材料の力学 1　Step 1　第 3 回演習問題（2019/5/7 実施）

[1]　微小弾性体が図 1 に示す応力状態にある．このとき以下の問いに答えよ．ただし，$-90°\leq\theta\leq 90°$，$\overline{\mathrm{AB}}=S$ とし z 軸方向厚さは単位長さとする．

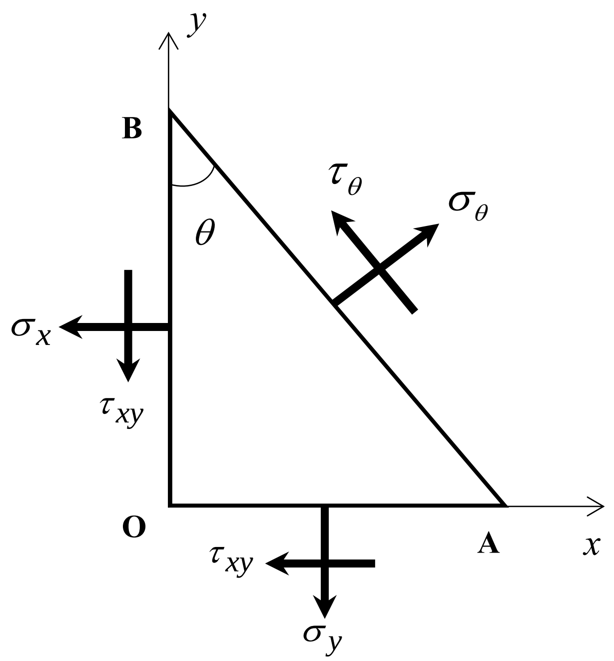

Fig.1 微小弾性体.

(1)　図 1 において, 力のつり合い式を立てることにより σ_θ, τ_θ のそれぞれを σ_x, σ_y, τ_{xy}, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を用いて表せ.

(2)　(1)で求めた σ_θ, τ_θ を表す 2 式より θ を消去して，モールの応力円を表す以下の式を導出せよ．

$$\left(\sigma_\theta-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\theta{}^2=\frac{1}{4}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\tau_{xy}{}^2$$

これ以降は $\sigma_x=3\sigma$，$\sigma_y=\sigma$，$\tau_{xy}=\sqrt{3}\sigma$ とする．

(3)　(1)より，σ_θ, τ_θ を $-90°\leq\theta\leq 90°$ の範囲で図示せよ．

(4)　(3)より，$\tau_\theta=0$ の場合の θ を求め，そのときの σ_θ を算出せよ．ただし，$-90°\leq\theta\leq 90°$ とする．

(5)　応力テンソル $[\sigma]$ を求め，図 1 におけるモールの応力円を σ–τ 平面上に描け．

(6)　(3)で描いたモールの応力円を用いて，主応力(σ_1, σ_2)を求めよ．

(1)　図 1 において, 力のつり合い式を立てることにより σ_θ, τ_θのそれぞれをσ_x, σ_y, τ_{xy}, sin2θ, cos2θを用いて表せ.

三角形の各面にはたらく力のつりあいを x 方向，y 方向に分けて求める．$\overline{\mathrm{AB}} = S$ としたとき，$\overline{\mathrm{OA}} = S\sin\theta$，$\overline{\mathrm{OB}} = S\cos\theta$ であることに注意すると

(x 方向)
$$S\sigma_\theta\cos\theta - S\tau_\theta\sin\theta - \sigma_x S\cos\theta - \tau_{xy} S\sin\theta = 0 \tag{1.1}$$

(y 方向)
$$S\sigma_\theta\sin\theta + S\tau_\theta\cos\theta - \sigma_y S\sin\theta - \tau_{xy} S\cos\theta = 0 \tag{1.2}$$

両辺を S で除すると

$$\sigma_\theta\cos\theta - \tau_\theta\sin\theta - \sigma_x\cos\theta - \tau_{xy}\sin\theta = 0 \tag{1.3}$$

$$\sigma_\theta\sin\theta + \tau_\theta\cos\theta - \sigma_y\sin\theta - \tau_{xy}\cos\theta = 0 \tag{1.4}$$

