材料の力学 1　Step 1 第 2 回演習問題（2019/4/23 実施）

[1]　図 1 に示すように段付きの丸棒部材が壁に固定されている．AB 間に分布荷重 p，BC 間に分布荷重 $3p$ が x 軸正方向に作用している．C 点には荷重 P が x 軸負方向に作用している．各部材の断面積および弾性率は AB 間を $2A$，E，BC 間を A，E として，以下の問いに答えなさい.

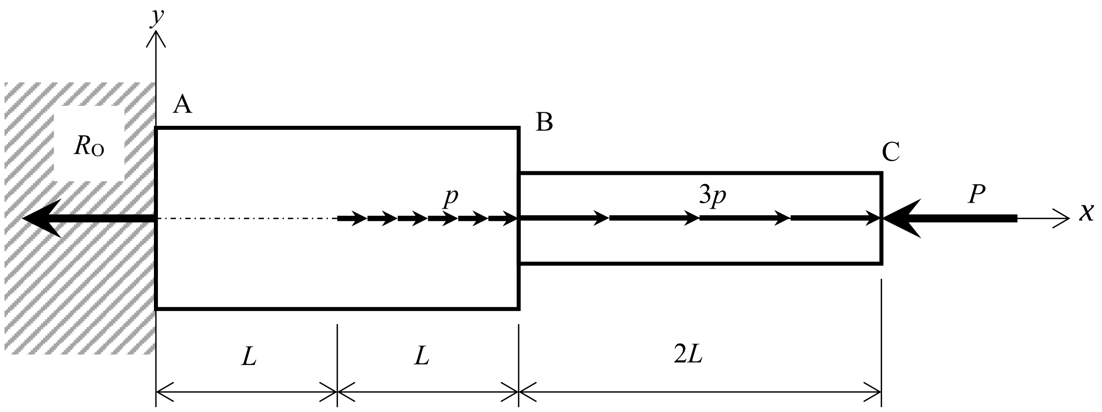

Fig. 1　壁に固定された丸棒部材.

(1)　丸棒全体の FBD を描き，壁からの反力 R_O を求めよ．

(2)　丸棒に作用している軸力 $N(x)$の x 方向の変化を図示せよ．ただし，$0<P<6pL$ とする．

(3)　C 点での変位 $\delta_C=0$ のとき，P と p の関係を求めよ．

(1)　丸棒全体の FBD を描き，壁からの反力 R_O を求めよ．

丸棒全体の FBD を描くと以下のように図示できる．

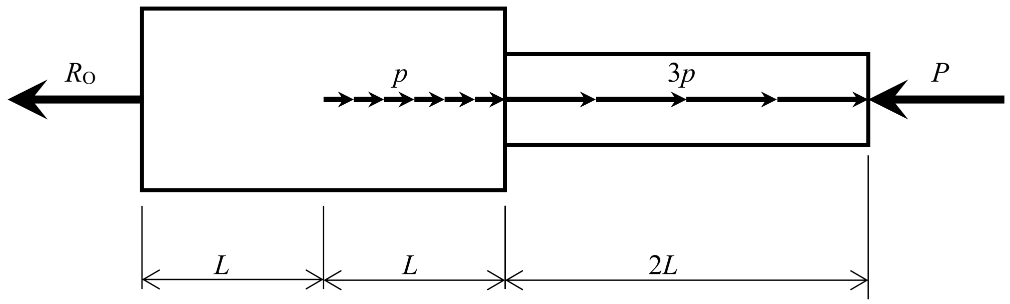

Fig. 1.1 FBD.

力のつり合いより，

$$\begin{aligned} -P + pL + 6pL - R_O &= 0 \\ \therefore R_O &= -P + 7pL \end{aligned} \tag{1.1}$$

(2)　丸棒に作用している軸力 $N(x)$の x 方向の変化を図示せよ．ただし，$0<P<6pL$ とする．

$0 \le x \le L$，$L \le x \le 2L$，$2L \le x \le 4L$ のそれぞれの範囲において軸力 $N(x)$を考える．

(i) $0 \le x \le L$ のとき

FBD は以下のようになる．

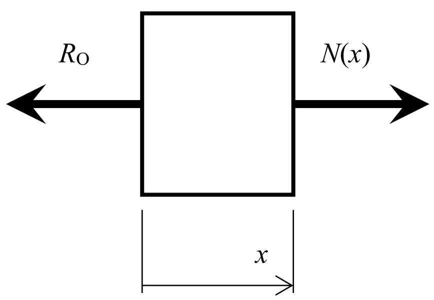

Fig. 1.2 FBD $(0 \le x \le L)$.

