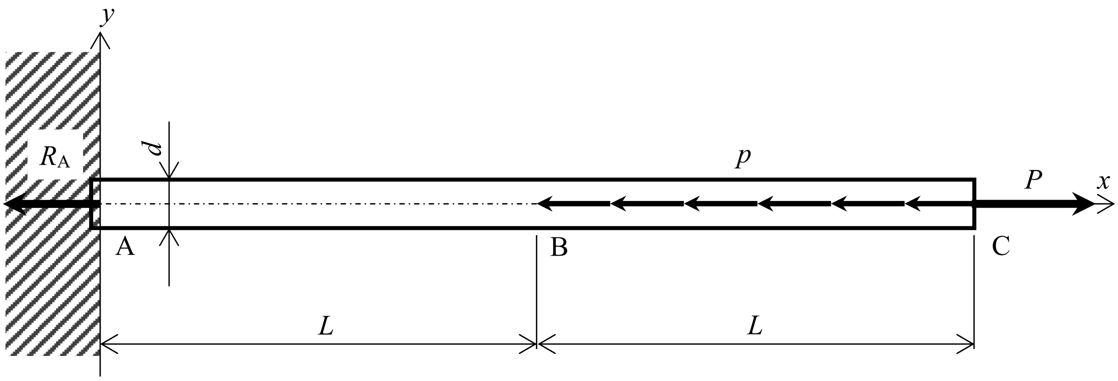
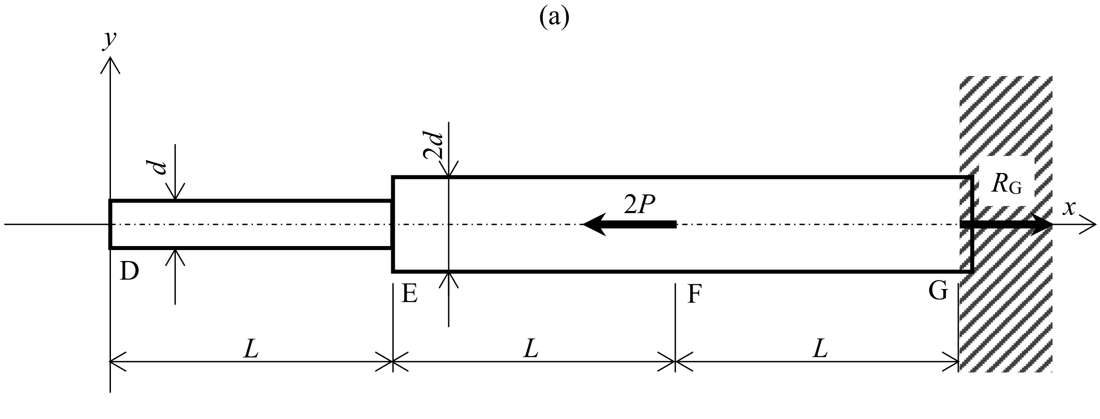
材料の力学 1　Step 1　第 1 回演習問題（2019/4/16 実施）

[1]　図 1 のような一端が壁に固定された棒状の部材がある．(a)では長さ $2L$，直径 d の丸棒が A で壁に固定されており，BC 間に分布荷重 p が x 軸負方向，C に外力 P が x 軸正方向にそれぞれ作用している．(b)では長さ L，直径 d の丸棒と長さ $2L$，直径 $2d$ の丸棒からなる段付き丸棒が G で壁に固定されており，F に外力 $2P$ が x 軸負方向に作用している．壁からの反力 R_A，R_G を図のように仮定し，以下の問いに答えよ．ただし，各部材のヤング率を E とする．



(a)



(b)

Fig. 1 壁に固定された棒状部材

(1) 各部材の FBD をそれぞれ描き，壁からの反力 R_A，R_G を求めよ．

(2) 各部材に作用している軸力 $N(x)$の x 方向変化を縦軸:N，横軸:x としてそれぞれ図示せよ．

(3) 各部材に作用している垂直応力$\sigma(x)$の x 方向変化を縦軸:σ，横軸:x としてそれぞれ図示せよ．

(4) 各部材について，(a)の C 点と(b)の D 点における x 軸方向の変位をそれぞれ求めよ．ただし，各部材全体の変位量δは次式で表される．

$$\delta = \int \varepsilon\left(x\right) dx$$

(1)　各部材の FBD をそれぞれ描き，壁からの反力 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}$，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}$ を求めよ．

