材料の力学 1　Step2，3　第 12 回演習問題（2018/7/17 実施）

[1] 図 1.1 に示すように，分布荷重 $f(x)$が作用する長さ L の片持ちはりを考える．$f(x)$ は x の一次関数であり，$f(0)=0$，$f(L)=6f_0$ である．なお，はりの曲げ剛性は一様で EI_z とする．このとき，以下の設問に答えよ．

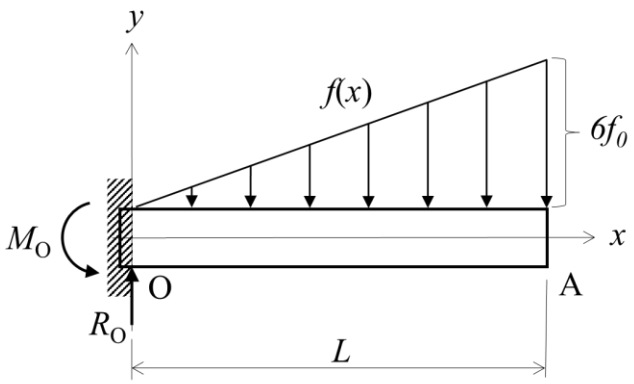

Fig. 1.1

(1) はりに作用する分布荷重 $f(x)$を x の関数として表しなさい．

(2) 壁からの反力 R_O，反モーメント M_O を，f_0，L を用いて表しなさい．

(3) はりの曲げモーメント $M(x)$を特異関数表示せよ．

(4) A 点に生じるたわみ v_A を，EI_z，f_0，L を用いて表しなさい．

(5) 以下の図 1.2 に示すように A 点に長さ $L/2$ の剛体レバーを付け，先端に集中荷重 R を作用させた時を考える．このとき，重ね合わせの原理を用いて A 点に生じるたわみが 0 となるときの R を求めよ．

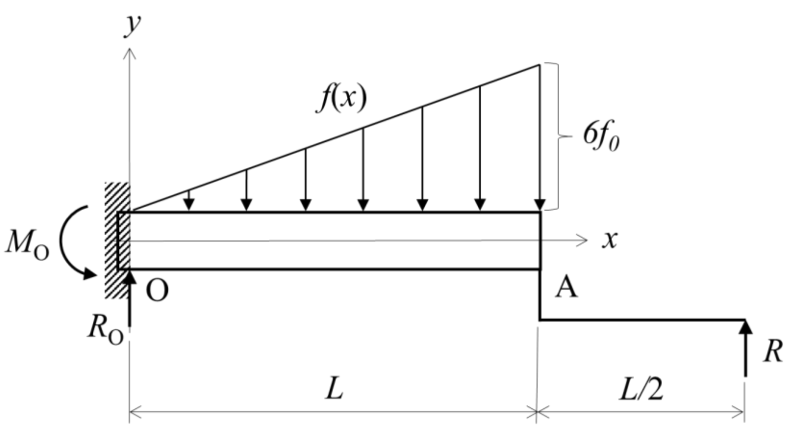

Fig. 1.2

[1]

