

## 材料の力学 1 Step 1 第 4 回演習問題 (2019/5/14 実施)

- [1] 図 1 は板厚が十分に薄い弾性体のある点における応力状態を示したものである. なお, 図 1(c)は図 1(a), (b)の応力状態を重ね合わせた時の様子を示している. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし,  $z$  方向は板厚方向とし, 十分に薄いため平面応力状態と考えることができる.

解答には単位を明記すること.

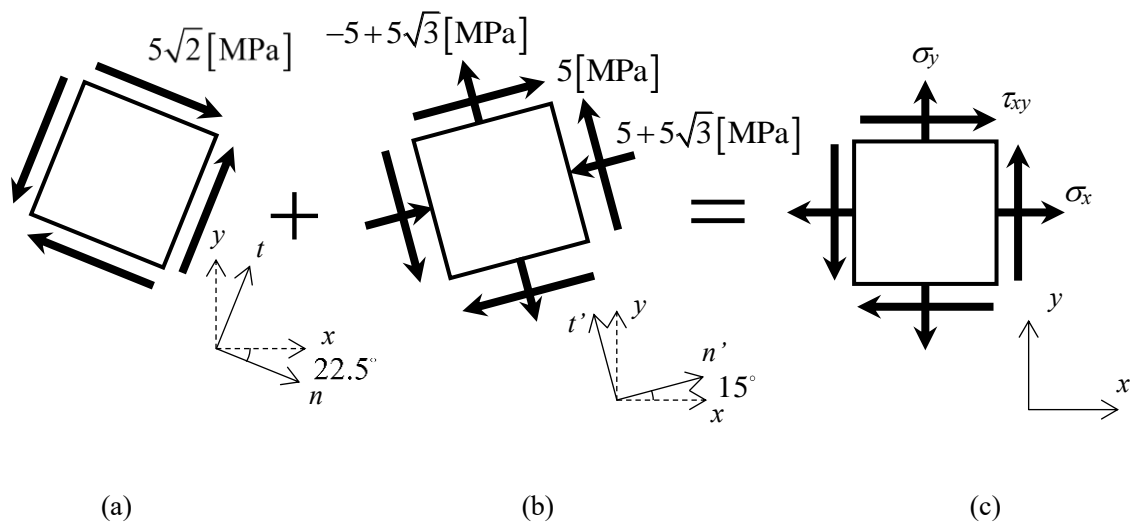


Fig. 1 微小要素における応力状態.

図 1(a)について以下の問いに答えよ.

- (1)  $n$ - $t$  座標系において, モールの応力円を描き, その中心と半径を求めよ.
- (2)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めよ.

図 1(b)について以下の問いに答えよ.

- (3)  $n'$ - $t'$  座標系において, モールの応力円を描き, その中心と半径を求めよ.
- (4)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めよ.

図 1(c)について以下の問いに答えよ.

- (5)  $x$ - $y$  座標系において, モールの応力円を描き, その中心と半径を求めよ.
- (6) 板に作用する主応力( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ )を求め, 最大せん断応力  $\tau_{\max}$  を求めよ. ただし, 主応力は  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  とする.