力のつり合いにより，

$$N(x) - R_{\mathrm{O}} = 0$$

$$N(x) = R_{\mathrm{O}} \tag{1.2}$$

$$= -P + 7pL$$

(ii) $L \le x \le 2L$ のとき

FBD は以下のようになる.

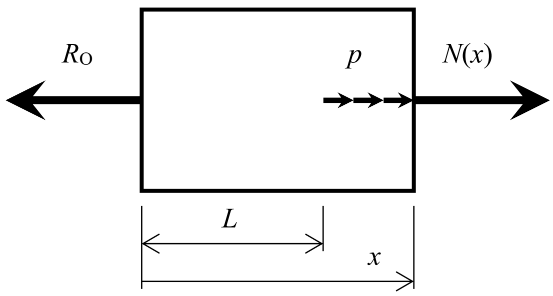

Fig. 1.3 FBD $(L \le x \le 2L)$.

力のつり合いにより,

$$N(x) + p(x - L) - R_{\mathrm{O}} = 0$$

$$N(x) = -p(x - L) + R_{\mathrm{O}} \tag{1.3}$$

$$= -P - p(x - 8L)$$

(iii) $2L \le x \le 4L$ のとき

FBD は以下のようになる.

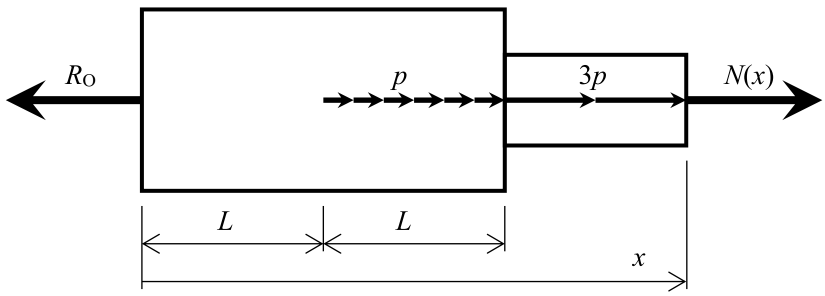

Fig. 1.4 FBD $(2L \le x \le 4L)$.

力のつり合いにより,

$$N(x)+3p(x-2L)+pL-R_O=0$$

$$N(x)=-3p(x-2L)-pL-P+7pL \tag{1.4}$$

$$=-P-3p(x-4L)$$

よって，軸力 $N(x)$は以下のように図示することができる.

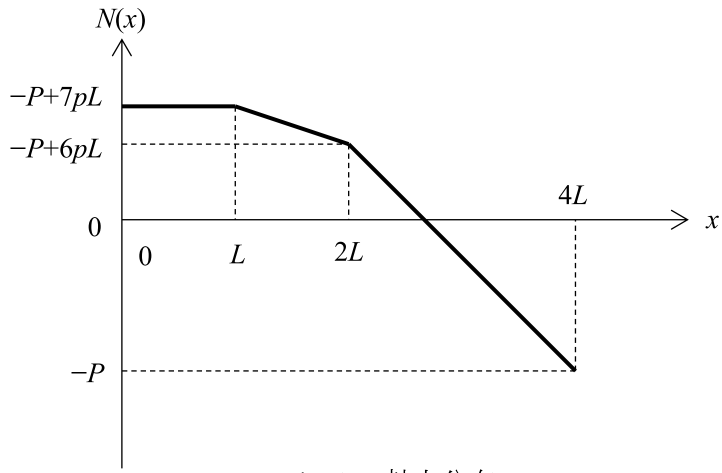

Fig. 1.5 軸力分布.

(3) C 点での変位δ_C=0 のとき，P と p の関係を求めよ.

まず，それぞれの範囲に働く応力$\sigma(x)$を考える．各範囲における断面積の大きさに注意すると以下のようになる.

