0\end{aligned}\tag{1.14}$$

(4)  $x$ - $y$  座標系におけるひずみテンソルからモールのひずみ円を描き，その中心と半径を求めよ．

式(1.12)～(1.14)より  $x$ - $y$  座標系におけるひずみテンソル $[\varepsilon]$ は次のようになる．

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{E}(5+2\nu) & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{E}(2+5\nu) \end{pmatrix}\tag{1.15}$$

よって，モールのひずみ円は図 1.4 のようになる．図 1.4 においてモールのひずみ円の中心 $(\varepsilon_c, 0)$ と半径  $r$  は次のようになる．

$$\begin{aligned}\varepsilon_c &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{3\sigma}{2E}(1-\nu) \\ (\varepsilon_c, 0) &= \left( \frac{3\sigma}{2E}(1-\nu), 0 \right)\end{aligned}\tag{1.16}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = \frac{7\sigma}{2E}(1+\nu)\tag{1.17}$$

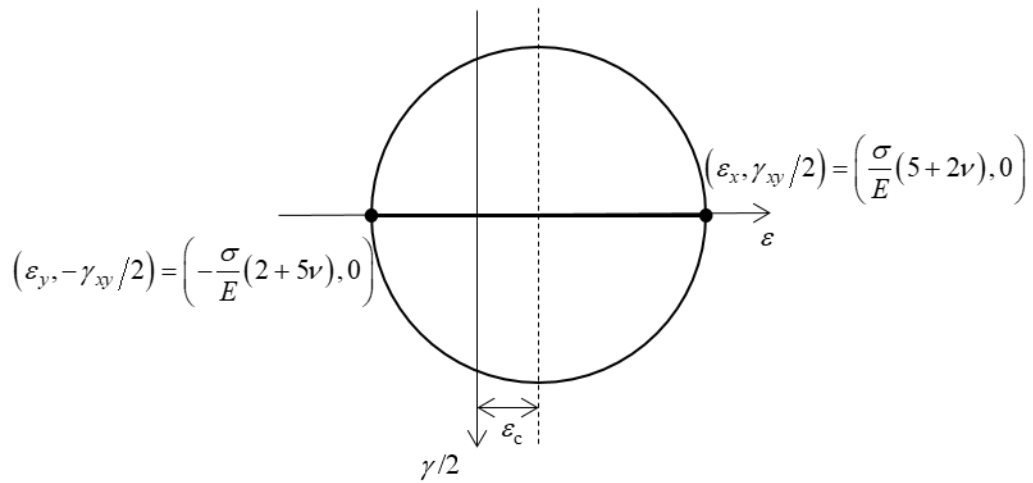


Fig. 1.4 モールのひずみ円.

- (5) (4)で描いたモールのひずみ円より,  $n$ - $t$  座標系におけるひずみテンソル $[\epsilon]$ を求めよ.  
 モールの応力円の場合と同様に考え, モールのひずみ円上で反時計回りに  $2\theta=120^\circ$ 回転させると図 1.5 のようになる.

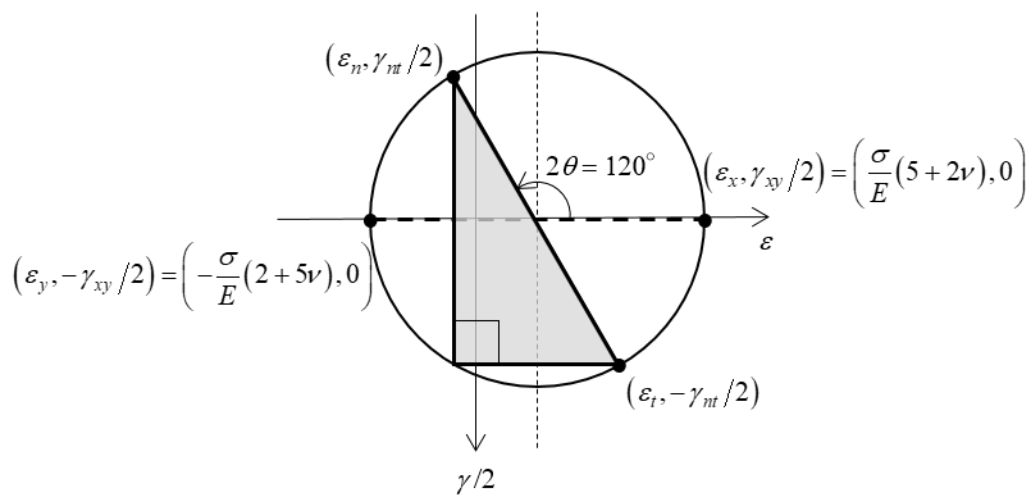


Fig. 1.5  $2\theta=120^\circ$ 回転させたモールのひずみ円.