(1) 分布荷重 $f(x)$は(0，0)と(L，$6f_0$)を通る一次関数なので次式のように表される．

$$f\left(x\right)=\frac{6f_0}{L}x \tag{1.1}$$

(2) はり全体の FBD は図 1.3 のように描ける．

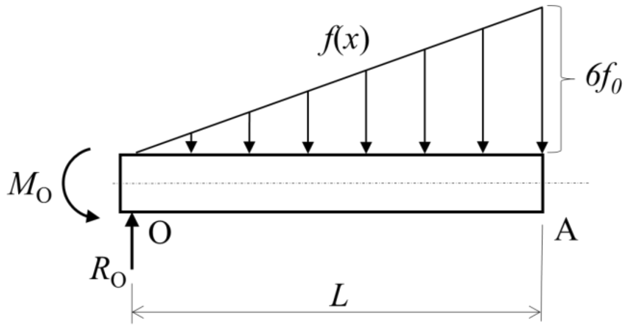

Fig. 1.3 はり全体の FBD

上図において，力のつり合い式より

$$R_\mathrm{O}-\int_0^L f\left(x\right)dx=0$$

$$\therefore R_\mathrm{O}=\int_0^L \frac{6f_0}{L}xdx=3f_0L \tag{1.2}$$

また，O 点まわりのモーメントのつり合い式より

$$-M_\mathrm{O}-\int_0^L f\left(x\right)xdx=0$$

$$\therefore M_\mathrm{O}=\int_0^L \frac{6f_0}{L}x^2dx=2f_0L^2 \tag{1.3}$$

(3) 曲げモーメント$M(x)$は， $f(x)$を二階積分することで求めることが出来る．

$$-EIv''''=f\left(x\right)=\frac{6f_0}{L}x$$

$$-EIv'''=Q\left(x\right)=\frac{3f_0}{L}x^2+\mathrm{C}_1 \tag{1.5}$$

$$-EIv''=M\left(x\right)=\frac{f_0}{L}x^3+C_1x+C_2 \tag{1.6}$$

上式に x=0 における境界条件を代入することで，式(1.5)，(1.6)における積分定数 C_1，C_2 は以下のように求まる．

$$\mathrm{C}_1=-R_\mathrm{O} \tag{1.7}$$

$$\mathrm{C}_2=M_\mathrm{O} \tag{1.8}$$

曲げモーメント $M(x)$ の特異関数は式(1.6)，(1.7)，(1.8)を用いて以下のようになる．

$$\begin{aligned}M\left(x\right)&=M_\mathrm{O}\left\langle x\right\rangle^0-R_\mathrm{O}\left\langle x\right\rangle^1+\frac{f_0}{L}\left\langle x\right\rangle^3\\&=2f_0L^2\left\langle x\right\rangle^0-3f_0L\left\langle x\right\rangle^1+\frac{f_0}{L}\left\langle x\right\rangle^3\end{aligned} \tag{1.9}$$

(4) たわみの基礎式より，たわみの二階微分 v'' と曲げモーメント $M(x)$ の間には以下の関係式が成立している．

$$-EI_zv''=M\left(x\right) \tag{1.10}$$

上式に式(1.9)を代入し，x について積分することでたわみ，たわみ角について以下の式が得られる．(C_1，C_2 は積分定数とする．)

$$-EI_zv'\left(x\right)=2f_0L^2\left\langle x\right\rangle^1-\frac{3}{2}f_0L\left\langle x\right\rangle^2+\frac{f_0}{4L}\left\langle x\right\rangle^4+\mathrm{C}_1 \tag{1.11}$$

$$-EI_zv\left(x\right)=f_0L^2\left\langle x\right\rangle^2-\frac{1}{2}f_0L\left\langle x\right\rangle^3+\frac{f_0}{20L}\left\langle x\right\rangle^5+\mathrm{C}_1x+\mathrm{C}_2 \tag{1.12}$$

境界条件より，O 点において $\nu_\mathrm{O}'(0)=\nu_\mathrm{O}(0)=0$ より

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2 = 0 \tag{1.13}$$

式(1.13)を式(1.12)に代入することで，たわみの関数は次式となる．

$$-EI_z v(x) = f_0 L^2 \langle x \rangle^2 - \frac{1}{2} f_0 L \langle x \rangle^3 + \frac{f_0}{20L} \langle x \rangle^5 \tag{1.14}$$