(a) に関する FBD を描くと，以下のように表される．

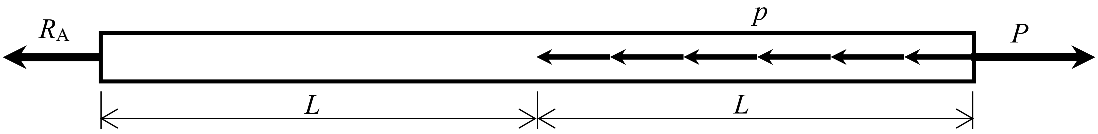


Fig. 1.1 (a)の FBD

(a)の FBD から力のつり合いの式を立てると，壁からの反力 R_{A} は以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
&-R_{\mathrm{A}} - pL + P = 0 \\
&\therefore R_{\mathrm{A}} = P - pL
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

(b) に関する FBD を描くと，以下のように表される．

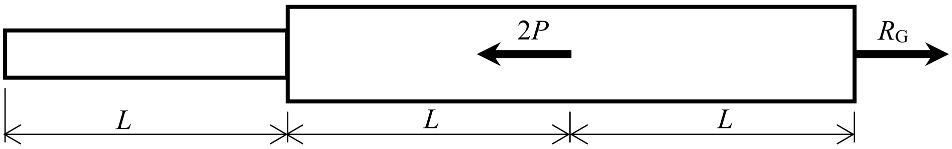


Fig. 1.2 (b)の FBD

(b)の FBD から力のつり合いの式を立てると，壁からの反力 R_{G} は以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
&-2P + R_{\mathrm{G}} = 0 \\
&\therefore R_{\mathrm{G}} = 2P
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

(2)　各部材に作用している軸力 $\boldsymbol{N(x)}$の $\boldsymbol{x}$ 方向変化を縦軸:$\boldsymbol{N}$，横軸:$\boldsymbol{x}$ としてそれぞれ図示せよ．

原点からの距離 x の仮想断面における軸力 $N(x)$を用いて(a)の FBD を描くと，以下のように表される．

(i) $0 \le x < L$

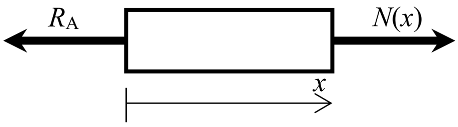


Fig. 1.3 (a)の FBD ($0 \le x < L$)

(ii) $L \le x < 2L$

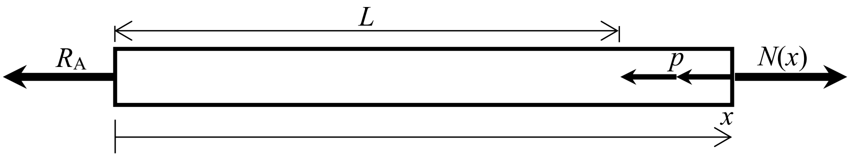


Fig. 1.4 (a)の FBD ($L \le x < 2L$)

FBD と(1)の結果を用いると，つり合いの式より，$N(x)$は以下のように求まる．

(i) $0 \le x < L$

$$
\begin{aligned}
&-R_{\mathrm{A}} + N(x) = 0 \\
&\therefore N(x) = R_{\mathrm{A}} = P - pL
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

(ii) $L \le x < 2L$

$$
\begin{aligned}
&-R_{\mathrm{A}} - p(x - L) + N(x) = 0 \\
&\therefore N(x) = R_{\mathrm{A}} + p(x - L) = P - p(2L - x)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