式(1.3)×cosθおよび式(1.4)×sinθの辺々を加えて移項すると

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\ &= \sigma_x\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sigma_y\frac{1-\cos 2\theta}{2} + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \end{aligned} \tag{1.5}$$

一方，式(1.3)×sinθから式(1.4)×cosθの差をとって移項すると

$$\begin{aligned}\tau_\theta &= -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{aligned} \tag{1.6}$$

となる．

(2)　(1)で求めたσ_θ，τ_θを表す 2 式よりθを消去して，モールの応力円を表す以下の式を導出せよ．

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta{}^2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}{}^2$$

式(1.5)を移項すると

$$\sigma_\theta - \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \tag{1.7}$$

式(1.6)および式(1.7)をそれぞれ 2 乗して辺々を加えると，モールの応力円の式が得られる．

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\theta{}^2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \tau_{xy}{}^2 \tag{1.8}$$

(3)　(1)より，σ_θ, τ_θを$-90° \le \theta \le 90°$の範囲で図示せよ．

$\sigma_x = 3\sigma$，$\sigma_y = \sigma$，$\tau_{xy} = \sqrt{3}\sigma$ を式（1.5）と式（1.6）に代入し，三角関数の合成を行うと

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= 2\sigma + \sigma\cos 2\theta + \sqrt{3}\sigma\sin 2\theta \\ &= 2\sigma + \sqrt{3}\sigma\left(\sin 2\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos 2\theta\right) \\ &= 2\sigma\left(1 + \sin\left(2\theta + 30°\right)\right)\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\tau_\theta &= -\sigma\sin 2\theta + \sqrt{3}\sigma\cos 2\theta \\ &= -\sigma\left(\sin 2\theta - \sqrt{3}\cos 2\theta\right) \\ &= -2\sigma\sin\left(2\theta - 60°\right)\end{aligned} \tag{1.10}$$

となる．したがって，σ_θ, τ_θを図示すると図 1.1 のようになる．

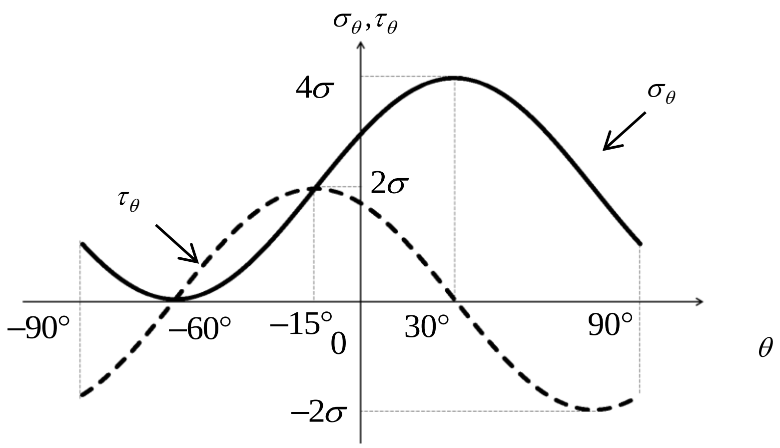

Fig.1.1 σ_θと τ_θの変化.

(4)　(3)より，τ_θ=0 の場合のθを求め，そのときのσ_θを算出せよ．ただし，−90°≤θ≤90°とする．

τ_θ=0 とすると

$$\begin{aligned}&\tau_\theta=-2\sigma\sin\left(2\theta-60°\right)=0\\&\Leftrightarrow\sin\left(2\theta-60°\right)=0\\&\Leftrightarrow\theta=-60°,\quad 30°\end{aligned}\tag{1.11}$$

となる．したがってσ_θは以下の式となる．

$$\sigma_\theta=\begin{cases}0 & \left(\theta=-60°\right)\\4\sigma & \left(\theta=30°\right)\end{cases}\tag{1.12}$$

(5)　応力テンソル[σ]を求め，図 1 におけるモールの応力円をσ–τ平面上に描け．

$\sigma_x=3\sigma$，$\sigma_y=\sigma$，$\tau_{xy}=\sqrt{3}\sigma$ より，応力テンソル$[\sigma]$は