(1)  $n$ - $t$  座標系において，モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

図 1(a)の状態のとき， $n$ - $t$  座標系における応力テンソルは以下の通りになる．

$$\begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad (1.1)$$

式(1.1)より，モールの応力円は以下の通りとなる．

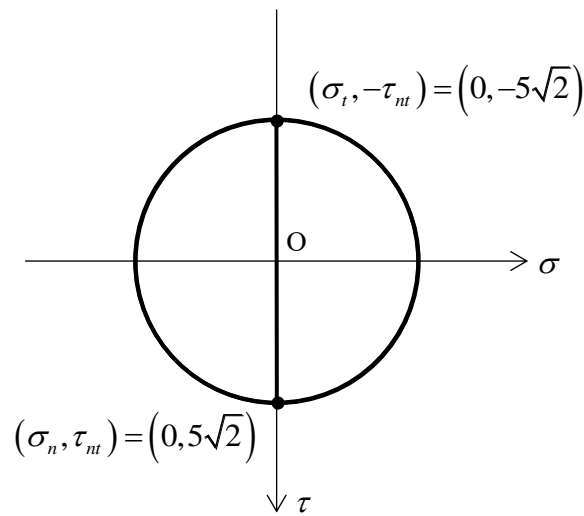


Fig. 1.1 図 1(a)におけるモールの応力円．

応力テンソルより，モールの応力円の中心( $\sigma_c$ ,  $\tau_c$ )と半径  $r$  は以下のように求まる．

$$\text{中心:} \quad \sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0 \quad (1.2)$$

$$\therefore (\sigma_c, \tau_c) = (0, 0) \quad (1.3)$$

$$\text{半径:} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_n - \sigma_t)^2 + 4\tau_{nt}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(0)^2 + 4(5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2} \quad (1.4)$$

$$\therefore r = 5\sqrt{2} \quad (1.5)$$

(2)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めよ.

$x$ - $y$  座標は  $n$ - $t$  座標を反時計回りに  $\theta=22.5^\circ$  回転させればよいので、モールの応力円上では図 1.2 のように反時計回りに  $2\theta=45^\circ$  回転させる.

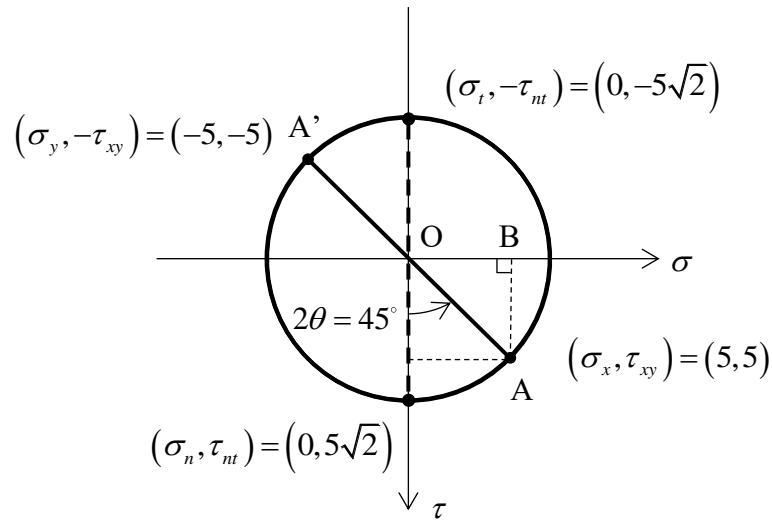


Fig. 1.2 図 1(a)におけるモールの応力円.

このとき、 $\triangle OAB$  に着目すると、点 A の座標は(1)において求めたモールの応力円の中心  $\sigma_c$  と半径  $r$  より次のように求められる.

$$(\sigma_x, \tau_{xy}) = (r \cos 45^\circ, r \sin 45^\circ) = (5, 5) \quad (1.6)$$

同様に考えると、点 A' の座標は次のように求められる.

$$(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (-5, -5) \quad (1.7)$$

よって、 $x$ - $y$  座標での応力テンソルは次式のようになる.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad (1.8)$$

(3)  $n'$ - $t'$ 座標系において，モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

図 1(b)の状態のとき， $n'$ - $t'$ 座標系における応力テンソルは以下の通りになる．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{n'} & \tau_{n't'} \\ \tau_{n't'} & \sigma_{t'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(5+5\sqrt{3}) & 5 \\ 5 & -5+5\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5-5\sqrt{3} & 5 \\ 5 & -5+5\sqrt{3} \end{bmatrix} [\text{MPa}] \end{aligned} \quad (1.9)$$