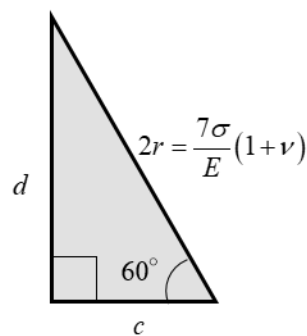


Fig. 1.6 ひずみ円内の三角形.

図 1.5 に示した直角三角形は図 1.6 のように表され，式(1.17)を踏まえ斜辺が  $2r = \frac{7\sigma}{E}(1+\nu)$  であることから，各辺の大きさ  $c$  と  $d$  は次のように分かる．

$$c = \frac{7\sigma}{2E}(1+\nu) \quad d = \frac{7\sqrt{3}\sigma}{2E}(1+\nu) \quad (1.18)$$

これより図 1.5 から  $n$ - $t$  座標系における垂直ひずみ  $\varepsilon_n$ ， $\varepsilon_t$  とせん断ひずみ  $\gamma_{nt}$  が求められる．

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \varepsilon_c - \frac{c}{2} \\ &= \frac{3\sigma}{2E}(1-\nu) - \frac{7\sigma}{4E}(1+\nu) \\ &= -\frac{\sigma}{4E}(1+13\nu) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \varepsilon_c + \frac{c}{2} \\ &= \frac{3\sigma}{2E}(1-\nu) + \frac{7\sigma}{4E}(1+\nu) \\ &= \frac{\sigma}{4E}(13+\nu) \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{nt}}{2} &= -\frac{d}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{7\sqrt{3}\sigma}{2E}(1+\nu) \\ &= -\frac{7\sqrt{3}\sigma}{4E}(1+\nu) \end{aligned} \quad (1.21)$$

よって， $n$ - $t$  座標系におけるひずみテンソル  $[\varepsilon]$  は次のようになる．

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= \begin{pmatrix} \varepsilon_n & \gamma_{nt}/2 \\ \gamma_{nt}/2 & \varepsilon_t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{4E}(1+13\nu) & -\frac{7\sqrt{3}\sigma}{4E}(1+\nu) \\ -\frac{7\sqrt{3}\sigma}{4E}(1+\nu) & \frac{\sigma}{4E}(13+\nu) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.22)$$

(6)  $n$ - $t$  座標系におけるせん断応力  $\tau_{nt}$  とせん断ひずみ  $\gamma_{nt}$  の関係を踏まえ，横弾性係数  $G$  を  $E$ ,  $\nu$  を用いて表せ．

$n$ - $t$  座標系におけるせん断応力  $\tau_{nt}$  とせん断ひずみ  $\gamma_{nt}$  は式(1.7)と式(1.21)に示した通りである．よって，これらの値をせん断応力  $\tau_{nt}$  とせん断ひずみ  $\gamma_{nt}$  の関係式

$$\tau_{nt} = G\gamma_{nt} \quad (1.23)$$

に代入すると，次式のようになる．

$$-\frac{7\sqrt{3}}{4}\sigma = G \cdot 2 \left\{ -\frac{7\sqrt{3}\sigma}{4E}(1+\nu) \right\} \quad (1.24)$$

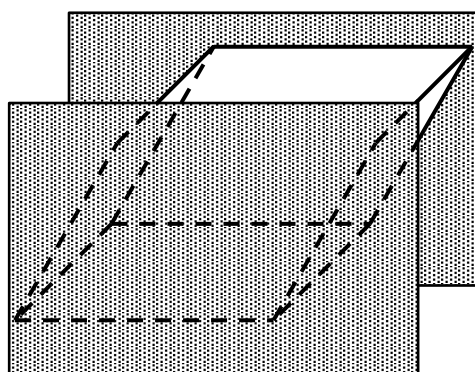
式(1.16)を整理することで

$$\begin{aligned} G &= \frac{4E}{2\{-7\sqrt{3}\sigma(1+\nu)\}} \times \left( -\frac{7\sqrt{3}\sigma}{4} \right) \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (1.25)$$