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{2A} = \frac{-P + 7pL}{2A} \qquad (0 \le x \le L) \tag{1.5}$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{2A} = \frac{-P - p(x - 8L)}{2A} \qquad (L \le x \le 2L) \tag{1.6}$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{-P - 3p(x - 4L)}{A} \qquad (2L \le x \le 4L) \tag{1.7}$$

求める変位δ_C は各範囲のひずみを積分し足し合わせることで求めることができる．このとき，縦ひずみは垂直応力を縦弾性率で除することで求まる(1 次元応力の場合)ことに注意する．

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{C}} &= \int \varepsilon(x)dx \\
&= \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E}dx + \int_L^{2L} \frac{\sigma(x)}{E}dx + \int_{2L}^{4L} \frac{\sigma(x)}{E}dx \\
&= \int_0^L \frac{-P + 7pL}{2EA}dx + \int_L^{2L} \frac{-P - p\left(x - 8L\right)}{2EA}dx + \int_{2L}^{4L} \frac{-P - 3p\left(x - 4L\right)}{EA}dx \\
&= \frac{1}{2EA}\Big[\left(-P + 7pL\right)x\Big]_0^L + \frac{1}{2EA}\left[\left(-P + 8pL\right)x - p\frac{x^2}{2}\right]_L^{2L} \\
&\qquad + \frac{1}{EA}\left[(-P + 12pL)x - 3p\frac{x^2}{2}\right]_{2L}^{4L} \\
&= \frac{1}{2EA}(-2PL + \frac{27}{2}pL^2) + \frac{1}{EA}(-2PL + 6pL^2) \\
&= \frac{51pL^2 - 12PL}{4EA}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

δ_C=0 より，

$$\begin{gathered}
51pL^2 - 12PL = 0 \\
\therefore P = \frac{17}{4}pL
\end{gathered} \tag{1.9}$$

[2] 図 2 のように，長さ L，直径 d_1 の丸棒 1 と長さ $2L$，直径 d_2，厚さ t（$d_2 >> t$）の薄肉円筒 2 が左端を段差のある壁で固定されている．右端は剛体に固定されており，剛体を介して外力 P が作用している．丸棒には分布荷重 p が作用している．剛体は上下面を支持されていて，回転せず平行にのみ移動することができる．丸棒と薄肉円筒のヤング率はともに E とする．丸棒と薄肉円筒が壁から受ける反力をそれぞれ R_1，R_2 として，以下の問いに答えよ．ただし，薄肉円筒が壁から受ける反力は断面の図心を通る集中荷重と考えることとする．

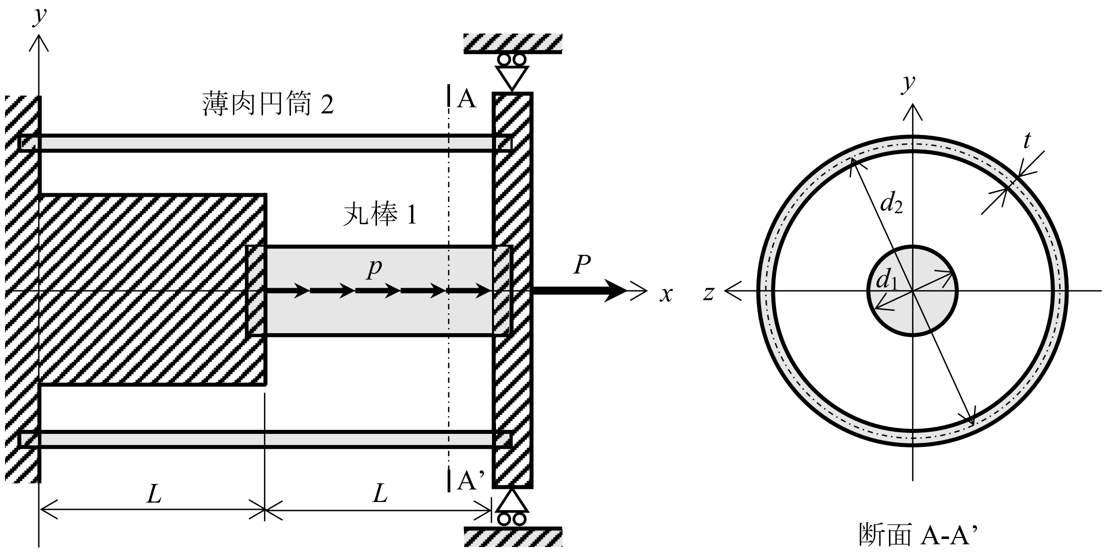

Fig. 2 丸棒と薄肉円筒.

(1) 外力 P と反力 R_1，R_2 のつり合い式を示せ.

(2) 丸棒，薄肉円筒に作用する軸力 $N_1(x)$，$N_2(x)$を R_1，R_2 を用いて示せ.

(3) 丸棒，薄肉円筒に作用する垂直応力$\sigma_1(x)$，$\sigma_2(x)$を R_1，R_2 を用いて示せ.