式(1.9)より，モールの応力円は図 1.3 の通りとなる．

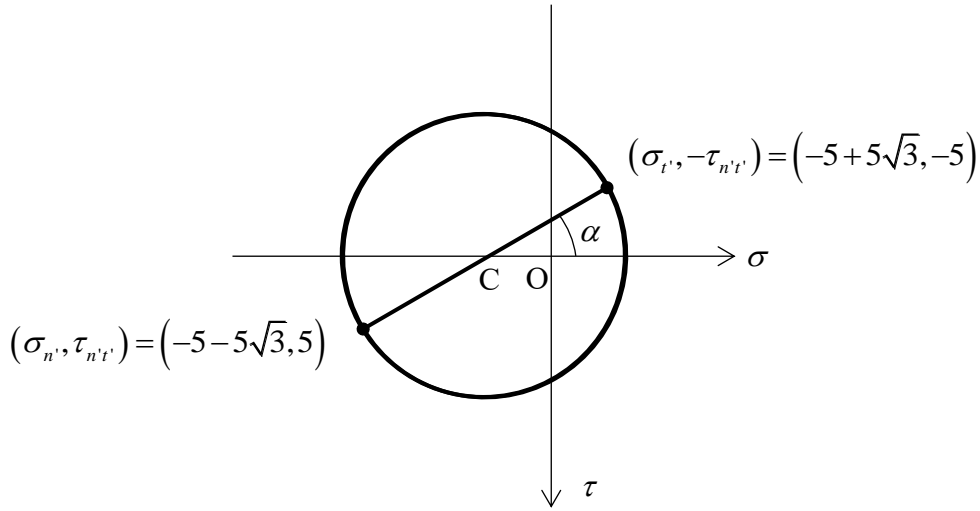


Fig. 1.3 図 1(b)におけるモールの応力円．

応力テンソルより，モールの応力円の中心( $\sigma_c$ ,  $\tau_c$ )と半径  $r$  は以下のように求まる．

$$\text{中心: } \sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_{n'} + \sigma_{t'}) = \frac{1}{2}\{(-5-5\sqrt{3}) + (-5+5\sqrt{3})\} = -5 \quad (1.10)$$

$$\therefore (\sigma_c, \tau_c) = (-5, 0) \quad (1.11)$$

$$\text{半径: } r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{n'} - \sigma_{t'})^2 + 4\tau_{n't'}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-10\sqrt{3})^2 + 4(5)^2} = 10 \quad (1.12)$$

$$\therefore r = 10 \quad (1.13)$$

なお，図 1.3 のように角度 $\alpha$ とおくと， $\alpha$ は次式のようになる．

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \left| \frac{2\tau_{n't'}}{\sigma_{n'} - \sigma_{t'}} \right| \\ &= \left| \frac{10}{(-5-5\sqrt{3}) - (-5+5\sqrt{3})} \right| \\ &= \left| \frac{10}{-10\sqrt{3}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}\tag{1.14}$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ\tag{1.15}$$

(4)  $x$ - $y$  座標系における応力テンソルを求めよ．

$x$ - $y$  座標は  $n'$ - $t'$ 座標を時計回りに $\theta=15^\circ$ 回転した座標であるので，モールの応力円上では時計回りに $2\theta=30^\circ$ 回転させる．式(1.15)より $\alpha=30^\circ$ であるので，モールの応力円上では図 1.4 のように回転される．