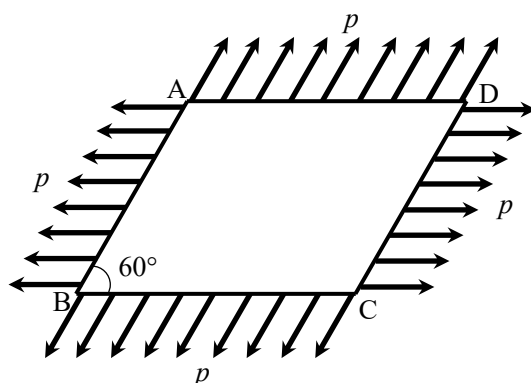
となり，横弾性係数  $G$  を  $E$  と  $\nu$  を用いて表すことができる．



- [2] 図2に示すように、 $z$ 方向に壁で固定され壁との摩擦がない弾性体に対し、 $p=2\sqrt{3}$  [MPa]の応力ベクトルが $x$ 方向および $t$ 方向に作用している．このとき以下の問いに答えよ．ただし、ポアソン比 $\nu$ は $\nu=0.3$ とする．また、解答にあたっては単位をつけよ．



(a) 3次元的に見た弾性体.



(b) 2次元的に見た弾性体.

Fig. 2 弾性体 ABCD の応力状態.

- (1) この弾性体の応力状態を答えよ．
- (2) AD 面の  $x$ - $y$  座標系における垂直応力 $\sigma_y$ ，せん断応力 $\tau_{xy}$ および CD 面の  $n$ - $t$  座標系における垂直応力 $\sigma_n$ ，せん断応力 $\tau_{nt}$ を求めよ．
- (3) 応力の座標変換を行うことで AD 面の垂直応力 $\sigma_x$ を求めよ．
- (4)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソル $[\sigma]$ を求め，モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．
- (5) (4)で描いたモールの応力円より，主応力 $(\sigma_1, \sigma_2)$ および主方向 $(\theta_1, \theta_2)$ を求めよ．ただし，主方向は  $x$ - $y$  座標系を基準とし， $-90^\circ \leq \theta_2 \leq \theta_1 \leq 90^\circ$ とする．
- (6) 弾性体に作用する主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を求めよ．また，最大せん断応力 $\tau_{\max}$ を求めよ．ただし，主応力は $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ とし $\sigma_1, \sigma_2$ は(5)の $\sigma_1, \sigma_2$ と必ずしも一致するとは限らない．

(1) この弾性体の応力状態を答えよ。

この弾性体は壁で固定されているため  $z$  軸方向のひずみ  $\varepsilon_z$  は 0 とみなすことができる。従ってこの弾性体の応力状態は平面ひずみ状態である。

(2) AD 面の  $x$ - $y$  座標系における垂直応力  $\sigma_y$ 、せん断応力  $\tau_{xy}$  および CD 面の  $n$ - $t$  座標系における垂直応力  $\sigma_n$ 、せん断応力  $\tau_{nt}$  を求めよ。

AD 面の応力ベクトル  $p$  を、図 2.1 のように  $x$ - $y$  座標系において面に対する垂直方向成分および水平方向成分に分解すると、垂直応力  $\sigma_y$ 、せん断応力  $\tau_{xy}$  は次のようになる。

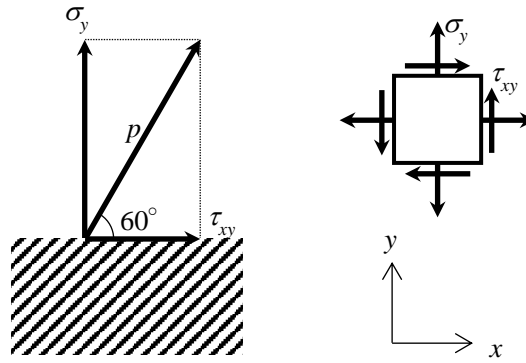


Fig. 2.1 AD 面の応力ベクトル。

$$\begin{aligned}\sigma_y &= p \sin 60^\circ \\ \tau_{xy} &= p \cos 60^\circ\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで  $p=2\sqrt{3}$  [MPa] を代入すると垂直応力  $\sigma_y$ 、せん断応力  $\tau_{xy}$  はそれぞれ次のように求められる。

$$\begin{aligned}\sigma_y &= p \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 [\text{MPa}] \\ \tau_{xy} &= p \cos 60^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} [\text{MPa}]\end{aligned}\tag{2.2}$$

また CD 面の応力ベクトル  $p$  を、図 2.2 のように  $n$ - $t$  座標系において面に対する垂直方向成分および水平方向成分に分解すると、垂直応力  $\sigma_n$ 、せん断応力  $\tau_{nt}$  は次のようになる。

