

## 材料の力学1 Step 1 第5回演習問題 (2019/5/21 実施)

- [1] 下図のように、剛体壁 (AA', BB') に挟まれた薄板に  $y$  方向からの外圧 ( $p=0.7[\text{MPa}]$ ) が作用している。薄板と壁の摩擦はないものとし、また  $z$  方向は紙面に垂直な方向で、その寸法は  $x$ ,  $y$  方向の寸法に対して十分小さく、平面応力状態である。(3)および(4)では有効数字3桁で答えよ。ただし、縦弾性係数  $E=205[\text{GPa}]$  及びポアソン比  $\nu=0.3$  とする。また、解答にあたっては単位をつけよ。

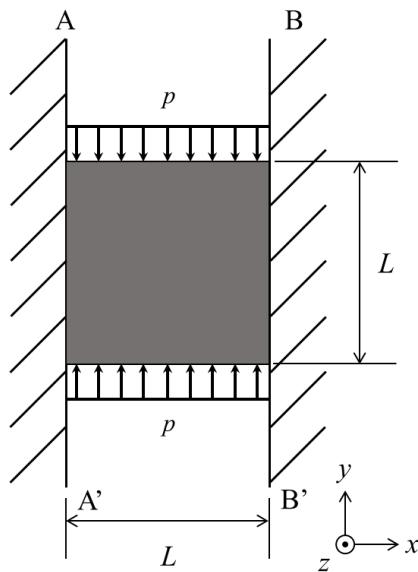


Fig. 1 剛体壁に挟まれた薄板。

- (1)  $y$  方向に生じる応力  $\sigma_y$  を求めよ。
- (2)  $x$  方向に生じる応力  $\sigma_x$  を求めよ。
- (3)  $y$  方向のひずみ  $\epsilon_y$  を求めよ。
- (4)  $z$  方向のひずみ  $\epsilon_z$  を求めよ。
- (5) 三次元モールの応力円を描き、最大せん断応力  $\tau_{\max}$  を求めよ。ただし、モールの応力円では主応力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) の値を示し、主応力の位置を明記すること。

(1)  $y$  方向に生じる応力  $\sigma_y$  を求めよ.

薄板の FBD を図 1.1 に示す. ただし, 剛体壁からの反力を  $R$  とする.

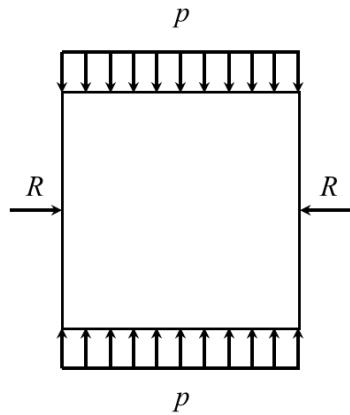


Fig. 1.1 薄板の FBD.

図 1.1 より,  $z$  方向の板厚は小さいので厚さを 1 として, 力のつり合い式を立てると式(1.1)のように表せる.

$$pL + \sigma_y L = 0 \quad (1.1)$$

よって  $y$  方向に生じる応力  $\sigma_y$  は式(1.2)のように表せる.

$$\sigma_y = -p = -0.7 \text{ [MPa]} \quad (1.2)$$

(2)  $x$  方向に生じる応力  $\sigma_x$  を求めよ.