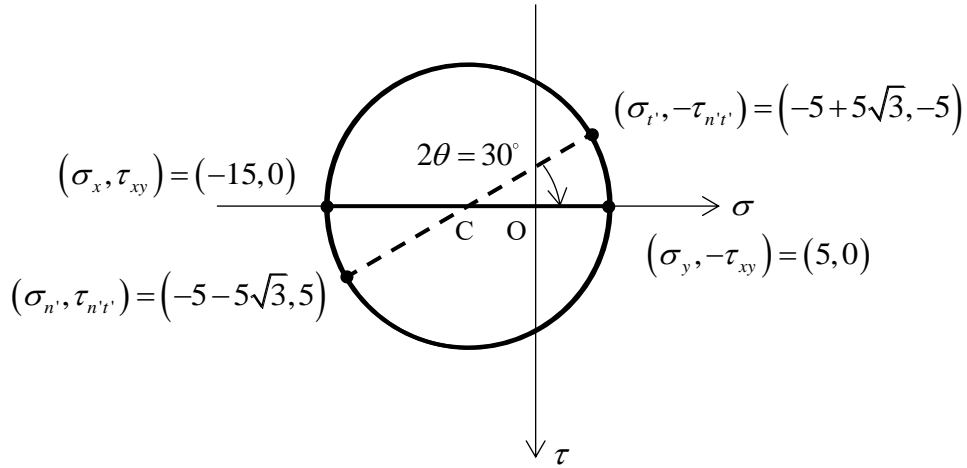


Fig. 1.4 図 1(b)におけるモールの応力円．

図 1.4 より， $x$ - $y$  座標での応力テンソルは次式のようになる．

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} [\text{MPa}]\tag{1.16}$$

(5)  $x$ - $y$  座標系において，モールの応力円を描き，その中心と半径を求めよ．

(c)の応力テンソルは，(a)と(b)の  $x$ - $y$  座標での応力テンソルを重ね合わせればよい．よって，式(1.8)と式(1.16)より，次式のようになる．

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad (1.17)$$

式(1.17)より，モールの応力円は以下の通りとなる．

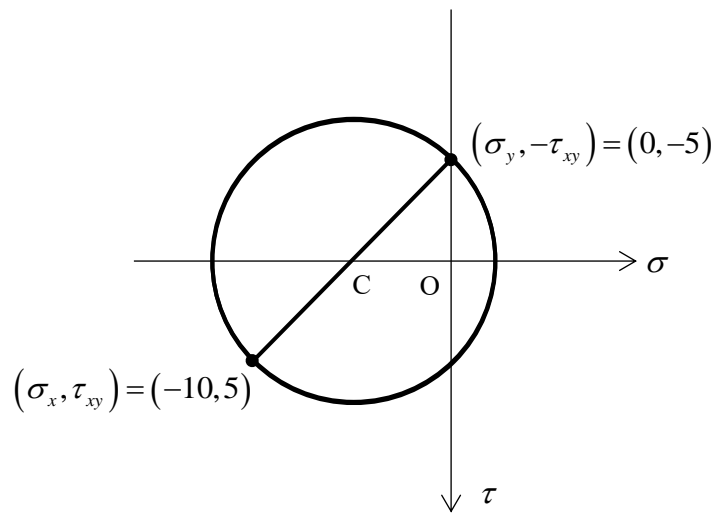


Fig. 1.5 (c)におけるモールの応力円．

応力テンソルより，モールの応力円の中心( $\sigma_c$ ,  $\tau_c$ )と半径  $r$  は以下のように求まる．

$$\text{中心:} \quad \sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(-10 + 0) = -5 \quad (1.18)$$

$$\therefore (\sigma_c, \tau_c) = (-5, 0) \quad (1.19)$$

$$\text{半径:} \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(-10)^2 + 4(5)^2} = 5\sqrt{2} \quad (1.20)$$

$$\therefore r = 5\sqrt{2} \quad (1.21)$$

(6) 板に作用する主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を求め、最大せん断応力 $\tau_{\max}$ を求めよ。ただし、主応力は $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ とする。

主応力はモールの応力円の $\sigma$ 軸との交点であるから、(5)で求めたモールの応力円の中心 $\sigma_c$ と半径 $r$ を用いて計算すると、次式の通りとなる。

$$(\sigma_c + r, \sigma_c - r) = (-5 + 5\sqrt{2}, -5 - 5\sqrt{2}) \quad (1.22)$$

平面応力状態であるから、板厚方向の主応力は 0 となる。 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ であることを踏まえると、式(1.22)より主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ は次式のように求まる。

$$\therefore (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-5 + 5\sqrt{2}, 0, -5 - 5\sqrt{2}) [\text{MPa}] \quad (1.23)$$