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\\tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\sigma & \sqrt{3}\sigma\\\sqrt{3}\sigma & \sigma\end{bmatrix}\tag{1.13}$$

したがって，モールの応力円は 2 点(σ_x, τ_{xy})=(3σ, $\sqrt{3}\,\sigma$)ならびに(σ_y, $-\tau_{xy}$)=(σ, $-\sqrt{3}\,\sigma$)を直径にもつ円であり，その中心(σ_c，0)は

$$\left(\sigma_c,0\right)=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)=\left(2\sigma,0\right)\tag{1.14}$$

また，モールの応力円の半径 r は

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}{}^2}=\frac{1}{2}\times4\sigma=2\sigma\tag{1.15}$$

以上を基にモールの応力円をσ–τ平面(τ軸は下向き)に描くと図 1.2 のようになる．

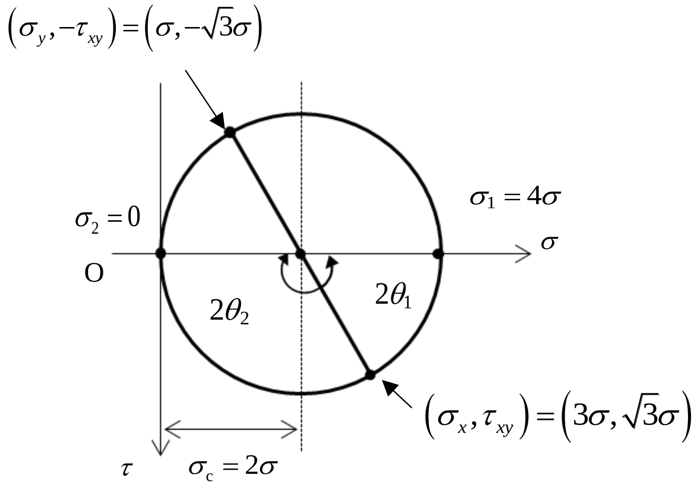

Fig 1.2 モールの応力円.

(6) (3)で描いたモールの応力円を用いて，主応力(σ_1, σ_2)を求めよ．

x-y 座標系を θ だけ回転させた座標系の応力状態(σ_θ, τ_θ)は, モールの応力円上において(σ_x, τ_{xy})を 2 θ （τ軸を上向きにとると-2θ）回転させた位置に一致する．主応力面でせん断応力は 0 となるから図 1.2 より，

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_c + r \\ \sigma_c - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sigma \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

<補足>

また，主方向(θ_1,θ_2)は以下のように求まる．

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \theta_1 = \left\{\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)\right\} / 2 = 30° \tag{1.17}$$

2 つ主方向は互いに直交するので

$$\theta_2 = \theta_1 - 90° = -60° \tag{1.18}$$

[2] 図 2 は弾性体のある点における応力状態を示したものである．なお，図 2(b)は図 2(a)を反時計回りに 30°回転させた状態，図 2(c)は図 2(d)を反時計回りに 60°回転させた状態を図示したものである．この時，以下の設問に答えよ．<u>解答には単位を明記すること．</u>