A 点に生じるたわみ v_{A} は上式に $x=L$ を代入することで以下のように求まる．

$$\begin{aligned} -EI_z v_{\mathrm{A}} &= -EI_z v(L) = f_0 L^2 \langle L \rangle^2 - \frac{1}{2} f_0 L \langle L \rangle^3 + \frac{f_0}{20L} \langle L \rangle^5 \\ &= \frac{11}{20} f_0 L^4 \end{aligned}$$

$$v_{\mathrm{A}} = -\frac{11}{20EI_z} f_0 L^4 \tag{1.15}$$

(5) まずは下図のように A 点においてはりが剛体レバーに与える荷重 R_{A}，モーメント M_{A} を考える．

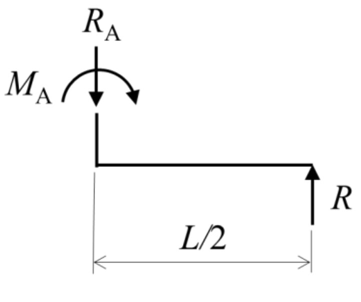

Fig. 1.4

力のつり合いおよび A 点におけるモーメントのつり合いより，

$$R - R_{\mathrm{A}} = 0 \quad \therefore R_{\mathrm{A}} = R \tag{1.16}$$

$$M_{\mathrm{A}} - R\frac{L}{2} = 0 \quad \therefore M_{\mathrm{A}} = R\frac{L}{2} \tag{1.17}$$

作用反作用の法則を考慮し，図 1.2 は以下の図 1.5 のように表せ，重ね合わせの原理より A 点に生じるたわみを求めることが出来る．

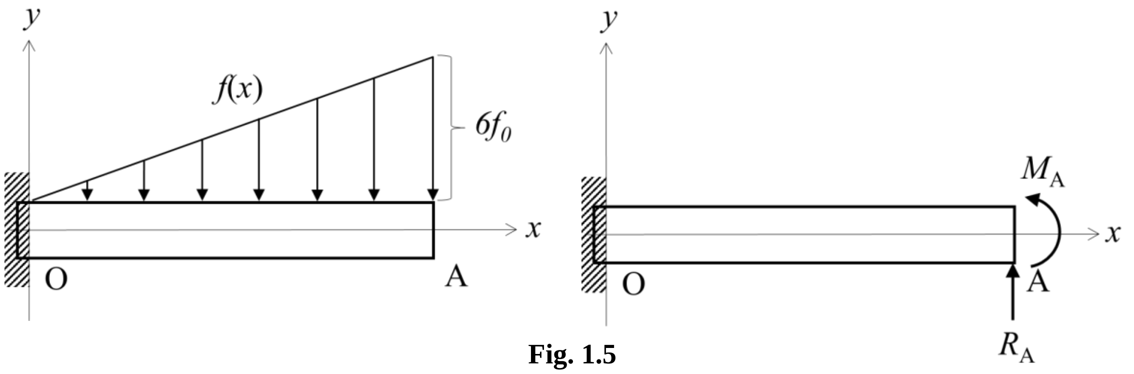

Fig. 1.5

反力 R_A によって A 点に生じるたわみ ν_RA は，次式に式(1.16)を代入することで次のように求められる．

$$\nu_\mathrm{RA} = \frac{R_\mathrm{A} L^3}{3EI_z} = \frac{RL^3}{3EI_z} \tag{1.18}$$

次に反モーメント M_A によって A 点に生じるたわみ ν_MA は，次式に式(1.17)を代入することで次のように求められる．

$$\nu_\mathrm{MA} = \frac{M_\mathrm{A} L^2}{2EI_z} = \frac{RL^3}{4EI_z} \tag{1.19}$$

分布荷重 $f(x)$によって A 点に生じるたわみ $\nu_{f\mathrm{A}}$ は式(1.15)で既に求めているので，式

(1.18)，式(1.19)より点 A において生じるたわみは

$$\nu_\mathrm{A} = \nu_{f\mathrm{A}} + \nu_\mathrm{RA} + \nu_\mathrm{MA} = -\frac{11 f_0 L^4}{20EI_z} + \frac{RL^3}{3EI_z} + \frac{RL^3}{4EI_z} \tag{1.20}$$