$x$  方向の変位は剛体壁に拘束されているため,  $x$  方向のひずみ  $\varepsilon_x$  は 0 である. また, 薄板は十分薄く, 平面応力状態より  $\sigma_z = 0$  が成り立つので,  $x$  方向に生じる応力  $\sigma_x$  は応力-ひずみの関係式から式(1.3)のように表せる.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} \\
0 &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\
\sigma_x &= \nu \sigma_y
\end{aligned} \tag{1.3}$$

よって、 $x$  方向に生じる応力  $\sigma_x$  は式(1.4)のように求められる。

$$\sigma_x = 0.3 \times (-0.7) = -0.21 \text{ [MPa]} \tag{1.4}$$

**(3)  $y$  方向のひずみ  $\varepsilon_y$  を求めよ。**

平面応力状態による  $\sigma_z = 0$  を用いて応力-ひずみの関係式から  $y$  方向のひずみ  $\varepsilon_y$  は式(1.5)のように表せる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

よって  $y$  方向に生じるひずみ  $\varepsilon_y$  は式(1.2), (1.4)より  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  を代入して式(1.6)のように求められる。

$$\varepsilon_y = \frac{-0.7 - \{0.3 \times (-0.21)\}}{205 \times 10^3} = -3.11 \times 10^{-6} \tag{1.6}$$

**(4)  $z$  方向のひずみ  $\varepsilon_z$  を求めよ。**

応力-ひずみの関係式より、(3)と同様に考えて  $z$  方向のひずみ  $\varepsilon_z$  は式(1.7)のように表せる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \} \\
&= \frac{1}{E} \{ -\nu (\sigma_x + \sigma_y) \}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

よって  $z$  方向に生じるひずみ  $\varepsilon_z$  は各項を代入して式(1.8)のように求められる。

$$\varepsilon_z = \frac{-0.3 \times (-0.21 - 0.7)}{205 \times 10^3} = 1.33 \times 10^{-6} \quad (1.8)$$

(5) 三次元モールの応力円を描き、最大せん断応力  $\tau_{\max}$  を求めよ。ただし、モールの応力円では主応力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) の値を示し、主応力の位置を明記すること。

剛体壁と薄板との間には摩擦はないので、 $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸方向においてせん断応力は生じない。したがって、各方向の応力が主応力となるので、 $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  は 0, -0.21, -0.7 [MPa] となる。これにより三次元モールの応力円が図 1.2 のように描ける。

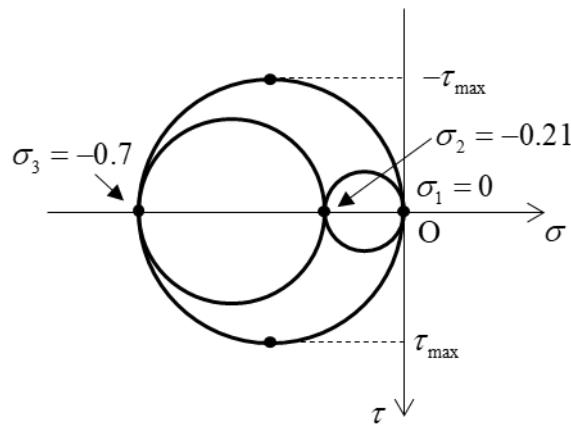


Fig. 1.2 薄板の三次元モールの応力円。

最大せん断応力  $\tau_{\max}$  は最大主応力と最小主応力の差の半分であるので、式(1.9)のようになる。

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| = \frac{1}{2} |-0.7 - 0| = 0.35 \quad [\text{MPa}] \quad (1.9)$$

- [2] 板厚が十分に薄い弾性体表面のある点での応力状態を求めるため、図 2 に示すようにひずみゲージを  $x$  軸方向から反時計回りに  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$  の方向に貼り付けた。各ひずみゲージから測定したひずみの値は  $\varepsilon_{45^\circ}=355\mu$ ,  $\varepsilon_{90^\circ}=155\mu$ ,  $\varepsilon_{135^\circ}=155\mu$  ( $\mu=1.0\times10^{-6}$ ) であった。この弾性体の縦弾性係数  $E$ , ポアソン比  $\nu$ をそれぞれ、 $E=182[\text{GPa}]$ ,  $\nu=0.3$  とし、以下の問い合わせに有効数字3桁で答えよ。また、解答にあたっては単位をつけよ。