各方向の主応力を考慮することにより、図 1(c)における 3 次元のモールの応力円は図 1.6 のように描くことができる。

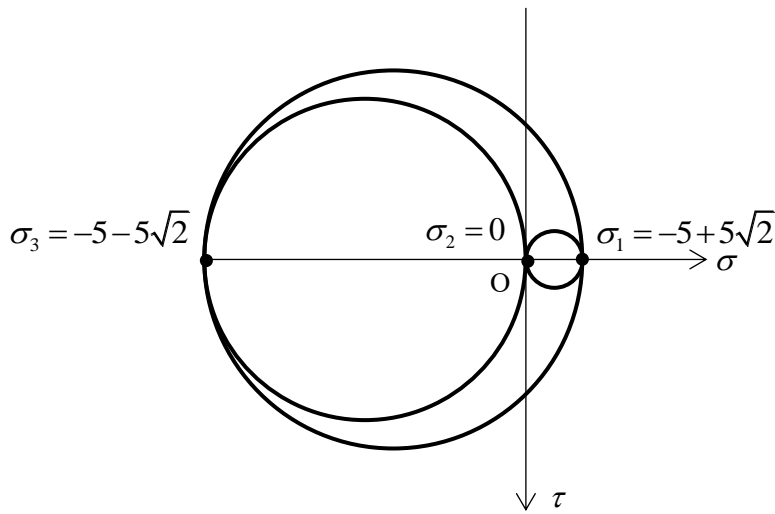


Fig. 1.6 図 1(c)におけるモールの応力円 (3 次元)。

このモールの応力円から、最大せん断応力 $\tau_{\max}$ は以下のように求めることができる。

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} [\text{MPa}] \quad (1.24)$$

- [2] 図2のように点Aと点Eにおいて固定された段付き丸棒があり、AB間、DE間に分布荷重 $p$ がそれぞれ対称に作用している。棒の断面積をAB間、DE間では $2A$ 、BD間では $A$ とし、ヤング率は $E$ として以下の問いに答えよ。ただし、壁の変形は考えないものとする。

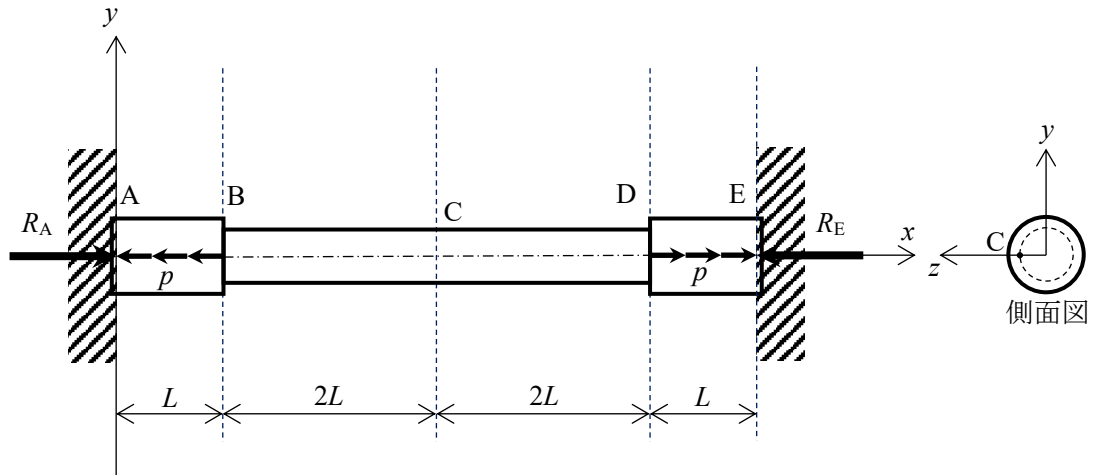


Fig. 2 壁に固定された段付き丸棒.