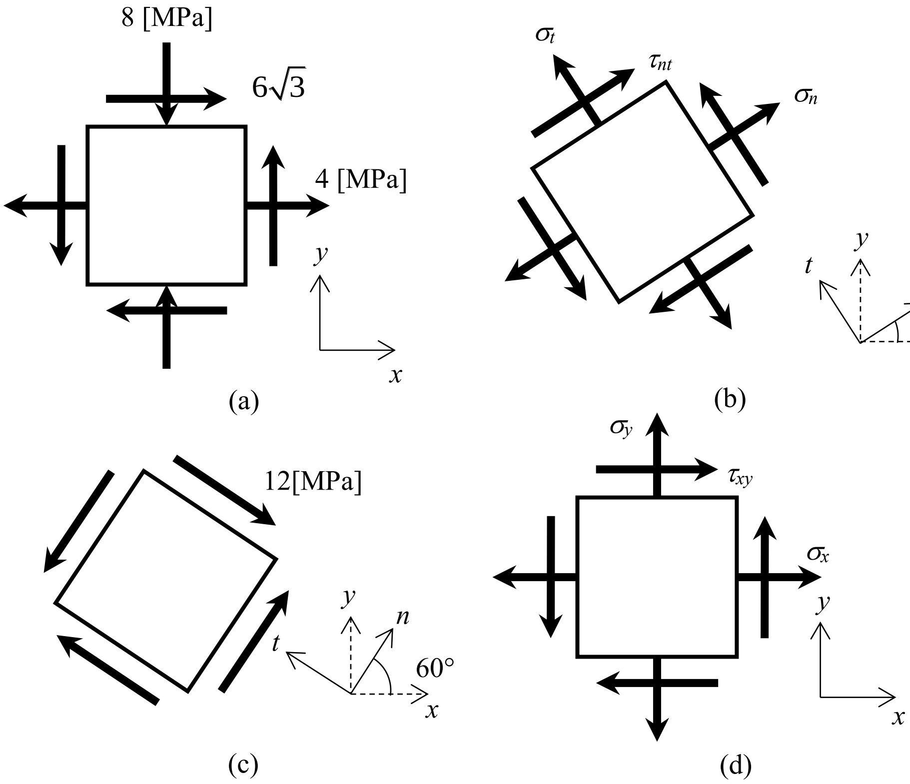

Fig. 2 弾性体のある点における応力状態.

(1) 図 2(a)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ.

(2) (1)で描いたモールの応力円から図 2(b)の応力テンソル※1 を求めよ.

(3) 図 2(a)について座標変換を行うことで図 2(b)の応力テンソルを求め，これが(2)の結果と一致することを示せ．なお必要に応じて以下の座標変換マトリックス※2 を用いよ.

(4) 図 2(c)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ.

(5) (4)で描いたモールの応力円から図 2(d)の応力テンソル※1 を求めよ.

(6) 図 2(c)について座標変換を行うことで図 2(d)の応力テンソルを求め，これが(5)の結果と一致することを示せ.

※1 図 2(b), (d)の応力テンソル：$\left[\sigma\right]=\begin{pmatrix}\sigma_n & \tau_{nt}\\ \tau_{nt} & \sigma_t\end{pmatrix}$ [MPa]，$\left[\sigma\right]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}$ [MPa]

※2 座標変換マトリックス　：$\left[L\right]=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(1)　図 2(a)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ.

図 2(a)において x-y 座標系で与えられた応力テンソルは式(2.1)のようになる.

$$[\sigma]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\sqrt{3}\\ 6\sqrt{3} & -8\end{pmatrix}\ [\mathrm{MPa}] \tag{2.1}$$

この応力テンソルから図 2.1 のようなモールの応力円が描ける.

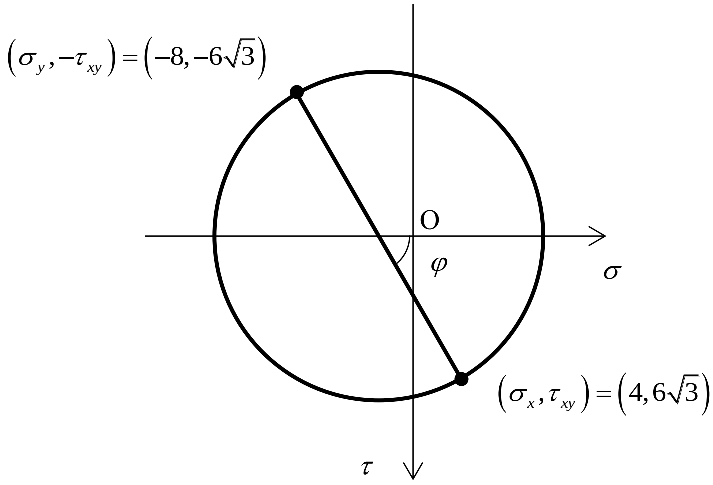

Fig. 2.1 図 2(a)におけるモールの応力円.