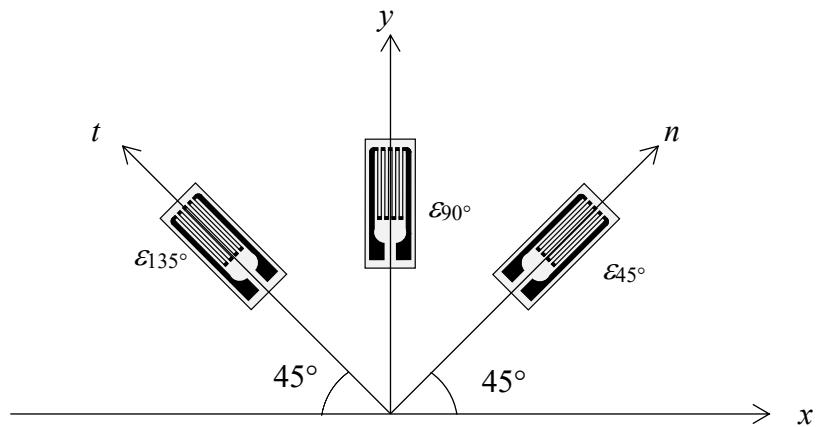


Fig. 2 ロゼッタ解析。

- (1)  $n$ - $t$  座標系について考える。各ひずみゲージの値とひずみの座標変換の式より、せん断ひずみ  $\gamma_{nt}$  を求め、 $n$ - $t$  座標系におけるひずみテンソル  $[\varepsilon]$  を示せ。
- (2) (1)で求めたひずみテンソルより、モールのひずみ円を描き、その中心と半径を示せ。
- (3) (2)で描いたモールのひずみ円より、 $x$ - $y$  座標系におけるひずみテンソル  $[\varepsilon]$  を示せ。
- (4) (2)で描いたモールのひずみ円より、主ひずみ  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  および  $x$ - $y$  座標系からみた主ひずみ方向  $(\theta_1, \theta_2)$  を求めよ。ただし、 $-90^\circ \leq \theta_1, \theta_2 \leq 90^\circ$  とする。
- (5) 応力-ひずみの関係より、 $x$ - $y$  座標系における応力テンソル  $[\sigma]$  を求めよ。
- (6) (5)の結果より、モールの応力円を描き、その中心と半径を示せ。
- (7) (6)で描いたモールの応力円より、主応力  $(\sigma_1, \sigma_2)$  および  $x$ - $y$  座標系からみた主応力方向  $(\theta_1, \theta_2)$  を求めよ。ただし、 $\sigma_1 > \sigma_2$  とし、 $-90^\circ \leq \theta_1, \theta_2 \leq 90^\circ$  とする。

- (1) *n-t* 座標系について考える. 各ひずみゲージの値とひずみの座標変換の式より, せん断ひずみ  $\gamma_{nt}$  を求め, *n-t* 座標系におけるひずみテンソル  $[\varepsilon]$  を示せ.  
ひずみの座標変換の式は一般に次式で表せる.

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2.1)$$

*n-t* 座標系について考えると式(2.1)は次のように表せる.

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_n \cos^2 \theta + \varepsilon_t \sin^2 \theta + \gamma_{nt} \sin \theta \cos \theta \quad (2.2)$$

*y* 軸は *n* 軸を反時計回りに  $45^\circ$ 回転させた軸であるので, 式(2.2)に  $\theta=45^\circ$ を代入した時であり, 次式のようになる.