- (1) FBDを描き、点A、点Eにおける壁からの反力 $R_A$ 、 $R_E$ を用いて力のつり合い式を示せ。
- (2) AB間に生じる変位 $\delta_{AB}$ 、BC間に生じる変位 $\delta_{BC}$ をそれぞれ $R_A$ を用いて示せ。
- (3) 対称性によりAC間に生じる変位 $\delta_{AC}=0$ であることを用いて、変位の条件と力のつり合い式から反力 $R_A$ 、 $R_E$ を求めよ。
- (4) 丸棒に作用している軸力 $N(x)$ 、垂直応力 $\sigma(x)$ の $x$ 方向変化をそれぞれ図示せよ。
- (5) 丸棒表面上の点Cにおけるモールの応力円を描き、点Cに生じる最大せん断応力 $\tau_{\max}$ を求めよ。

- (1) FBD を描き，点 A，点 E における壁からの反力  $R_A$ ， $R_E$  を用いて力のつり合い式を示せ．

点 A，点 E における壁からの反力  $R_A$ ， $R_E$  を用いて FBD を描くと次のようになる．

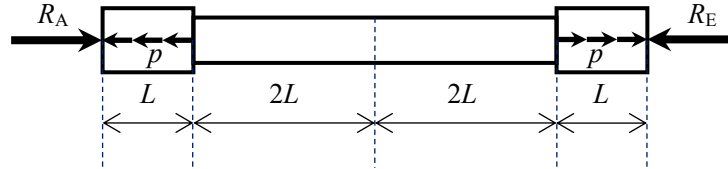


Fig. 2.1 FBD.

図 2.1 における力のつり合い式は次のようになる．

$$R_A - pL + pL - R_E = 0 \quad (2.1)$$

- (2) AB 間に生じる変位  $\delta_{AB}$ ，BC 間に生じる変位  $\delta_{BC}$  をそれぞれ  $R_A$  を用いて示せ．

- (i)  $0 \leq x \leq L$  のとき

軸力を  $N(x)$  とすると，作用する力は図 2.2 のように表せる．

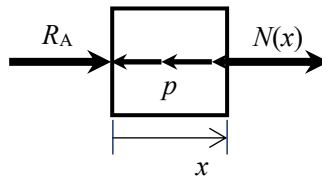


Fig. 2.2 FBD ( $0 \leq x \leq L$ ).

ここから力のつり合い式を立てると，軸力  $N(x)$  は以下のようなになる．

$$R_A - px + N(x) = 0 \quad (2.2)$$

$$\therefore N(x) = -R_A + px$$

従って応力  $\sigma(x)$ ，ひずみ  $\epsilon(x)$ ，変位  $\delta_{AB}$  は次のようになる．

$$\sigma(x) = \frac{-R_A + px}{2A} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{-R_A + px}{2EA} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \delta_{AB} &= \int_0^L \varepsilon(x) dx \\ &= \int_0^L \frac{-R_A + px}{2EA} dx \\ &= \frac{1}{2EA} \left( -R_A L + \frac{1}{2} p L^2 \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

(ii)  $L \leq x \leq 3L$  のとき

軸力を  $N(x)$  とすると，作用する力は図 2.3 のように表せる．

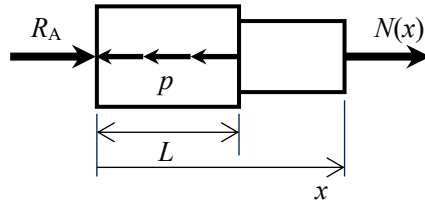


Fig. 2.3 FBD ( $L \leq x \leq 3L$ ).

ここから力のつり合い式を立てると，軸力  $N(x)$  は以下のようになる．

$$R_A - pL + N(x) = 0 \quad (2.6)$$

$$\therefore N(x) = -R_A + pL$$

従って応力  $\sigma(x)$ ，ひずみ  $\varepsilon(x)$ ，変位  $\delta_{BC}$  は次のようになる．

$$\sigma(x) = \frac{-R_A + pL}{A} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{-R_A + pL}{EA} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{BC} &= \int_L^{3L} \varepsilon(x) dx \\
&= \int_L^{3L} \frac{-R_A + pL}{EA} dx \\
&= \frac{2}{EA} (-R_A L + pL^2)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

(3) 対称性により AC 間に生じる変位  $\delta_{AC}=0$  であることを用いて、変位の条件と力のつり合い式から反力  $R_A$ ,  $R_E$  を求めよ.