よって，(a)の軸力分布は以下のように表される．

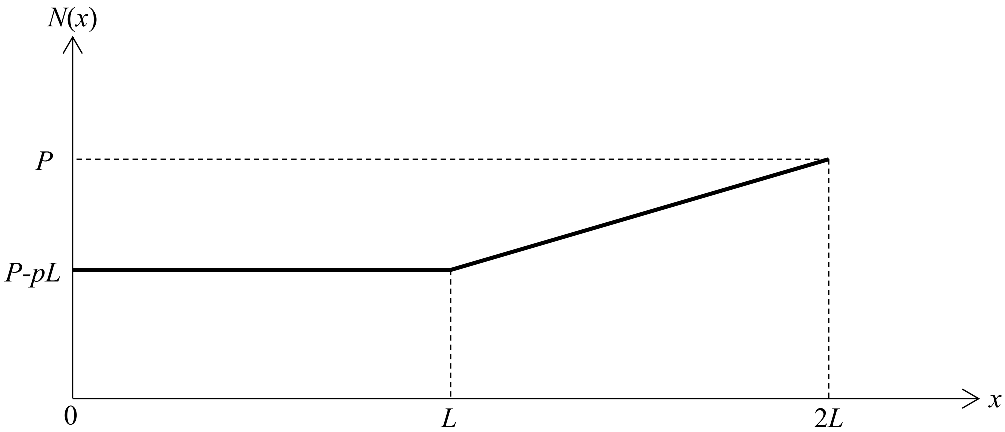


Fig. 1.5 (a)の軸力分布

(b)についても(a)と同様に軸力 $N(x)$を用いて FBD を描くと，以下のように表される．

(i) $0 \leq x < 2L$

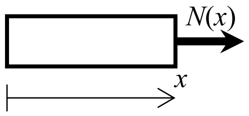


Fig. 1.6 (b)の FBD ($0 \leq x < 2L$)

(ii) $2L \leq x < 3L$

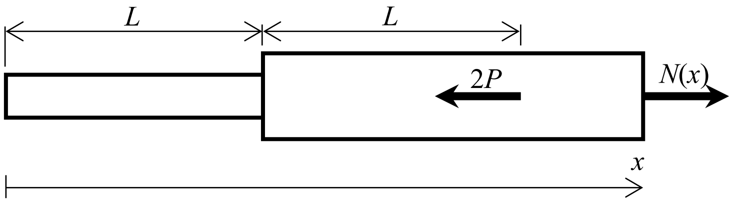


Fig. 1.7 (b)の FBD ($2L \leq x < 3L$)

つり合いの式より，$N(x)$は以下のように求まる．

(i) $0 \leq x < 2L$

$$N(x) = 0 \tag{1.5}$$

(ii) $2L \leq x < 3L$

$$\begin{aligned} &-2P + N(x) = 0 \\ &\therefore N(x) = 2P \end{aligned} \tag{1.6}$$

よって，(b)の軸力分布は以下のように表される．

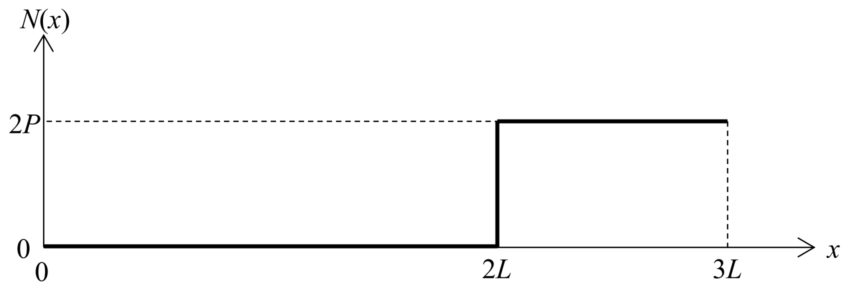


Fig. 1.8 (b)の軸力分布

(3)　各部材に作用している垂直応力$\sigma(x)$の x 方向変化を縦軸:σ, 横軸:x としてそれぞれ図示せよ.

原点からの距離 x の仮想断面に作用する垂直応力$\sigma(x)$は，断面積を S として，以下のようになる.