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \varepsilon_n \cos^2(45^\circ) + \varepsilon_t \sin^2(45^\circ) + \gamma_{nt} \sin(45^\circ) \cos(45^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_n + \frac{1}{2} \varepsilon_t + \frac{1}{2} \gamma_{nt} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで式 (2.3) を  $\gamma_{nt}$  について整理し, 各ひずみゲージの値  $\varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ} = 155\mu$ ,  $\varepsilon_n = \varepsilon_{45^\circ} = 355\mu$ ,  $\varepsilon_t = \varepsilon_{135^\circ} = 155\mu$ を代入すると以下のようになる.

$$\begin{aligned} \gamma_{nt} &= 2\varepsilon_y - (\varepsilon_n + \varepsilon_t) \\ &= 2\varepsilon_{90^\circ} - (\varepsilon_{45^\circ} + \varepsilon_{135^\circ}) \\ &= 2 \times 155\mu - (355 + 155)\mu \\ &= -200\mu \end{aligned} \quad (2.4)$$

これより, *n-t* 座標系におけるひずみテンソル  $[\varepsilon]$  は以下のようになる.

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_n & \gamma_{nt}/2 \\ \gamma_{nt}/2 & \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 355\mu & -100\mu \\ -100\mu & 155\mu \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

- (2) (1)で求めたひずみテンソルより、モールのひずみ円を描き、その中心と半径を示せ。  
 $(\varepsilon_n, \gamma_{nt}/2) = (355\mu, -100\mu)$ ,  $(\varepsilon_t, -\gamma_{nt}/2) = (155\mu, 100\mu)$ の2点をプロットすると、図2.1のようなモールのひずみ円が描ける。

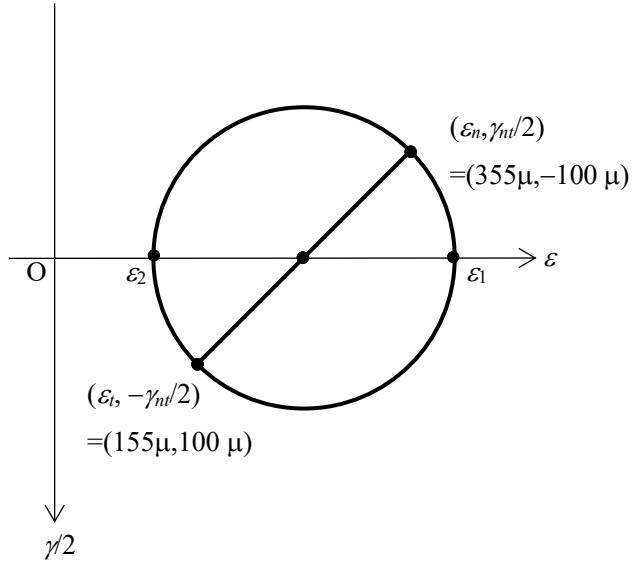


Fig. 2.1 モールのひずみ円。

次に、ひずみテンソル $[\varepsilon]$ からモールのひずみ円の中心 $(\varepsilon_c, 0)$ と半径 $r$ を以下のように求める。  
円の中心の $\varepsilon$ 座標は以下のようになる。

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}(\varepsilon_n + \varepsilon_t) = \frac{1}{2}(355 + 155)\mu = 255\mu \quad (2.6)$$

よって、中心は $(\varepsilon_c, 0) = (255\mu, 0)$ となる。また、半径 $r$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_n - \varepsilon_t)^2 + 4 \left( \frac{\gamma_{nt}}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(355 - 155)^2 + 4(-100)^2} \mu \\ &= 100\sqrt{2} \mu = 141\mu \end{aligned} \quad (2.7)$$

(3) (2)で描いたモールのひずみ円より,  $x$ - $y$  座標系におけるひずみテンソル  $[\varepsilon]$  を示せ.

まず, 図 2.2 のように  $\angle \alpha$ をおき,  $\angle \alpha$ を求める.