(4) 丸棒，薄肉円筒に生じるひずみ$\varepsilon_1(x)$，$\varepsilon_2(x)$を R_1，R_2 を用いて示せ.

(5) 丸棒および薄肉円筒の右端における変位が等しいことおよび(1)で示したつり合い式を用いて，反力 R_1，R_2 を求めよ．ただし，d_1:d_2=3:10，d_2:t=100:1 とする.

(1)　外力 P と反力 R_1，R_2 のつり合い式を示せ．

薄肉円筒が壁から受ける反力は断面の図心を通ると考えて全体の FBD を描くと図 2.1 のようになる．

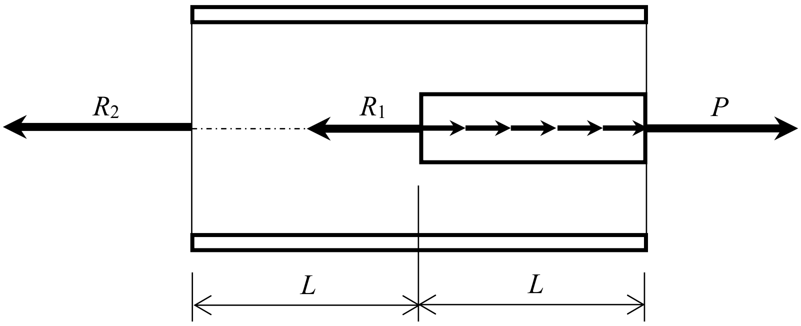

Fig. 2.1　全体の FBD.

力のつり合い式は以下のように表される．

$$-R_1 - R_2 + pL + P = 0 \tag{2.1}$$

(2)　丸棒，薄肉円筒に作用する軸力 $N_1(x)$，$N_2(x)$を R_1，R_2 を用いて示せ．

まず丸棒について考える．図 2.2 のように原点を丸棒の左端に置き換える．

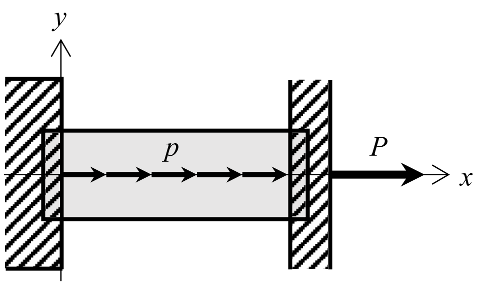

Fig. 2.2　丸棒.

このとき距離 x における仮想断面を考え FBD を描くと図 2.3 のようになる．

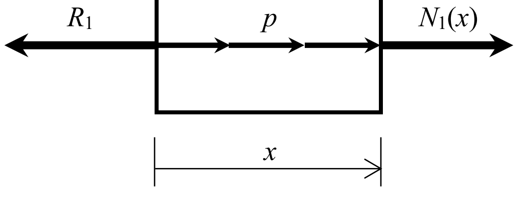

Fig. 2.3　丸棒に関する FBD.

力のつり合い式をたてることで丸棒に作用する軸力 $N_1(x)$は以下のように求まる．

$$-R_1 + px + N_1(x) = 0$$

$$\therefore N_1(x) = -px + R_1 \tag{2.2}$$

薄肉円筒について考える．原点から距離 x における仮想断面を考え，薄肉円筒が壁から受ける反力は断面の図心を通ると考えて FBD を描くと図 2.4 のようになる．

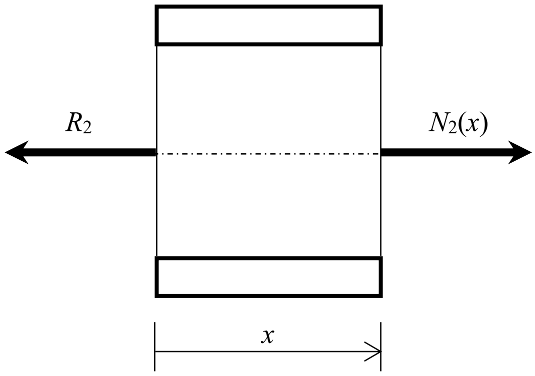

Fig. 2.4 薄肉円筒に関する FBD.