点 A において生じるたわみ ν_A が 0 となる時，負荷荷重 R は次のように求まる．

$$\nu_\mathrm{A} = -\frac{11 f_0 L^4}{20EI_z} + \frac{RL^3}{3EI_z} + \frac{RL^3}{4EI_z} = 0$$

$$\therefore R = \frac{33}{35} f_0 L \tag{1.21}$$

[2] 図 2.1 に示すように，分布荷重 p_0 が作用する長さ $2l$ の片持ちはりを考える．また点 A で単純支持されているとする．なお，はりの曲げ剛性は一様で EI_z とする．壁からの反力を R_O，反モーメントを M_O，また点 A における反力を R_A として，反力は y 軸方向を正，反モーメントは反時計回り方向を正とする．このとき以下の設問に答えよ．

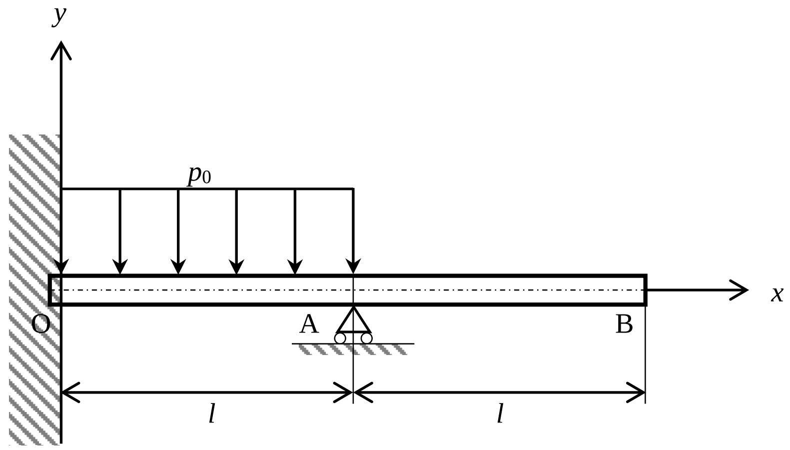

Fig. 2.1

(1) はりの曲げモーメント $M(x)$を特異関数表示せよ．

(2) R_O，M_O，　R_A を p_0，l を用いて表しなさい．

(3) (1)で求めた特異関数に(2)で求めた反力，反モーメントの値を代入することで，点 A に生じるたわみ角 v'_A，点 B に生じるたわみ v_B を，EI_z，p_0，l を用いて表しなさい．

(4) 最後に(2)で求めた値と重ね合わせの原理を用い点 B に生じるたわみ v_B を，EI_z，p_0，l を用いて表しなさい．また解答欄に従って途中式を描け．

[2]

(1) この時の FBD は図 2.3 となる.

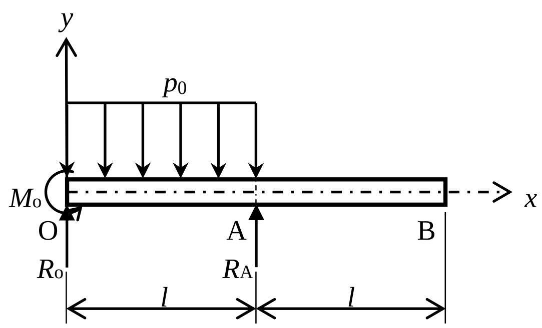

Fig. 2.2

この時 y 軸方向の力のつり合い式は

$$\begin{aligned} R_O + R_A - \int_0^l p_0 dx = 0 \\ R_O + R_A - p_0 l = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

モーメントのつり合い式は(左端周り)

$$\begin{aligned} M_O - \int_0^l p_0 x \cdot dx + R_A l = 0 \\ M_O - \frac{p_0 l^2}{2} + R_A l = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