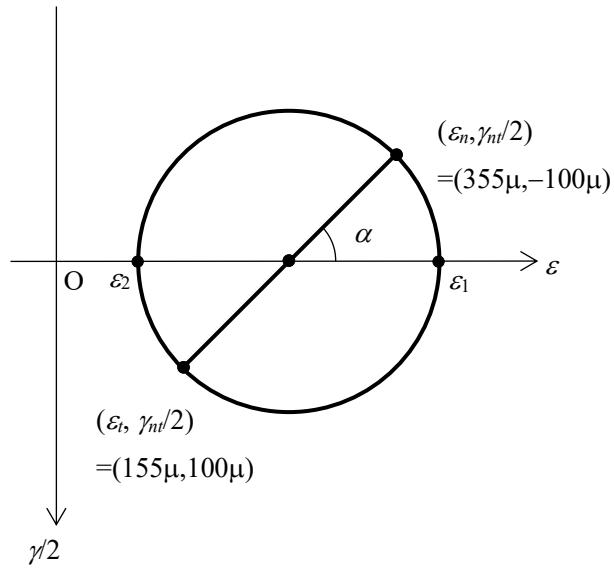


Fig. 2.2 モールのひずみ円.

図 2.2 より,  $\tan \alpha$ を考えることで  $\alpha$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \left| \frac{2(\gamma_{nt}/2)}{\varepsilon_n - \varepsilon_t} \right| = \left| \frac{200}{355 - 155} \right| = 1 \\ \therefore \alpha &= 45[\text{deg}] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$x$ - $y$  座標系は  $n$ - $t$  座標系を時計回りに  $\theta=45^\circ$ 回転させた座標系であるから, 図 2.3 に示すようにモールのひずみ円では時計回りに  $2\theta=90^\circ$ 回転していると分かり, モールのひずみ円上の 2 点  $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$ ,  $(\varepsilon_y, -\gamma_{xy}/2)$ が決まる.

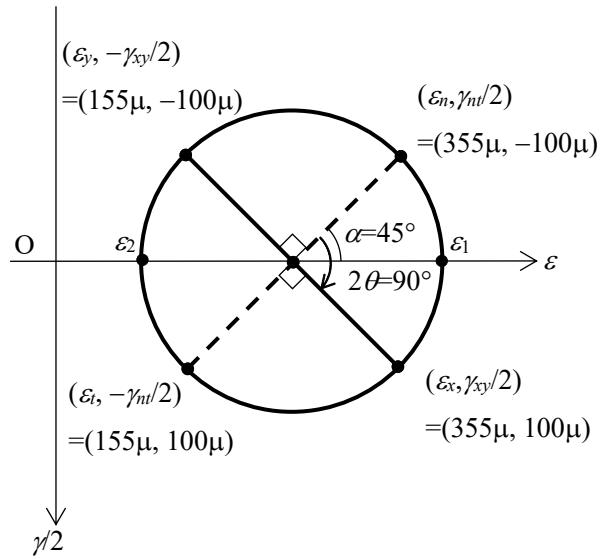


Fig. 2.3 モールのひずみ円.

図 2.3 のように対称性から  $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2) = (355\mu, 100\mu)$ ,  $(\varepsilon_y, -\gamma_{xy}/2) = (155\mu, -100\mu)$  となる. よってひずみテンソル  $[\varepsilon]$  は以下のようになる.

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 355\mu & 100\mu \\ 100\mu & 155\mu \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

(4) (2)で描いたモールのひずみ円より, 主ひずみ  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  および  $x$ - $y$  座標系からみた主ひずみ方向  $(\theta_1, \theta_2)$  を求めよ. ただし,  $-90^\circ \leq \theta_1, \theta_2 \leq 90^\circ$  とする.