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S} \tag{1.7}$$

各部材の断面積 S_a，S_b は，以下のようになる.

$$S_\mathrm{a} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4} \tag{1.8}$$

$$S_\mathrm{b} = \begin{cases} \pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi d^2}{4} & (0 \le x < L) \\ \pi d^2 & (L \le x < 3L) \end{cases} \tag{1.9}$$

式(1.7)~(1.9)と(2)の結果から，各部材の垂直応力$\sigma_\mathrm{a}(x)$，$\sigma_\mathrm{b}(x)$は，以下のように求まる.

$$\sigma_\mathrm{a}(x) = \frac{N(x)}{S_\mathrm{a}} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi d^2}(P - pL) & (0 \le x < L) \\ \dfrac{4}{\pi d^2}\{P - p(2L - x)\} & (L \le x < 2L) \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\sigma_\mathrm{b}(x) = \frac{N(x)}{S_\mathrm{b}} = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 2L) \\ \dfrac{2P}{\pi d^2} & (2L \le x < 3L) \end{cases} \tag{1.11}$$

よって，(a)，(b)の垂直応力分布は以下のように表される.

x

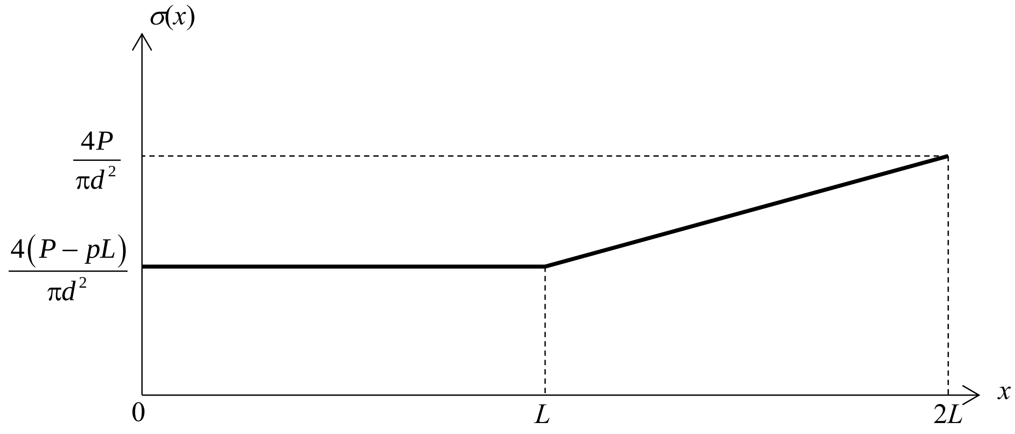


Fig. 1.9 (a)の垂直応力分布

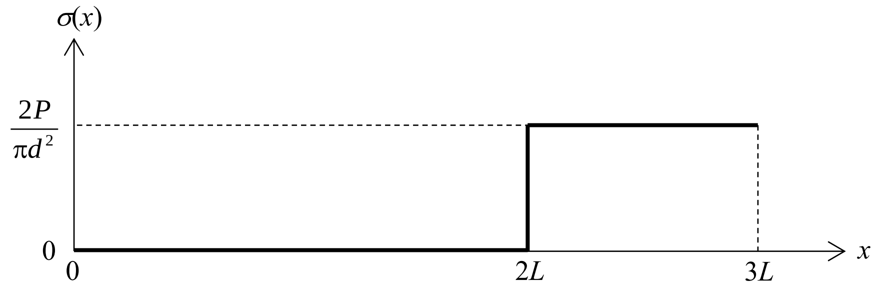


Fig. 1.10 (b)の垂直応力分布

(4) 各部材について，(a)の C 点と(b)の D 点における *x* 軸方向の変位をそれぞれ求めよ．ただし，各部材全体の変位量δは次式で表される．

$$\delta = \int \varepsilon(x)\,dx$$

ひずみは応力を用いて，

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} \tag{1.12}$$

と表せる．式(1.12)を用いると，各部材の変位量δは以下のようになる．

$$\delta = \int \frac{\sigma(x)}{E}\,dx \tag{1.13}$$

部材(a)の変位量δ_aは，式(1.13)を用いて，部材(a)の仮想断面に作用するひずみを 0 から 2L まで積分することで求まる．

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{a}} &= \int_0^{2L} \frac{\sigma_{\mathrm{a}}}{E} dx \\
&= \frac{1}{E}\left[\int_0^{L} \sigma_{\mathrm{a}} dx + \int_L^{2L} \sigma_{\mathrm{a}} dx\right] \\
&= \frac{1}{E}\left[\frac{4(P-pL)L}{\pi d^2} + \int_L^{2L} \frac{4}{\pi d^2}\left\{P - p\left(2L - x\right)\right\} dx\right] \\
&= \frac{4}{\pi E d^2}\left[\left(P - pL\right)L + \left\{PL - p\left(2L^2 - \frac{3L^2}{2}\right)\right\}\right] \\
&= \frac{2}{\pi E d^2}\left(4PL - 3pL^2\right) \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