また，応力テンソルからモールの応力円の中心と半径は以下のように求められる.

$$\text{中心：}(\sigma_{\mathrm{c}},\tau_{\mathrm{c}})=\left(\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y),0\right)=\left(\frac{1}{2}(4-8),0\right)=(-2,0)\,[\mathrm{MPa}] \tag{2.2}$$

$$\text{半径：}r=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}{}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\{4-(-8)\}^2+4(6\sqrt{3})^2}=12\,[\mathrm{MPa}] \tag{2.3}$$

(2)　(1)で描いたモールの応力円から図(b)の応力テンソルを求めよ.

図 2.1 のように角度をφとおくと，

$$\tan\varphi=\left|\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right|=\left|\frac{-6\sqrt{3}}{-2-4}\right|=\sqrt{3}$$

$$\therefore\varphi=60^\circ \tag{2.4}$$

座標系をθ =30°反時計回りに回転させるとき，モールの応力円上では 2θ =60°反時計回りの回転となる．よって座標回転後(図 2(b))のモールの応力円は図 2.2 のようになる．

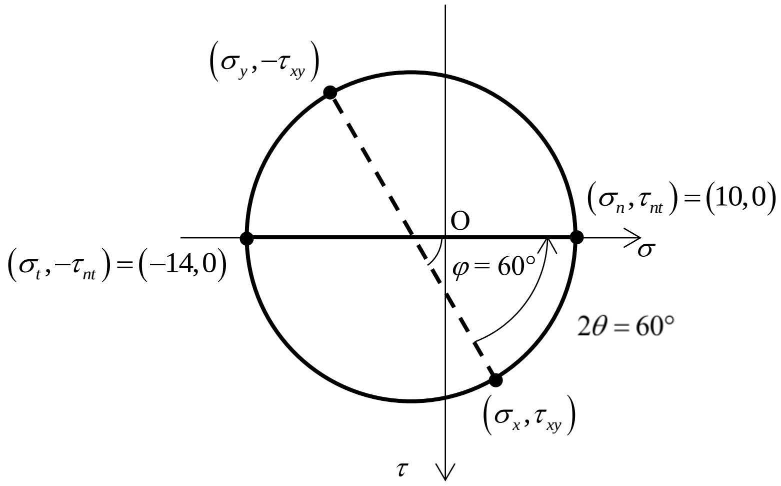

Fig. 2.2 図 2(b)におけるモールの応力円.

図 2(b)におけるモールの応力円からσ_n，σ_tは次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
\sigma_n &= \sigma_c + r = -2 + 12 = 10\left[\mathrm{MPa}\right] \\
\sigma_t &= \sigma_c - r = -2 - 12 = -14\left[\mathrm{MPa}\right]
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

以上より図 2(a)から座標系をθ=30°反時計回りに回転させた図 2(b)の応力テンソル[σ']は

$$
\left[\sigma'\right] = \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} \left[\mathrm{MPa}\right] \tag{2.6}
$$

(3)　図 2(a)について座標変換を行うことで図 2(b)の応力テンソルを求め，これが(2)の結果と一致することを示せ.

x-*y* 座標系における応力テンソルを[σ]とする．*x*-*y* 座標系からθ回転させた *x*'-*y*'座標系における応力テンソル[σ']は，座標変形マトリックス[*L*]を用いると以下のように表される．

$$
\left[\sigma'\right] = \left[L\right]\left[\sigma\right]\left[L^{-1}\right] \tag{2.7}
$$

よって *x*-*y* 座標系から反時計回りに 30°回転した状態の *n*-*t* 座標系における応力テンソルは

$$
\begin{aligned}
[\sigma'] &= \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}]
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

となる．これは(2)の結果と一致している．

(4)　図 2(c)のような応力状態におけるモールの応力円を描き，その中心と半径を示せ.