主ひずみは(2)で求めたモールのひずみ円の中心  $\varepsilon_c$  と半径  $r$  より以下のようにになる.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_c + r = 255\mu + 141\mu = 396\mu \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_c - r = 255\mu - 141\mu = 114\mu \end{cases} \quad (2.10)$$

また, 図 2.4 に示すように  $x$  軸からの主ひずみ方向は以下のようにになる.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 45/2 \\ 45/2 - 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.5 \\ -67.5 \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 22.5 \\ -67.5 \end{pmatrix} [\text{deg}] \end{aligned} \quad (2.11)$$

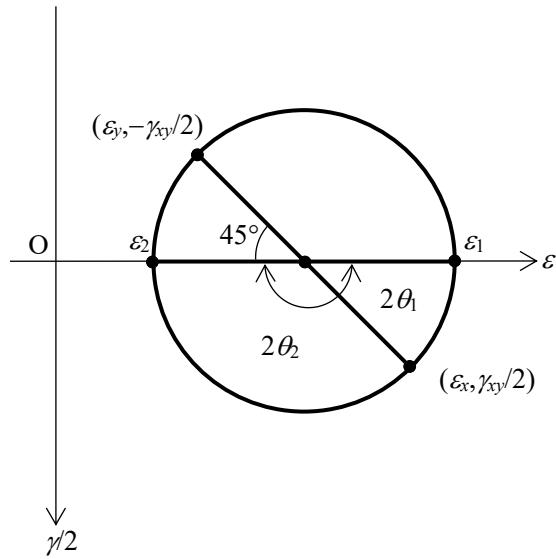


Fig. 2.4 モールのひずみ円.

(5) 応力－ひずみの関係より,  $x$ - $y$  座標系における応力テンソル  $[\sigma]$  を求めよ.

弾性体の板厚が十分に薄いため, 平面応力状態 ( $\sigma_z=0$ ) とみなすことができる. この時の応力－ひずみの関係式は次式で表せる.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (2.13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (2.14)$$

上式を  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  について解くと, 以下のようになる.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (2.15)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.17)$$

式(2.15), (2.16), (2.17)に値を代入すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{182 \times 10^9}{1 - 0.3^2} \times (355 + 0.3 \times 155) \times 10^{-6} \\ &= 80.3 \times 10^6 [\text{Pa}] = 80.3 [\text{MPa}]\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{182 \times 10^9}{1 - 0.3^2} \times (155 + 0.3 \times 355) \times 10^{-6} \\ &= 52.3 \times 10^6 [\text{Pa}] = 52.3 [\text{MPa}]\end{aligned}\quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{182 \times 10^9}{2 \times (1 + 0.3)} \times 200 \times 10^{-6} \\ &= 14.0 \times 10^6 [\text{Pa}] = 14.0 [\text{MPa}]\end{aligned}\quad (2.20)$$

したがって、応力テンソル $[\sigma]$ は以下のようになる.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80.3 & 14.0 \\ 14.0 & 52.3 \end{pmatrix} [\text{MPa}] \quad (2.21)$$

(6) (5)の結果より、モールの応力円を描き、その中心と半径を示せ.

(5)の結果を用いると、モールの応力円は図 2.5 のようになる.

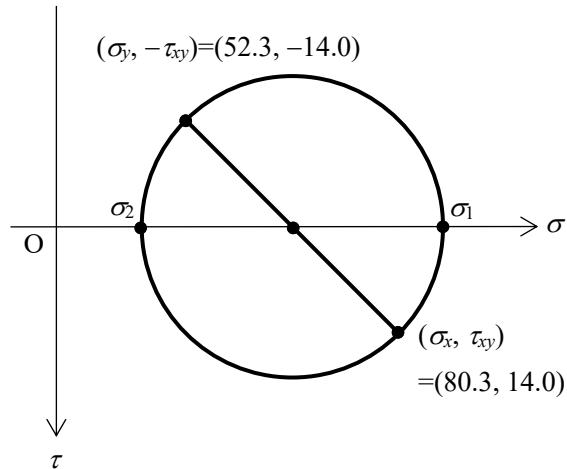


Fig. 2.5 モールの応力円.