部材(a)の変位量は正であり，A で固定されていることから，C 点での x 軸方向変位は,

$$
\frac{2}{\pi E d^2}\left(4PL - 3pL^2\right)
$$

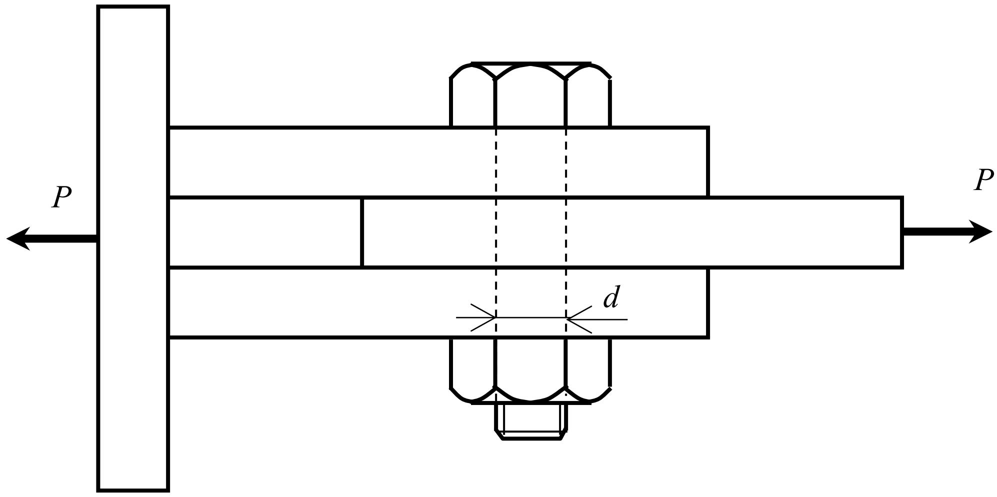
部材(b)の変位量δ_{b}は，式(1.13)を用いて，部材(b)の仮想断面に作用するひずみを 0 から $3L$ まで積分することで求まる.

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{b}} &= \int_0^{3L} \frac{\sigma_{\mathrm{b}}}{E} dx \\
&= \frac{1}{E}\left[\int_0^{2L} \sigma_{\mathrm{b}} dx + \int_{2L}^{3L} \sigma_{\mathrm{b}} dx\right] \\
&= \frac{1}{E}\left[\int_0^{2L} 0 dx + \int_{2L}^{3L} \frac{2P}{\pi d^2} dx\right] \\
&= \frac{2PL}{\pi E d^2} \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

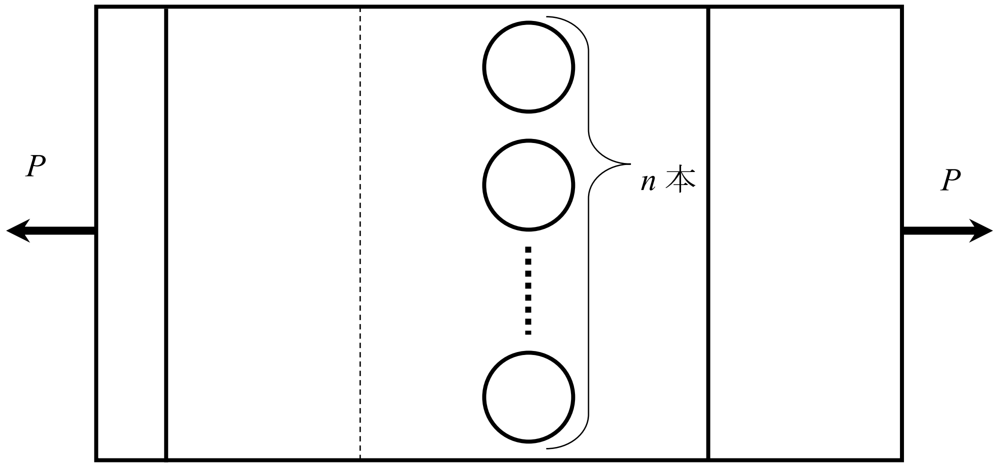
部材(b)の変位量は正であり，G で固定されていることから，D 点での x 軸方向変位は,