力のつり合い式をたてることで薄肉円筒に作用する軸力 $N_2(x)$は以下のように求まる．

$$-R_2 + N_2(x) = 0$$

$$\therefore N_2(x) = R_2 \tag{2.3}$$

(3) 丸棒，薄肉円筒に作用する垂直応力$\sigma_1(x)$，$\sigma_2(x)$を R_1，R_2 を用いて示せ．

垂直応力$\sigma(x)$は軸力 $N(x)$および断面積 S を用いて

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S} \tag{2.4}$$

と表される．丸棒に関して断面積 S_1 は直径 d_1 より

$$S_1 = \frac{\pi d_1^{\ 2}}{4} \tag{2.5}$$

と得られる．薄肉円筒に関して断面積 S_2 は $d_2 >> t$ であることより

$$S_2 = \pi d_2 t \tag{2.6}$$

と得られる．式(2.4)を踏まえ，丸棒に作用する垂直応力$\sigma_1(x)$は式(2.2)および式(2.5)から以下のように求まる．

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= \frac{N_1(x)}{S_1} \\ &= \frac{4(-px + R_1)}{\pi d_1^{\ 2}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

同様にして, 薄肉円筒に作用する垂直応力$\sigma_2(x)$は式(2.3)および式(2.6)から以下のように求まる．

$$\begin{aligned} \sigma_2(x) &= \frac{N_2(x)}{S_2} \\ &= \frac{R_2}{\pi d_2 t} \end{aligned} \tag{2.8}$$

(4) 丸棒，薄肉円筒に生じるひずみ$\varepsilon_1(x)$，$\varepsilon_2(x)$を R_1，R_2 を用いて示せ．

ひずみ$\varepsilon(x)$は応力$\sigma(x)$からヤング率 E を用いて

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} \tag{2.9}$$

より求めることができる．式(2.7)～(2.9)および丸棒と薄肉断面のヤング率がともに E であることより，丸棒と薄肉円筒に生じるひずみはそれぞれ以下のように求まる．

$$\varepsilon_1(x) = \frac{4(-px + R_1)}{\pi E d_1^{\ 2}} \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_2(x) = \frac{R_2}{\pi E d_2 t} \tag{2.11}$$

(5)　丸棒および薄肉円筒の右端における変位が等しいことと(1)で示したつり合い式を用いて，反力 $\boldsymbol{R_1}$，$\boldsymbol{R_2}$ を求めよ．

変位δはひずみ$\varepsilon(x)$を用いて

$$\delta = \int \varepsilon\left(x\right) dx \tag{2.12}$$

より求めることができる．まず丸棒について右端の変位δ_1を算出する．式(2.12)を踏まえ，式(2.10)から

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \int_0^L \frac{4\left(-px+R_1\right)}{\pi E {d_1}^2} dx \\
&= \frac{4}{\pi E {d_1}^2} \int_0^L \left(-px+R_1\right) dx \\
&= \frac{4}{\pi E {d_1}^2} \left[-\frac{1}{2} px^2 + R_1 x \right]_0^L \\
&= \frac{4R_1 L - 2pL^2}{\pi E {d_1}^2}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

と得られる．同様にして薄肉円筒について右端の変位δ_2を算出する．式(2.11)より

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \int_0^{2L} \frac{R_2}{\pi E d_2 t} dx \\
&= \frac{2R_2 L}{\pi E d_2 t}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

と得られる. 丸棒および薄肉円筒の右端における変位が等しいことより式(2.13)と式(2.14)から

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta_2 \\
\frac{4R_1L - 2pL^2}{\pi E d_1{}^2} &= \frac{2R_2L}{\pi E d_2 t} \\
\frac{2R_1 - pL}{d_1{}^2} &= \frac{R_2}{d_2 t} \\
\frac{2R_1 - pL}{R_2} &= \frac{d_1{}^2}{d_2 t} \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

という関係式が得られる．ここで，d_1:d_2=3:10 および d_2:t=100:1 であることより，式(2.15)は

$$
\begin{aligned}
\frac{2R_1 - pL}{R_2} &= 9 \\
2R_1 - 9R_2 &= pL \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

と変形される．また，(1)にて示した式(2.1)は

$$
\begin{aligned}
-R_1 - R_2 + pL + P &= 0 \\
R_1 + R_2 &= pL + P \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

のように変形される．式(2.16)および式(2.17)を連立することにより反力 R_1，R_2 はそれぞれ以下のように求まる．

$$
\begin{cases}
2R_1 - 9R_2 = pL \\
\ \ R_1 + \ \ R_2 = pL + P
\end{cases}
$$

$$
\therefore \begin{cases}
R_1 = \dfrac{10}{11}pL + \dfrac{9}{11}P \\
R_2 = \dfrac{1}{11}pL + \dfrac{2}{11}P
\end{cases} \qquad (2.18)
$$