次に特異関数を考える．特異関数表示においては次の図 2.4 のように点 A 以降も分布荷重が連続的に存在していることが条件である．

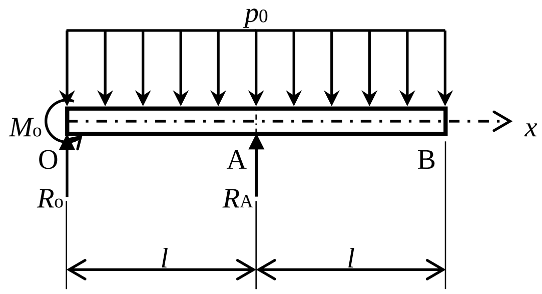

Fig. 2.3

ところがこの問題に関しては点 A 以降に分布荷重が負荷されていないので，図 2.5 のように点 A 以降の分布荷重を打ち消すことを考える．

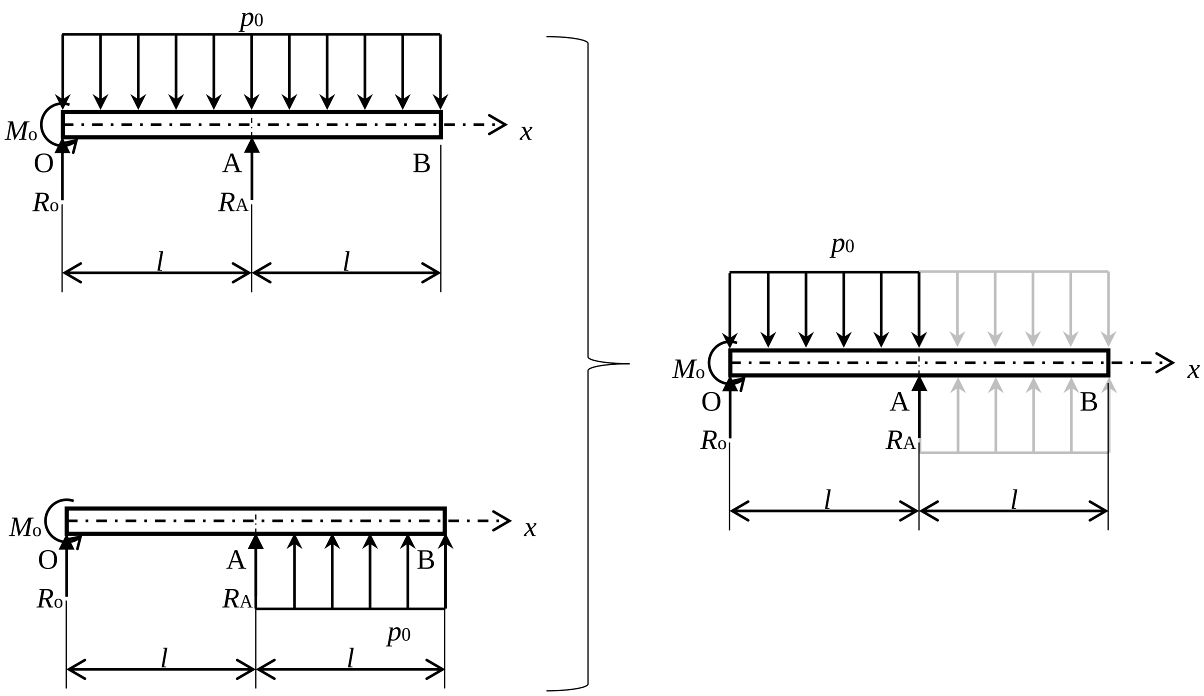

Fig. 2.4

以上より求めるモーメントの特異関数表示は次の式で表せる．

$$
\begin{aligned}
M(x) &= M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^{0} - R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^{1} + M_{1}\langle x\rangle^{0} + M_{2}\langle x-l\rangle^{0} - R_{\mathrm{A}}\langle x-l\rangle^{1} \\
&= M_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^{0} - R_{\mathrm{O}}\langle x\rangle^{1} + \frac{p_0}{2}\langle x\rangle^{2} - \frac{p_0}{2}\langle x-l\rangle^{2} - R_{\mathrm{A}}\langle x-l\rangle^{1}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