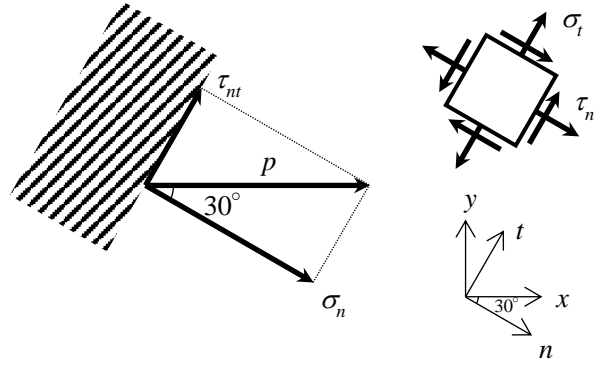


Fig. 2.2 面 CD の応力ベクトル.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= p \cos 30^\circ \\ \tau_{nt} &= p \sin 30^\circ\end{aligned}\tag{2.3}$$

同様に  $p=2\sqrt{3}$  [MPa]を代入すると垂直応力 $\sigma_n$ , せん断応力 $\tau_{nt}$ はそれぞれ次のように求められる.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= p \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3[\text{MPa}] \\ \tau_{nt} &= p \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}[\text{MPa}]\end{aligned}\tag{2.4}$$

(3) 応力の座標変換を行うことで AD 面の垂直応力 $\sigma_x$ を求めよ.

応力の座標変換は一般に次式で表される.

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta\tag{2.5}$$

$n$ - $t$ 座標系は $x$ - $y$ 座標系を $30^\circ$ 時計回りに回転した座標系であるため式(2.5)に $\theta=-30^\circ$ を代入し, さらに式(2.2)および式(2.4)の結果を用いることで,  $\sigma_x$ は次のように求められる.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2(-30^\circ) + \sigma_y \sin^2(-30^\circ) + 2\tau_{xy} \sin(-30^\circ) \cos(-30^\circ) \\ 3 &= \frac{3}{4}\sigma_x + 3 \times \frac{1}{4} + 2 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \sigma_x &= 5[\text{MPa}]\end{aligned}\tag{2.6}$$

- (4)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソル $[\sigma]$ を求め、モールの応力円を描き、その中心と半径を求めよ.

式(2.2)および式(2.6)より  $x$ - $y$  座標系における応力テンソル $[\sigma]$ は次のようになる.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} [\text{MPa}] \quad (2.7)$$

式(2.7)よりモールの応力円は図 2.3 のようになる.

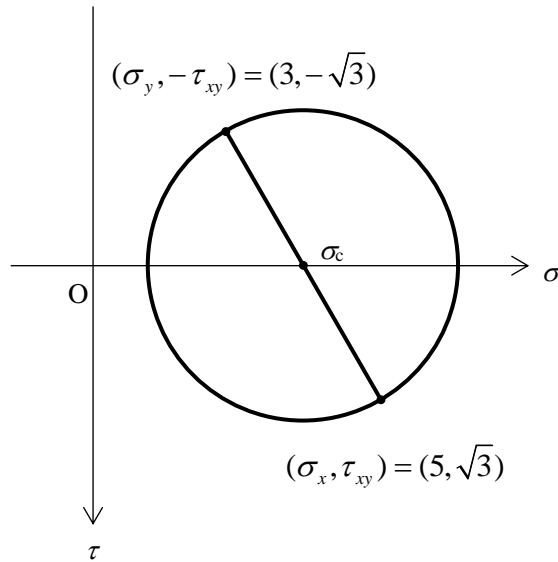


Fig. 2.3 モールの応力円.

図 2.3 よりモールの応力円の中心 $(\sigma_c, 0)$ および半径  $r$  は以下のように求められる.

$$\begin{aligned} (\sigma_c, 0) &= \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) \\ &= (4, 0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(5-3)^2 + 4 \times (\sqrt{3})^2} \\ &= 2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

- (5) (4)で描いたモールの応力円より，主応力 $(\sigma_1, \sigma_2)$ および主方向 $(\theta_1, \theta_2)$ を求めよ．ただし，主方向は  $x$ - $y$  座標系を基準とし， $-90^\circ \leq \theta_2 \leq \theta_1 \leq 90^\circ$  とする．

図 2.3 で示したモールの応力円に主応力，主方向を書き込むと図 2.4 のようになる．モールの応力円の中心 $(\sigma_c, 0)$ と半径  $r$  より主応力 $(\sigma_1, \sigma_2)$ を求めると次のようになる．