式(2.5)と式(2.9)より,

$$\begin{aligned}
\delta_{AC} &= \delta_{AB} + \delta_{BC} \\
&= \frac{1}{2EA} \left( -R_A L + \frac{1}{2} pL^2 \right) + \frac{2}{EA} (-R_A L + pL^2) \\
&= \frac{1}{2EA} \left( -5R_A L + \frac{9}{2} pL^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

変位  $\delta_{AC}=0$  であることから、式(2.10)は次のようになる.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2EA} \left( -5R_A L + \frac{9}{2} pL^2 \right) \\
\therefore R_A &= \frac{9}{10} pL
\end{aligned} \tag{2.11}$$

式(2.1)より,

$$R_E = R_A \tag{2.12}$$

と分かるので、反力  $R_E$  は次のようになる.

$$R_E = \frac{9}{10} pL \tag{2.13}$$

(4) 丸棒に作用している軸力  $N(x)$ , 垂直応力  $\sigma(x)$  の  $x$  方向変化をそれぞれ図示せよ.

式(2.2), 式(2.3), 式(2.6), 式(2.7)に式(2.11), 式(2.13)を代入すると,

(i)  $0 \leq x \leq L$  のとき

$$N(x) = -R_A + px = p \left( x - \frac{9}{10}L \right) \quad (2.14)$$

$$\sigma(x) = \frac{-R_A + px}{2A} = \frac{p}{2A} \left( x - \frac{9}{10}L \right) \quad (2.15)$$

(ii)  $L \leq x \leq 3L$  のとき

$$N(x) = -R_A + pL = \frac{pL}{10} \quad (2.16)$$

$$\sigma(x) = \frac{-R_A + pL}{A} = \frac{pL}{10A} \quad (2.17)$$

以上より，対称性を利用して  $0 \leq x \leq 6L$  の範囲で軸力  $N(x)$ ，垂直応力  $\sigma(x)$  を図示するとそれぞれ次のようになる．

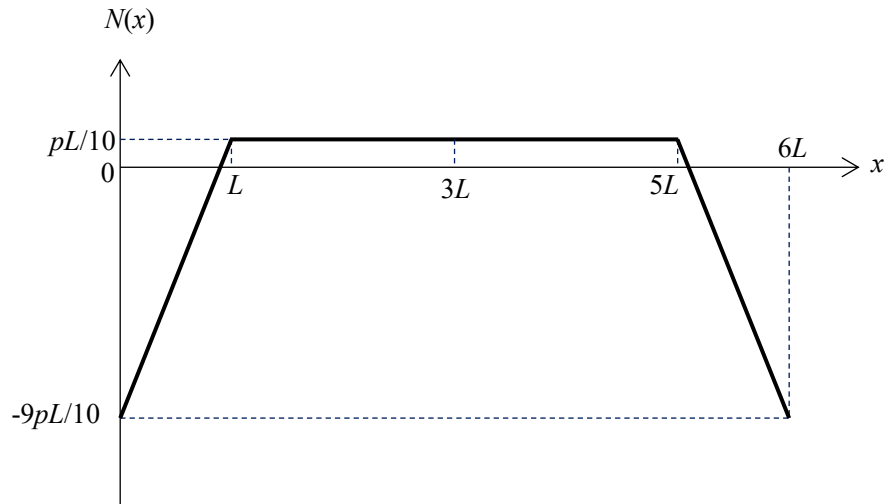
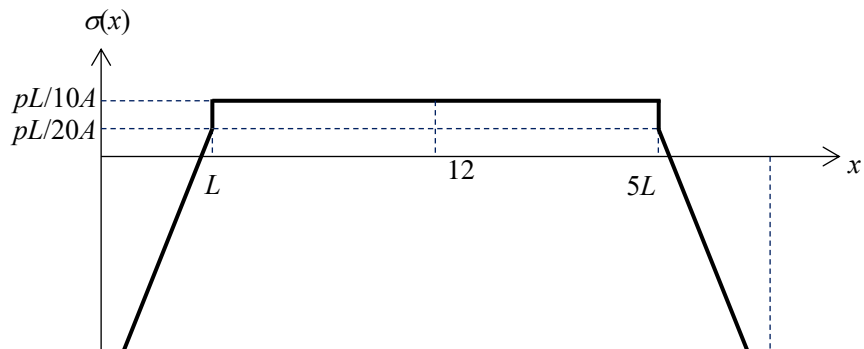