$$
-\frac{2PL}{\pi E d^2}
$$

[2] 図 2 に示すように，3 枚の鋼板が直径 d の鋼材製ボルトに締結され，外力 P が作用している．この時，以下の問いに答えよ．ただしボルトの締結力によって発生する部材間の摩擦力は無視できるものとし，各ボルトにかかる応力分布は一様とする．(1)，(2)では図 2(a)を用い，(3)は図 2(b)を参照せよ．



(a) 1 本のみの場合



(b) n 本の場合

Fig. 2 ボルトに固定された鋼板

(1) ボルトの FBD を描け．

(2) ボルトに生じるせん断応力τを求めよ．

(3) ボルトに生じるせん断応力τ=50[MPa]より小さくしたい時，ボルトは何本必要になるか求めよ．この時 P=40[kN]，d=12[mm]とする．

(1) ボルトの FBD を描け.

ボルトの FBD は図 2.1 のようになる.

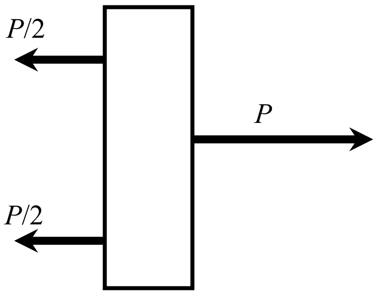


Fig. 2.1 FBD

(2) ボルトに生じるせん断応力τを求めよ.

ボルトには図 2.2 のように力が働く.

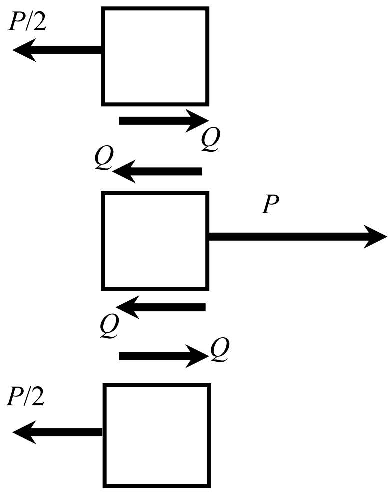


Fig. 2.2 ボルトに作用する力

力のつり合い式から

$$Q = \frac{P}{2} \tag{2.1}$$

となる.

ここで, リベットの断面積を A としたとき, せん断応力τは, 次のように表される.

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{P}{2A} \tag{2.2}$$

断面積 A は

$$A = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \tag{2.3}$$

したがって，ボルトに生じるせん断応力 τ は，

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{Q}{A} \\ &= \frac{P}{2\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2} \\ &= \frac{2P}{\pi d^2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

(3) ボルトに生じるせん断応力 τ=50[MPa]より小さくしたい時，ボルトは最低でも何本必要になるか求めよ．この時 P=40[kN]，d=12[mm]とする．

n 本のボルトを使用したと仮定すると，ボルト 1 本あたりに作用するせん断力 Q_n は，

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{Q}{n} \\ &= \frac{P}{2n} \\ &= \frac{20}{n} [\mathrm{kN}] \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる．

したがって，せん断応力 τ_n は，せん断力 Q_n を断面積で割って，

$$
\begin{aligned}
\tau_n &= \frac{Q_n}{A} \\
&= \frac{20}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 n} \\
&= \frac{80}{\pi d^2 n} \\
&= \frac{556}{\pi n}[\mathrm{MPa}]
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

となる.

ここで $\tau_n < 50$ [MPa]となればよいので,

$$
\begin{aligned}
&\tau_n < 50 \\
&\frac{556}{\pi n} < 50 \\
&n > 3.54
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

よってボルトは 4 本必要である.