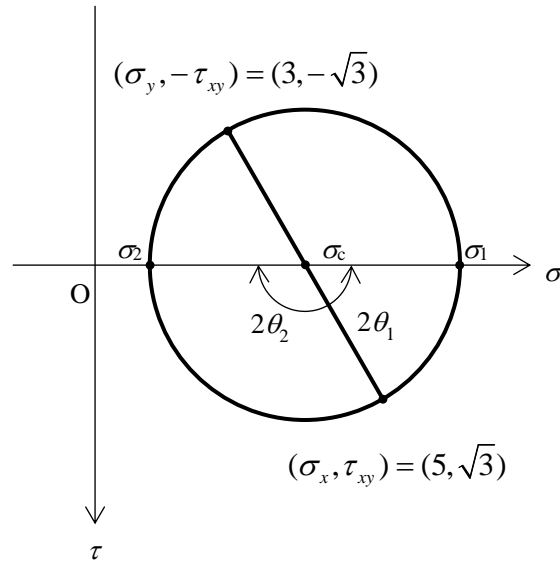


Fig. 2.4 モールの応力円

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_c + r = 4 + 2 = 6[\text{MPa}] \\ \sigma_2 &= \sigma_c - r = 4 - 2 = 2[\text{MPa}]\end{aligned}\tag{2.10}$$

図 2.4 より  $\theta_1$  は以下のように求められる．

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left| \frac{2\sqrt{3}}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \sqrt{3} \\ &= 30[\text{deg}]\end{aligned}\tag{2.11}$$

主方向は直交するので主方向 $(\theta_1, \theta_2)$ は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ \theta_1 - 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -60 \end{pmatrix} [\text{deg}] \quad (2.12)$$

(6) 弾性体に作用する主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を求めよ。また、最大せん断応力 $\tau_{\max}$ を求めよ。ただし、主応力は $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ とし $\sigma_1, \sigma_2$ は(5)の $\sigma_1, \sigma_2$ と必ずしも一致するとは限らない。

図2の弾性体は平面ひずみ状態であり $\varepsilon_z=0$ であることから、 $z$ 軸方向の応力 $\sigma_z$ は応力—ひずみの関係式より次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right\} = 0 \\ \therefore \sigma_z &= \nu (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ただし、式(2.11)における $E$ はヤング率である。 $(\sigma_x + \sigma_y)$ は不変量であるため式(2.14)のような関係がある。

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ &= 6 + 2 \\ &= 8 \end{aligned} \quad (2.14)$$

式(2.13)および式(2.14)より $z$ 軸方向の応力 $\sigma_z$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \nu (\sigma_x + \sigma_y) \\ &= 0.3(5+3) \\ &= 2.4 [\text{MPa}] \end{aligned} \quad (2.15)$$

平面ひずみ状態より $\sigma_z$ は主応力となる。従って、(5)で得られた結果を踏まえ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ に注意すると主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ は次のようになる。

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (6, 2.4, 2) [\text{MPa}] \quad (2.16)$$

式(2.16)をもとにモールの応力円を描くと図2.5のようになる。

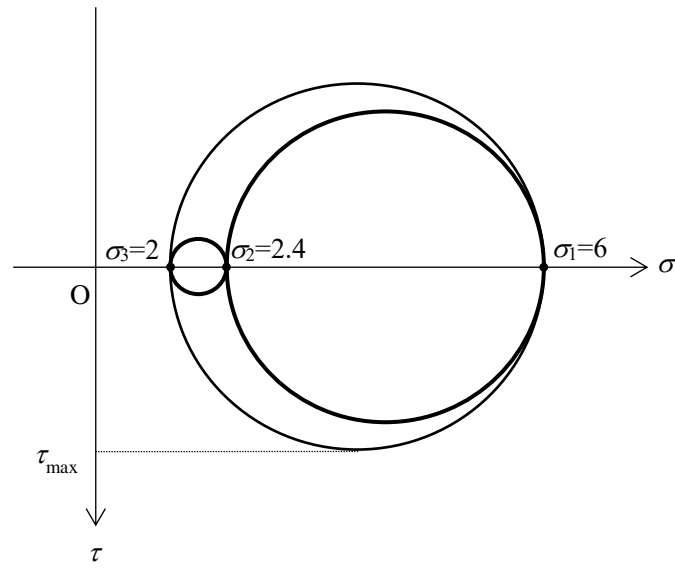


Fig. 2.5 モールの応力円.

図 2.5 より最大せん断応力  $\tau_{\max}$  は次のように求められる.

$$\begin{aligned}
 \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\
 &= \frac{6 - 2}{2} \\
 &= 2[\text{MPa}]
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$