Fig. 2.4 軸力  $N(x)$  の  $x$  方向変化.



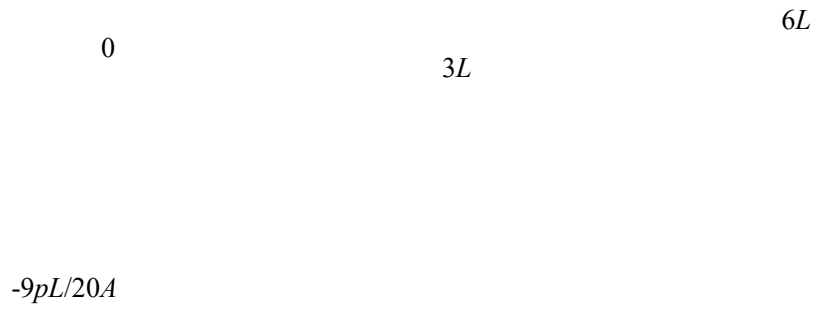


Fig. 2.5 垂直応力 $\sigma(x)$ の $x$ 方向変化.

- (5) 丸棒表面上の点 C におけるモールの応力円を描き，点 C に生じる最大せん断応力 $\tau_{\max}$ を求めよ．

点 C は $x=3L$ にあるため，図 2.5 より，

$$\sigma_x = \frac{pL}{10A} \quad (2.18)$$

であることが分かる．従って点 C における応力テンソルは次のようになる．

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{pL}{10A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

このことから，点 C におけるモールの応力円は次のようになる．

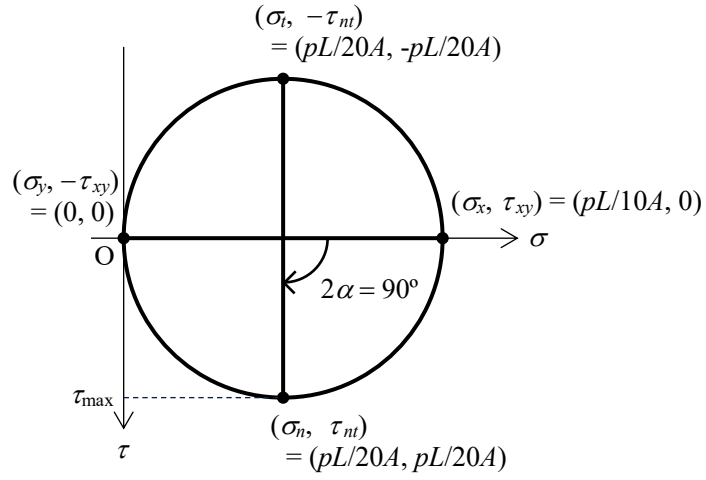


Fig. 2.6 点 C におけるモールの応力円.

ただしここでモールの応力円の中心 $(\sigma_c, 0)$ ，半径  $r$  はそれぞれ次のように求められる．

$$\sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{pL}{20A} \quad (2.20)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{pL}{20A} \quad (2.21)$$

図 2.6 より，最大せん断応力は  $x$  軸から  $\alpha=45^\circ$  傾斜した面に生じることが分かり，その値は次のようになる．

$$\tau_{\max} = \frac{pL}{20A} \quad (2.22)$$