(2) いま $M(x)=-EI_z v''$ よりたわみ角，たわみは上式を積分することで求めることが出来る．但し C_1，C_2 は積分定数とする．

$$-EI_z v'' = M_\mathrm{O}\langle x\rangle^0 - R_\mathrm{O}\langle x\rangle^1 + \frac{p_0}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{p_0}{2}\langle x-l\rangle^2 - R_\mathrm{A}\langle x-l\rangle^1$$

$$\begin{aligned}-EI_z v' = M_\mathrm{O}\langle x\rangle^1 - \frac{R_\mathrm{O}}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{p_0}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{p_0}{6}\langle x-l\rangle^3 \\ -\frac{R_\mathrm{A}}{2}\langle x-l\rangle^2 + C_1\langle x\rangle^0\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}-EI_z v = \frac{M_\mathrm{O}}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{R_\mathrm{O}}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{p_0}{24}\langle x\rangle^4 - \frac{p_0}{24}\langle x-l\rangle^4 \\ -\frac{R_\mathrm{A}}{6}\langle x-l\rangle^3 + C_1\langle x\rangle^1 + C_2\langle x\rangle^0\end{aligned}$$

続いてこの問題における拘束条件は x=0 で v',v=0 より積分定数を求めると

$$C_1, C_2 = 0 \tag{2.5}$$

次に x=l で v=0 の条件を用いると

$$\begin{aligned}0 = \frac{M_\mathrm{O}}{2}l^2 - \frac{R_\mathrm{O}}{6}l^3 + \frac{p_0}{24}l^4 \\ \therefore M_\mathrm{O} - \frac{1}{3}R_\mathrm{O}l + \frac{1}{12}p_0 l^2 = 0\end{aligned} \tag{2.6}$$

式(2.1)，式(2.2)，式(2.8)をまとめると

$$\begin{cases} R_{\mathrm{O}} + R_{\mathrm{A}} - p_0 l = 0 \\ M_{\mathrm{O}} - \dfrac{p_0 l^2}{2} + R_{\mathrm{A}} l = 0 \\ M_{\mathrm{O}} - \dfrac{1}{3} R_{\mathrm{O}} l + \dfrac{1}{12} p_0 l^2 = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

これら 3 式を連立して解くと，壁からの反力 R_{O}，反モーメント M_{O}，また点 A における反力 R_{A} は次と求まる．

$$\begin{cases} R_{\mathrm{O}} = \dfrac{5}{8} p_0 l \\ M_{\mathrm{O}} = \dfrac{1}{8} p_0 l^2 \\ R_{\mathrm{A}} = \dfrac{3}{8} p_0 l \end{cases} \tag{2.8}$$

(3) 式(2.10)で求めた解を式(2.6)に代入し，それぞれの点における x の値を代入することで求まる．まず点 A に生じるたわみ角 v'_{A} は $x=l$ を代入する．

$$\begin{gathered} -EI_z v_{\mathrm{A}}' = \frac{1}{8} p_0 l^2 \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} p_0 l \cdot l^2 + \frac{p_0}{6} l^3 = -\frac{1}{48} p_0 l^3 \\ \therefore \quad v_{\mathrm{A}}' = \frac{1}{48} \frac{p_0 l^3}{EI_z} \end{gathered} \tag{2.9}$$