次に、応力テンソル $[\sigma]$ からモールの応力円の中心 $(\sigma_c, 0)$ と半径 $r$ を以下のように求める。円の中心の $\sigma$ 座標は以下のようになる。

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(80.3 + 52.3) = 66.3 \quad (2.22)$$

よって、中心は $(\sigma_c, 0) = (66.3, 0)$ となる。また、半径 $r$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(80.3 - 52.3)^2 + 4 \times 14.0^2} \\ &= 14\sqrt{2} \approx 19.8 \end{aligned} \quad (2.23)$$

(7) (6)で描いたモールの応力円より、主応力 $(\sigma_1, \sigma_2)$ および $x-y$ 座標系からみた主応力方向 $(\theta_1, \theta_2)$ を求めよ。ただし、 $\sigma_1 > \sigma_2$ とし、 $-90^\circ \leq \theta_1, \theta_2 \leq 90^\circ$ とする。

主応力は(6)で求めたモールの応力円の中心 $\sigma_c$ と半径 $r$ より以下のようになる。

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_c + r = 66.3 + 19.8 = 86.1 \text{ [MPa]} \\ \sigma_2 = \sigma_c - r = 66.3 - 19.8 = 46.5 \text{ [MPa]} \end{cases} \quad (2.24)$$

図2.6のように $\angle\beta$ を定め、 $\angle\beta$ を求める。

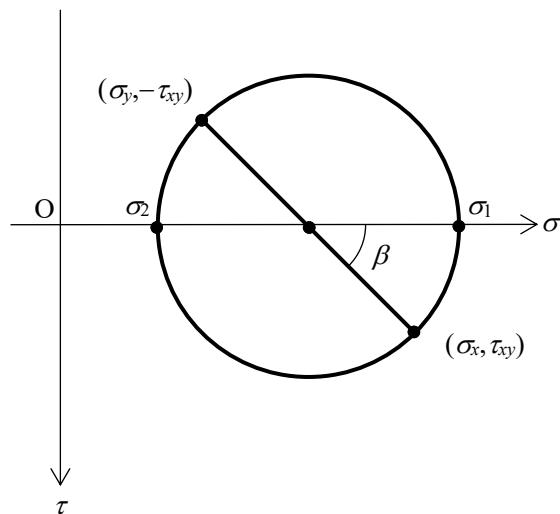


Fig. 2.6 モールの応力円。

図 2.6 より,  $\tan\beta$ を考えることで  $\beta$  は以下のようになる.

$$\begin{aligned}\tan(\beta) &= \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| = \left| \frac{2 \times 14}{80.3 - 52.3} \right| = 1 \\ \therefore \beta &= 45[\text{deg}]\end{aligned}\quad (2.25)$$

よって, 図 2.7 に示すように  $x$  軸からの主応力方向は以下のようになる.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \beta/2 \\ \beta/2 + 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.5 \\ -67.5 \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 22.5 \\ -67.5 \end{pmatrix} [\text{deg}]\end{aligned}\quad (2.26)$$

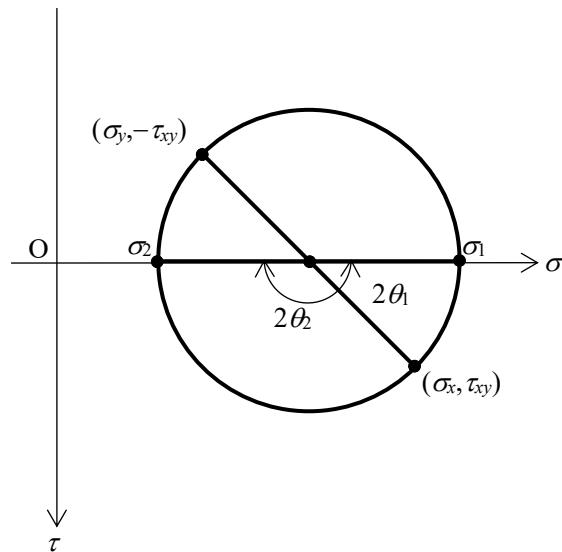


Fig. 2.7 モールの応力円.