図 2(c)において n - t 座標系で与えられた応力テンソルは式(2.9)のようになる．

$$
[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}] \tag{2.9}
$$

この応力テンソルからモールの応力円が描ける．

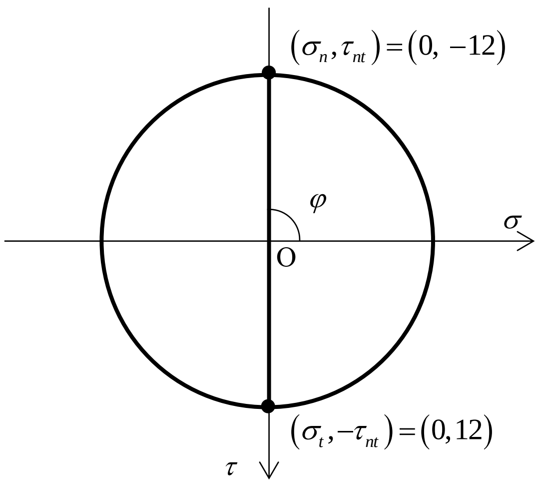

Fig. 2.3 図 2(c)におけるモールの応力円.

また，応力テンソルからモールの応力円の中心と半径は以下のように求められる．

$$中心：\left(\sigma_c, \tau_c\right) = \left(\frac{1}{2}\left(\sigma_n + \sigma_t\right), 0\right) = \left(0, 0\right) \text{[MPa]} \tag{2.10}$$

$$半径：r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_n - \sigma_t\right)^2 + 4\tau_{nt}{}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 4\left(-12\right)^2} = 12 \text{ [MPa]} \tag{2.11}$$

(5)　(4)で描いたモールの応力円から図(d)の応力テンソルを求めよ.

図 2.3 のように角度をφとおくと，明らかに$\varphi = 90°$である.

座標系をθ=60°時計回りに回転させるとき，モールの応力円上では 2θ=120°時計回りの回転となる．よって座標回転後(図 2(d))のモールの応力円は図 2.4 のようになる.

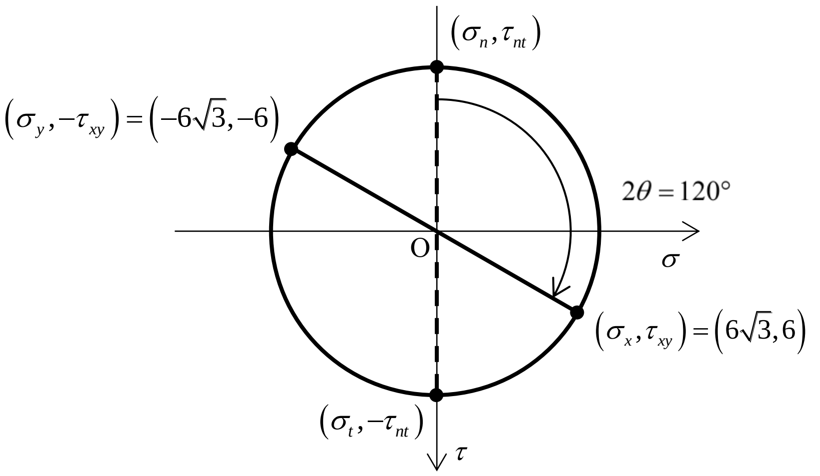

Fig. 2.4 図 2(d)におけるモールの応力円.

以上より図 2(d)の応力テンソルは

$$\left[\sigma'\right] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} & 6 \\ 6 & -6\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{[MPa]} \tag{2.12}$$

(6)　図 2(c)について座標変換を行うことで図 2(d)の応力テンソルを求め，これが(5)の結果と一致することを示せ.

n-t 座標系から時計回りに 60°回転した状態である x-y 座標系における応力テンソルは

$$
\begin{aligned}
\left[\sigma'\right] &= \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\left(-60^\circ\right) & \sin\left(-60^\circ\right) \\ -\sin\left(-60^\circ\right) & \cos\left(-60^\circ\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(-60^\circ\right) & -\sin\left(-60^\circ\right) \\ \sin\left(-60^\circ\right) & \cos\left(-60^\circ\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} & 6 \\ 6 & -6\sqrt{3} \end{pmatrix} \left[\mathrm{MPa}\right]
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

となる．これは(5)の結果と一致している．