続いて点 B に生じるたわみ v_{B} は $x=2l$ を代入する．

$$\begin{aligned} -EI_z v_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} p_0 l^2 \cdot 4l^2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{8} p_0 l \cdot 8l^3 + \frac{p_0}{24} \cdot 16 l^4 - \frac{p_0}{24} l^4 - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} p_0 l \cdot l^3 \\ &= -\frac{1}{48} p_0 l^4 \\ &\therefore \quad v_{\mathrm{B}} = \frac{1}{48} \frac{p_0 l^4}{EI_z} \end{aligned} \tag{2.10}$$

(4) 重ね合わせの原理を用いるにあたり図 2.5 のように分布荷重と集中荷重を分ける．

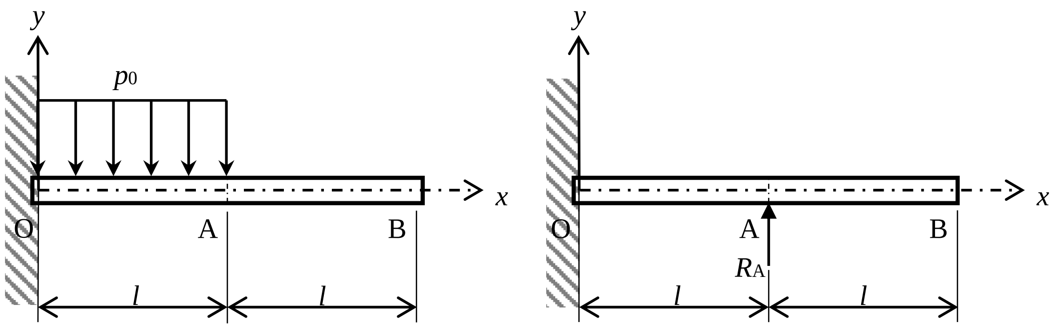

Fig. 2.5

まず図 2.6 に示されるような分布荷重によるにおけるたわみ角とたわみは次の式で表せる．

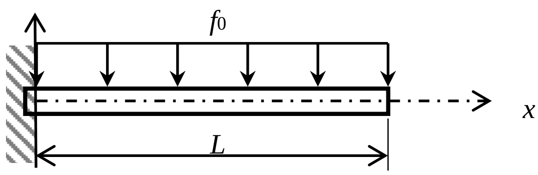

Fig. 2.6

$$
\begin{aligned}
&\text{たわみ角}：-\frac{L^3}{6EI_z}f_0 \\
&\text{たわみ}：-\frac{L^4}{8EI_z}f_0
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

続いて図 2.7 に示されるような集中荷重による点 A におけるたわみ角とたわみは次の式で表せる．

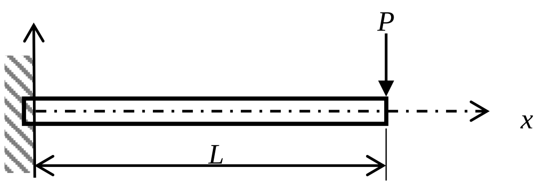

Fig. 2.7

$$
\begin{aligned}
&\text{たわみ角}：-\frac{L^2}{2EI_z}P \\
&\text{たわみ}：-\frac{L^3}{3EI_z}P
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

これより点 B におけるたわみは点 A におけるたわみと，たわみ角×AB 間の長さの和で求まるので

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{B}} &= -\frac{l^3}{6EI_z}p_0\cdot l-\frac{l^4}{8EI_z}p_0 \ -\frac{l^2}{2EI_z}\left(-R_{\mathrm{A}}\right)\cdot l-\frac{l^3}{3EI_z}\left(-R_{\mathrm{A}}\right) \\
&= -\frac{l^3}{6EI_z}p_0\cdot l-\frac{l^4}{8EI_z}p_0 \ -\frac{l^2}{2EI_z}\left(-\frac{3}{8}p_0 l\right)\cdot l-\frac{l^3}{3EI_z}\left(-\frac{3}{8}p_0 l\right) \\
&= \frac{1}{48}\frac{p_0 l^4}{EI_z}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$